

广义系统 H_∞ 可靠性控制

陈跃鹏^{1,2}, 张庆灵², 周祖德³, 徐天群⁴

(1. 武汉理工大学 自动化学院, 湖北 武汉 430070; 2. 东北大学 理学院 系统所, 辽宁 沈阳 110004;

3. 武汉理工大学 机电学院, 湖北 武汉 430070; 4. 武汉理工大学 理学院, 湖北 武汉 430063)

摘要: 通过对更一般形式的执行器和传感器故障模型分析, 研究了广义系统基于观测器的 H_∞ 可靠性控制器设计问题. 利用带有约束的广义代数 Riccati 不等式(GARI), 给出执行器故障情况下, 广义系统 H_∞ 可靠性控制器存在的充要条件和设计方法, 以及传感器故障情况下, 广义系统 H_∞ 可靠性控制器存在的充分条件和设计方法. 所设计的 H_∞ 可靠性控制器使得闭环广义系统容许且传递函数的 H_∞ 范数有界. 同时, 还将带广义约束的 GARI 转化成了线性矩阵不等式(LMI), 进而简化了广义系统 H_∞ 可靠性控制器设计方法.

关键词: 传感器故障; 执行器故障; H_∞ 可靠性控制器; 广义代数 Riccati 不等式; 线性矩阵不等式

中图分类号: TP13

文献标识码: A

H-infinity reliable control for descriptor systems

CHEN Yue-peng^{1,2}, ZHANG Qing-ling², ZHOU Zu-de³, XU Tian-qun⁴

(1. School of Automation, Wuhan University of Technology, Wuhan Hubei 430070, China;

2. College of Science, Institute of Systems Science, Northeastern University, Shenyang Liaoning 110004, China;

3. School of Mechantronics Engineering, Wuhan University, Wuhan Hubei 430070, China;

4. School of Science, Wuhan University of Technology, Wuhan Hubei 430063, China)

Abstract: By analyzing more common failure models of actuators and sensors, the observer based H-infinity reliable controller design problem for descriptor systems is studied. Using generalized algebraic Riccati inequalities(GARI) with constraints, the sufficient and necessary condition, as well as the design method that there exists H-infinity reliable controller for descriptor systems is obtained in the case of actuator failures. Meanwhile, the design method and sufficient condition where there is an H-infinity reliable controller for descriptor systems is obtained in the case of sensor failures. Due to the designed H-infinity reliable controllers, the resulting closed-loop descriptor systems are admissible and have H-infinity performance. Simultaneously, the GARI with constraints are transferred into linear matrix inequalities (LMI), and therefore, the design approach of H-infinity reliable controller for descriptor systems is reduced.

Key words: actuator failures; sensor failures; H-infinity reliable controller; generalized algebraic Riccati inequalities; linear matrix inequalities

1 引言(Introduction)

近几十年来人们对系统的容错控制问题进行了大量的研究^[1-4], 其中高可靠性是最重要的技术指标之一^[1,2]. 过去, 人们主要是对正常系统的容错控制问题进行研究^[1,2]. 随着对广义系统研究的深入^[5], 有关容错控制问题也逐渐为人们所关注^[3,4]. 本文就广义系统的 H_∞ 可靠性控制问题进行了研究. 利用带有约束的广义代数 Riccati 不等式(简称 GARI), 在执行器或传感器正常及出现故障情况下, 给出了广义系统存在 H_∞ 可靠性控制器的条件以及

设计方法.

2 问题的描述(Problem statement)

考虑广义系统

$$\begin{cases} E\dot{x} = Ax + B_1w + B_2u, \\ z = C_1x + D_{12}u, \\ y = C_2x + D_{21}w, \end{cases} \quad (1)$$

其中: $x \in \mathbb{R}^n$ 是广义系统的状态; $w \in \mathbb{R}^r$ 是干扰输入; $u \in \mathbb{R}^m$ 是控制输入; $z \in \mathbb{R}^s$ 是受控输出; $y \in \mathbb{R}^p$ 是测量输出. 设广义系统(1) 正则. 矩阵 $E, A, B_1, B_2, C_1, C_2, D_{12}, D_{21}$ 具有适当的维数. 假设

- A1) (E, A, C_2) 能检测且脉冲能观;
 A2) (E, A, B_2) R-能控和脉冲能控;
 A3) $D_{12}^T [C_1 \quad D_{12}] = [0 \quad I]$;
 A4) $D_{21} [D_{21}^T \quad B_1^T] = [I \quad 0]$.

这里的假设具有一般性^[6]. 对于输入

$$u = [u_1 \quad u_2 \quad \cdots \quad u_m]^T,$$

用 u_i^F 表示故障执行器信号, 其模型为

$$u_i^F = \alpha_{ai} u_i, \quad i = 1, 2, \cdots, m. \quad (2)$$

这里 α_{ai} 满足

$$0 \leq \underline{\alpha}_{ai} \leq \alpha_{ai} \leq \bar{\alpha}_{ai}, \quad i = 1, 2, \cdots, m. \quad (3)$$

并且 $\underline{\alpha}_{ai} \leq 1, 1 \leq \bar{\alpha}_{ai}$. 令

$$u^F = [u_1^F \quad u_2^F \quad \cdots \quad u_m^F]^T,$$

于是有 $u^F = \alpha_a u$. 其中

$$\alpha_a = \text{diag}\{\alpha_{a1}, \alpha_{a2}, \cdots, \alpha_{am}\}. \quad (4)$$

注 1 1) 在执行器故障模型中: 如果 $\underline{\alpha}_{ai} = \bar{\alpha}_{ai} = 1$, 由式(3)知 $u_i^F = u_i$, 意味着相应的执行器正常工作; 如果 $\underline{\alpha}_{ai} = 0$, 则它包含了文献[1,2]中 u_i 的故障情形. 因此式(2), (3)和(4)表示了具有更一般形式的执行器故障模型.

II) 在式(4)中: 如果 $\alpha_a = I$, 则表示所有的执行器正常工作; 如果 $\alpha_a = 0$, 则表示所有的执行器完全故障, 此时的闭环广义系统没有任何反馈信号; 还有广义系统(1)的部分执行器完全故障或执行器反馈信号强度发生改变 3 种情形.

III) 本文讨论不包括 $\alpha_a = 0$ 情形.

IV) 广义系统(1)有脉冲模.

类似说明也适用于传感器故障模型.

设计控制器

$$\begin{cases} E\dot{\xi} = A\xi + B_1 w + B_2 u - L(\gamma - D_{21} w - C_2 \xi), \\ u = K\xi, \end{cases} \quad (5)$$

这里 K 是反馈增益矩阵, L 是观测增益矩阵. 由式(1), (4)和(5), 执行器故障状态下的闭环广义系统为

$$\begin{cases} \bar{E}\dot{x}_e = \bar{A}x_e + \bar{B}w, \\ z = \bar{C}x_e, \end{cases} \quad (6)$$

这里

$$x_e = \begin{bmatrix} I & I \\ 0 & I \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x \\ \xi \end{bmatrix}, \quad \bar{A} = \begin{bmatrix} A + LC_2 & 0 \\ -LC_2 & A + B_2 \alpha_a K \end{bmatrix},$$

$$\bar{E} = \text{diag}\{E, E\}, \quad \bar{B} = [0 \quad B_1^T]^T,$$

$$\bar{C} = [C_1 \quad C_1 + D_{12} \alpha_a K].$$

令

$$\alpha_{a0} = \text{diag}\{\alpha_{a01}, \alpha_{a02}, \cdots, \alpha_{a0m}\},$$

$$\Delta_a = \text{diag}\{\Delta_{a1}, \Delta_{a2}, \cdots, \Delta_{am}\},$$

其中

$$\alpha_{a0i} = \frac{\bar{\alpha}_{ai} + \underline{\alpha}_{ai}}{2}, \quad \Delta_{ai} = \frac{\alpha_{ai} - \alpha_{a0i}}{\alpha_{a0i}},$$

$$i = 1, 2, \cdots, m.$$

于是有

$$\alpha_a = \alpha_{a0}(I + \Delta_a), \quad |\Delta_a| \leq I. \quad (7)$$

这里 $|\Delta_a| := \text{diag}\{|\Delta_{a1}|, |\Delta_{a2}|, \cdots, |\Delta_{am}|\}$. 文后面有类似的表达形式, 其含义与此处相同不另作解释.

注 2 当 $\alpha_a = 0$ 时, 控制器(5)只起观测状态信号作用, 此时的闭环广义系统(6)实际上是开环的, 系统性能由原系统决定.

要研究的第 1 个问题是: 对于执行器故障状态下的广义系统(1), 设计 H_∞ 可靠性控制器(5), 使得闭环广义系统(6)容许(正则、稳定且无脉冲), 且从 w 到 z 的传递函数矩阵

$$T_a(s) = [C_1 + D_{12} \alpha_a K][sE - (A + B_2 \alpha_a K)]^{-1} B_1, \quad (8)$$

满足 $\|T_a(s)\|_\infty < \gamma$, 其中 $\gamma > 0$ 预先给定.

类似地, 对于输出 $y = [y_1 \quad y_2 \quad \cdots \quad y_p]^T$, 用 y_j^F 表示故障传感器信号, 其模型为

$$y_j^F = \alpha_{sj} y_j, \quad j = 1, 2, \cdots, p. \quad (9)$$

这里 α_{sj} 满足

$$0 \leq \underline{\alpha}_{sj} \leq \alpha_{sj} \leq \bar{\alpha}_{sj}, \quad j = 1, 2, \cdots, p. \quad (10)$$

且 $\underline{\alpha}_{sj} \leq 1, 1 \leq \bar{\alpha}_{sj}$. 令 $y^F = [y_1^F \quad y_2^F \quad \cdots \quad y_p^F]^T$, 于是有

$$\begin{cases} y^F = \alpha_s y, \\ \alpha_s = \text{diag}\{\alpha_{s1}, \alpha_{s2}, \cdots, \alpha_{sp}\}. \end{cases} \quad (11)$$

令

$$\alpha_{s0} = \text{diag}\{\alpha_{s01}, \alpha_{s02}, \cdots, \alpha_{s0p}\},$$

$$\Delta_s = \text{diag}\{\Delta_{s1}, \Delta_{s2}, \cdots, \Delta_{sp}\}.$$

其中

$$\alpha_{s0j} = \frac{\bar{\alpha}_{sj} + \underline{\alpha}_{sj}}{2}, \quad \Delta_{sj} = \frac{\alpha_{sj} - \alpha_{s0j}}{\alpha_{s0j}},$$

$$j = 1, 2, \cdots, p.$$

于是

$$\alpha_s = \alpha_{s0}(I + \Delta_s), \quad |\Delta_s| \leq I. \quad (12)$$

由式(1), (5)和(11), 传感器故障状态下的闭环广义系统为

$$\begin{cases} E_e \dot{x}_{1e} = (A_0 + \Delta A)x_{1e} + (B_0 + \Delta B)w_e, \\ z = C_0 x_{1e}, \end{cases} \quad (13)$$

这里

$$x_{1e} = \begin{bmatrix} x \\ \xi \end{bmatrix}, \quad w_e = \begin{bmatrix} w \\ w \end{bmatrix}, \quad E_e = \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned}
A_0 &= \begin{bmatrix} A & B_2 K \\ -L\alpha_{s0}C_2 & A + B_2 K + LC_2 \end{bmatrix}, \\
B_0 &= \begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_1 + L(I - \alpha_{s0})D_{21} \end{bmatrix}, \\
C_0 &= [C_1 \quad D_{12}K], \\
\Delta A &= \begin{bmatrix} 0 \\ -L\alpha_{s0} \end{bmatrix} \Delta_s [C_2 \quad 0] = D\Delta_s H_1, \quad (14a) \\
\Delta B &= \begin{bmatrix} 0 \\ -L\alpha_{s0} \end{bmatrix} \Delta_s [0 \quad D_{21}] = D\Delta_s H_2, \quad (14b)
\end{aligned}$$

其中

$$D = \begin{bmatrix} 0 \\ -L\alpha_{s0} \end{bmatrix}, H_1 = [C_2 \quad 0], H_2 = [0 \quad D_{21}].$$

要研究的第2个问题是:对于传感器故障状态下的广义系统(1),设计 H_∞ 可靠性控制器(5),使得闭环广义系统(13)容许,且从 w_e 到 z 的传递函数矩阵

$$T_s(s) = C_0[sE_e - (A_0 + \Delta A)]^{-1}(B_0 + \Delta B),$$

满足 $\|T_s(s)\|_\infty < \gamma$.

3 准备知识(Preliminary knowledge)

定义 1 三矩阵组 (E, A, C) 称为可检测,如果存在矩阵 L_1 使矩阵对 $(E, A + L_1 C)$ 稳定;三矩阵组 (E, A, C) 称为脉冲能观,如果存在矩阵 L_2 使矩阵对 $(E, A + L_2 C)$ 无脉冲.

定义 2 广义系统(1)的执行器(传感器)出现形式(4)(式(11))的故障时,闭环广义系统(6)(系统(13))容许且传递函数矩阵的 H_∞ 范数有界,则称带有故障执行器(传感器)模型(4)(式(11))的控制器(5)是广义系统(1)的 H_∞ 可靠性控制器.

对广义系统(1)实施控制,使得其闭环系统具有 H_∞ 可靠性,这一控制称为 H_∞ 可靠性控制.

引理 1^[7] 矩阵对 (E, A) 无脉冲的充要条件是 $\deg(\det(sE - A)) = \text{rank}(E)$.

引理 2^[7] 三矩阵组 (E, A, C) 可检测和脉冲能观的充要条件是存在矩阵 L , 使矩阵对 $(E, A + LC)$ 容许.

引理 3^[8] 对于给定的具有适当维数的矩阵 Y, M 和 N , 则满足 $\Delta^T \Delta \leq \sigma I$ 的不等式 $Y + M\Delta N + N^T \Delta^T M^T < 0$ 成立的充要条件是存在 $\varepsilon > 0$ 使得

$$Y + \varepsilon MM^T + \sigma \varepsilon^{-1} N^T N < 0$$

引理 4^[9] 广义系统

$$E\dot{x} = Ax + Bu, y = Cx,$$

容许, 且 $\|C(sE - A)^{-1}B\|_\infty < \gamma$ 的充要条件是 GARI

$$A^T X + X^T A + C^T C + r^{-2} X^T B B^T X < 0,$$

有满足约束 $E^T X = X^T E \geq 0$ 的解.

4 关于执行器故障的 H_∞ 可靠性控制(H-infinity reliable control with respect to actuator fault)

引理 5 若矩阵 D_{12} 满足假设 A3), 令

$$R_0 := I - \varepsilon D_{12} \alpha_{a0}^2 D_{12}^T > 0, \varepsilon > 0. \quad (15)$$

则

$$\begin{aligned}
N_1 &:= C_1^T [R_0^{-1} - R_0^{-1} D_{12} \alpha_{a0} (\varepsilon^{-1} I + \\
&\quad \alpha_{a0} D_{12}^T R_0^{-1} D_{12} \alpha_{a0})^{-1} \alpha_{a0} D_{12}^T R_0^{-1}] C_1 = C_1^T C_1, \quad (16a)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N_2 &:= \varepsilon C_1^T R_0^{-1} D_{12} \alpha_{a0}^2 B_2^T P - C_1^T R_0^{-1} D_{12} \alpha_{a0} (\varepsilon^{-1} I + \\
&\quad \alpha_{a0} D_{12}^T R_0^{-1} D_{12} \alpha_{a0})^{-1} (\alpha_{a0} B_2^T P + \\
&\quad \varepsilon \alpha_{a0} D_{12}^T R_0^{-1} D_{12} \alpha_{a0}^2 B_2^T P) = 0, \quad (16b)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_0 &:= \varepsilon^3 P^T B_2 \alpha_{a0}^2 D_{12}^T (R_0^{-1} D_{12} \alpha_{a0}^2 D_{12}^T + \\
&\quad D_{12} \alpha_{a0}^2 D_{12}^T R_0^{-1}) D_{12} \alpha_{a0}^2 B_2^T P + \\
&\quad \varepsilon^4 P^T B_2 \alpha_{a0}^2 D_{12}^T R_0^{-1} D_{12} \alpha_{a0}^4 D_{12}^T R_0^{-1} D_{12} \alpha_{a0}^2 B_2^T P - \\
&\quad \varepsilon^3 P^T B_2 \alpha_{a0}^2 D_{12}^T R_0^{-1} D_{12} \alpha_{a0}^2 D_{12}^T R_0^{-1} D_{12} \alpha_{a0}^2 B_2^T P - \\
&\quad \varepsilon^2 P^T B_2 \alpha_{a0}^2 D_{12}^T R_0^{-1} D_{12} \alpha_{a0}^2 B_2^T P = \\
&\quad - \varepsilon^2 P^T B_2 \alpha_{a0}^4 B_2^T P. \quad (16c)
\end{aligned}$$

由于篇幅有限,证明过程略.

定理 1 若广义系统(1)满足假设 A1), A2) 和 A3). 则对于 $\gamma > 0$, 当该系统的执行器出现形式(4)的故障时,闭环广义系统(6)容许, 且 $\|T_a(s)\|_\infty < \gamma$ 的充要条件是满足约束 $E^T P = P^T E \geq 0$ 的 GARI

$$\begin{aligned}
&A^T P + P^T A + \gamma^{-2} P^T B_1 B_1^T P + C_1^T C_1 - \\
&\varepsilon^2 P^T B_2 \alpha_{a0}^4 B_2^T P < 0 \quad (17)
\end{aligned}$$

有解. 此时 H_∞ 可靠性控制器(5)中

$$\begin{aligned}
K &= -(\varepsilon^{-1} I + \alpha_{a0} D_{12}^T R_0^{-1} D_{12} \alpha_{a0})^{-1} [\alpha_{a0} B_2^T P + \\
&\quad \alpha_{a0} D_{12}^T R_0^{-1} (C_1 + \varepsilon D_{12} \alpha_{a0}^2 B_2^T P)]. \quad (18)
\end{aligned}$$

矩阵 L 使得广义系统 $(E, A + LC_2)$ 容许.

证 必要性. 由引理 4, 存在矩阵 X 满足约束 $\bar{E}^T X = X^T \bar{E} \geq 0$ 及 GARI

$$\bar{A}^T X + X^T \bar{A} + \gamma^{-2} X^T \bar{B} \bar{B}^T X + \bar{C}^T \bar{C} < 0. \quad (19)$$

将矩阵 X 按矩阵 $\bar{A}$ 的形式进行分块得 $X =$

$$\begin{bmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & P \end{bmatrix}, \text{ 代入式(19)得}$$

$$\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} A + LC_2 & 0 \\ -LC_2 & A + B_2 \alpha_a K \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & P \end{bmatrix} + \\
&\begin{bmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & P \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A + LC_2 & 0 \\ -LC_2 & A + B_2 \alpha_a K \end{bmatrix} +
\end{aligned}$$

$$\gamma^{-2} \begin{bmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & P \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 \\ B_1^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & B_1^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & P \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} C_1^T \\ C_1^T + K^T \alpha_a D_{12}^T \end{bmatrix} [C_1 \quad C_1 + D_{12} \alpha_a K] < 0.$$

进行矩阵运算得

$$\begin{bmatrix} * & * \\ * & T_1 \end{bmatrix} < 0,$$

这里“*”表示证明中不重要的部分,于是由式(7)得到

$$T_1 := (A + B_2 \alpha_a K)^T P + P^T (A + B_2 \alpha_a K) +$$

$$\gamma^{-2} P^T B_1 B_1^T P + (C_1 + D_{12} \alpha_a K)^T (C_1 + D_{12} \alpha_a K) =$$

$$(A + B_2 \alpha_a (I + \Delta_a) K)^T P + P^T (A +$$

$$B_2 \alpha_a (I + \Delta_a) K) + \gamma^{-2} P^T B_1 B_1^T P + (C_1 +$$

$$D_{12} \alpha_a (I + \Delta_a) K)^T (C_1 + D_{12} \alpha_a (I + \Delta_a) K) < 0,$$

由 Schur 补, $T_1 < 0$ 等价于

$$T_2 := \begin{bmatrix} \Gamma_1 & P^T B_1 & \Gamma_2^T \\ B_1^T P & -\gamma^2 I & 0 \\ \Gamma_2 & 0 & -I \end{bmatrix} < 0,$$

其中

$$\Gamma_1 = [A + B_2 \alpha_a (I + \Delta_a) K]^T P + P^T [A + B_2 \alpha_a (I + \Delta_a) K],$$

$$\Gamma_2 = C_1 + D_{12} \alpha_a (I + \Delta_a) K,$$

这样

$$T_2 = \begin{bmatrix} \Gamma_3 & P^T B_1 & \Gamma_4^T \\ B_1^T P & -\gamma^2 I & 0 \\ \Gamma_4 & 0 & -I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P^T B_2 \alpha_a \\ 0 \\ D_{12} \alpha_a \end{bmatrix} \Delta_a [K \quad 0 \quad 0] +$$

$$\left(\begin{bmatrix} P^T B_2 \alpha_a \\ 0 \\ D_{12} \alpha_a \end{bmatrix} \Delta_a [K \quad 0 \quad 0] \right)^T < 0, \quad (20)$$

其中

$$\Gamma_3 = (A + B_2 \alpha_a K)^T P + P^T (A + B_2 \alpha_a K),$$

$$\Gamma_4 = C_1 + D_{12} \alpha_a K,$$

由引理 3, $T_2 < 0$ 当且仅当存在常数 $\varepsilon > 0$ 使得

$$T_3 := \begin{bmatrix} \Gamma_5 & P^T B_1 & \Gamma_6 \\ B_1^T P & -\gamma^2 I & 0 \\ \Gamma_6^T & 0 & \Gamma_7 \end{bmatrix} < 0. \quad (21)$$

这里

$$\Gamma_5 = (A + B_2 \alpha_a K)^T P + P^T (A +$$

$$B_2 \alpha_a K) + K^T \varepsilon^{-1} K + \varepsilon P^T B_2 \alpha_a^2 B_2^T P,$$

$$\Gamma_6 = (C_1 + D_{12} \alpha_a K)^T + \varepsilon P^T B_2 \alpha_a^2 D_{12}^T,$$

$$\Gamma_7 = -I + \varepsilon D_{12} \alpha_a^2 D_{12}^T.$$

由式(15),利用 Schur 补得到

$$T_4 := (A + B_2 \alpha_a K)^T P + P^T (A + B_2 \alpha_a K) +$$

$$K^T \varepsilon^{-1} K + \varepsilon P^T B_2 \alpha_a^2 B_2^T P + \gamma^{-2} P^T B_1 B_1^T P +$$

$$(C_1 + D_{12} \alpha_a K + \varepsilon D_{12} \alpha_a^2 B_2^T P)^T R_0^{-1} (C_1 +$$

$$D_{12} \alpha_a K + \varepsilon D_{12} \alpha_a^2 B_2^T P) < 0,$$

将式(18)中矩阵 K 代入 T_4 , 由引理 5 有

$$T_5 = A^T P + P^T A + \gamma^{-2} P^T B_1 B_1^T P + N_1 + N_2 + N_2^T +$$

$$M_0 + \{K + (\varepsilon^{-1} I + \alpha_a D_{12}^T R_0^{-1} D_{12} \alpha_a)^{-1} \cdot$$

$$[\alpha_a B_2^T P + \alpha_a D_{12}^T R_0^{-1} (C_1 +$$

$$\varepsilon D_{12} \alpha_a^2 B_2^T P)]\}^T [\varepsilon^{-1} I + \alpha_a D_{12}^T R_0^{-1} D_{12} \alpha_a] \cdot$$

$$\{K + (\varepsilon^{-1} I + \alpha_a D_{12}^T R_0^{-1} D_{12} \alpha_a)^{-1} \cdot$$

$$[\alpha_a B_2^T P + \alpha_a D_{12}^T R_0^{-1} (C_1 + \varepsilon D_{12} \alpha_a^2 B_2^T P)]\} =$$

$$A^T P + P^T A + \gamma^{-2} P^T B_1 B_1^T P + C_1^T C_1 -$$

$$\varepsilon^2 P^T B_2 \alpha_a^4 B_2^T P < 0.$$

即式(17)成立.下面证明矩阵 P 满足约束.事实上,由

$$\begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & P \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{bmatrix} \geq 0,$$

考虑到上式的右下块,易知矩阵 P 也满足约束.必要性得证.

充分性.取矩阵 K 为式(18),由必要性的证明知,式(17)成立等价于式(21)成立,又由引理 3,它等价于式(20).于是 $T_1 < 0$.这样连同约束 $E^T P = P^T E \geq 0$,由引理 4,矩阵对 $(E, A + B_2 \alpha_a K)$ 容许并且 $\|T_a(s)\|_\infty < \gamma$.

下面证明闭环广义系统(6)容许.由于

$$\det \left(s \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A + LC_2 & 0 \\ -LC_2 & A + B_2 \alpha_a K \end{bmatrix} \right) =$$

$$\det(sE - (A + LC_2)) \det(sE - (A + B_2 \alpha_a K)).$$

而两矩阵对 $(E, A + B_2 \alpha_a K)$ 和 $(E, A + LC_2)$ 均容许.又

$$\deg \left(\det \left(s \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A + LC_2 & 0 \\ -LC_2 & A + B_2 \alpha_a K \end{bmatrix} \right) \right) =$$

$$\deg(\det(sE - (A + LC_2))) +$$

$$\deg(\det(sE - (A + B_2 \alpha_a K))) =$$

$$\text{rank}(E) + \text{rank}(E).$$

于是闭环广义系统(6)容许.充分性得证.

注 3 由文献[7],不失一般性,假设 $E = \text{diag}\{I_r, 0\}$, 其中 $r = \text{rank}(E)$.于是具有约束条件 $E^T P = P^T E \geq 0$ 的 GARI(17)等价于

$$\begin{bmatrix} A^T P + P^T A - \varepsilon^2 P^T B_2 \alpha_a^4 B_2^T P & P^T B_1 & C_1^T \\ B_1^T P & -\gamma^2 I & 0 \\ C_1 & 0 & -I \end{bmatrix} < 0, \quad (17')$$

有解 $P = \begin{bmatrix} P_s & 0 \\ P_1 & P_f \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. 其中 $P_s \in \mathbb{R}^{r \times r}$, $P_s = P_s^T > 0$, $P_1 \in \mathbb{R}^{(n-r) \times r}$, $P_f \in \mathbb{R}^{(n-r) \times (n-r)}$, P_f 可逆. 式(17')左乘 $\text{diag}\{P^{-T}, I, I\}$ 右乘 $\text{diag}\{P^{-1}, I, I\}$, 并令 $P_0 = P^{-1}$ 得

$$\begin{bmatrix} P_0^T A^T + A P_0 - \varepsilon^2 B_2 \alpha_{s0}^4 B_2^T & B_1 & P_0^T C_1^T \\ B_1^T & -\gamma^2 I & 0 \\ C_1 P_0 & 0 & -I \end{bmatrix} < 0,$$

它是一个 LMI(线性矩阵不等式), 可用 LMI 工具箱求解.

5 关于传感器故障的 H_∞ 可靠性控制(H-infinity reliable control with respect to sensor fault)

下面给出传感器故障下的广义系统 H_∞ 可靠性控制器设计.

定理 2 广义系统(1)满足假设 A1), A2), A3) 和 A4). 若存在矩阵 X 和可逆矩阵 Q 满足下面的 GARI

$$\Theta = A^T X + X^T A + 2\gamma^{-2} X^T B_1 B_1^T X - X^T B_2 B_2^T X + \rho_0 C_2^T C_2 + C_1^T C_1 < 0, \quad (22)$$

$$\Xi = A^T Q + Q^T A + 3\gamma^{-2} Q^T B_1 B_1^T Q + X^T B_2 B_2^T X - C_2^T \Pi^{-1} C_2 < 0, \quad (23)$$

及约束 $E^T X = X^T E \geq 0$ 和 $E^T Q = Q^T E \geq 0$. 其中 $\rho_0 = \gamma^2(\varepsilon\gamma^2 - 1)^{-1}$, 矩阵

$$\Pi = \text{diag}\{s_1, s_2, \dots, s_p\}, \quad (24)$$

这里

$$s_j = \varepsilon |\rho_0| |1 - \alpha_{s0j}| + \varepsilon(\varepsilon\gamma^2 - 1)^{-1}(1 - \alpha_{s0j})^2 \text{sgn}(\varepsilon(\varepsilon\gamma^2 - 1)^{-1}) + \varepsilon\alpha_{s0j}^2, \quad j = 1, 2, \dots, p.$$

当广义系统(1)的传感器出现式(11)的故障时, 闭环广义系统(13)容许, 且 $\|T_s(s)\|_\infty < \gamma$. 此时 H_∞ 可靠性控制器(5)的 K 及 L 由下式给出

$$K = -B_2^T X, L = -Q^{-T} C_2^T \Pi^{-1}. \quad (25)$$

证 令

$$M_1 = \begin{bmatrix} Z_1 & P^T(B_0 + \Delta B) & C_0^T \\ (B_0 + \Delta B)^T P & -\gamma^2 I & 0 \\ C_0 & 0 & -I \end{bmatrix},$$

其中 $Z_1 = (A_0 + \Delta A)^T P + P^T(A_0 + \Delta A)$, 由式(14a)和式(14b)得

$$M_1 = \begin{bmatrix} A_0^T P + P^T A_0 & P^T B_0 & C_0^T \\ B_0^T P & -\gamma^2 I & 0 \\ C_0 & 0 & -I \end{bmatrix} + Z_2 + Z_2^T,$$

$$\text{其中 } Z_2 = \begin{bmatrix} P^T D \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Delta_s [H_1 \quad H_2 \quad 0], \text{ 这里 } \Delta_s \text{ 满足式}$$

(12). 由引理 3, $M_1 < 0$ 等价于存在 $\varepsilon > 0$ 使得

$$M_2 = \begin{bmatrix} Z_3 & Z_4 & C_0^T \\ Z_4^T & Z_5 & 0 \\ C_0 & 0 & -I \end{bmatrix} < 0,$$

其中

$$Z_3 = A_0^T P + P^T A_0 + \varepsilon P^T D D^T P + \varepsilon^{-1} H_1^T H_1,$$

$$Z_4 = P^T B_0 + \varepsilon^{-1} H_1^T H_2,$$

$$Z_5 = -(\gamma^2 I - \varepsilon^{-1} H_2^T H_2),$$

利用 Schur 补, $M_2 < 0$ 等价于

$$M_3 = A_0^T P + P^T A_0 + \varepsilon P^T D D^T P + \varepsilon^{-1} H_1^T H_1 + C_0^T C_0 + (P^T B_0 + \varepsilon^{-1} H_1^T H_2)(\gamma^2 I - \varepsilon^{-1} H_2^T H_2)^{-1}(P^T B_0 + \varepsilon^{-1} H_1^T H_2)^T < 0.$$

令矩阵 $P = \begin{bmatrix} W & -Q \\ -Q & Q \end{bmatrix}$, $W = Q + X$, 由假设 A3), A4) 和式(25), 并通过适当的矩阵运算得

$$RM_3 R^T = \begin{bmatrix} Z_6 & Z_7 \\ Z_7^T & Z_8 \end{bmatrix},$$

其中

$$R = \begin{bmatrix} I & I \\ 0 & I \end{bmatrix},$$

$$Z_6 = A^T X + X^T A + \rho_0 C_2^T C_2 + C_1^T C_1 + \gamma^{-2} X^T B_1 B_1^T X - X^T B_2 B_2^T X,$$

$$Z_7 = \varepsilon \rho_0 C_2^T (I - \alpha_{s0}) L^T Q - \gamma^{-2} X^T B_1 B_1^T Q,$$

$$Z_8 = T + Q^T L C_2 + C_2^T L^T Q + X^T B_2 B_2^T X,$$

$$T = A^T Q + Q^T A + \varepsilon(\varepsilon\gamma^2 - 1)^{-1} Q^T L (\varepsilon\gamma^2 \alpha_{s0}^2 - 2\alpha_{s0} + I) L^T Q + 2\gamma^{-2} Q^T B_1 B_1^T Q.$$

通过适当的矩阵运算得

$$RM_3 R \leq \begin{bmatrix} \Theta & 0 \\ 0 & Z_9 \end{bmatrix},$$

其中

$$Z_9 = A^T Q + Q^T A + 3\gamma^{-2} Q^T B_1 B_1^T Q +$$

$$X^T B_2 B_2^T X + Q^T L C_2 + C_2^T L^T Q + Q^T L \Pi L^T Q,$$

矩阵 Π 满足式(24). 再将式(25)中的矩阵 L 代入上式, 由式(22)和式(23)得

$$RM_3 R^T = \begin{bmatrix} \Theta & 0 \\ 0 & \Xi \end{bmatrix} < 0,$$

于是有 $M_3 < 0$. 由 Schur 补得 $M_2 < 0$, 而 $M_2 < 0$ 又等价于 $M_1 < 0$. 再次由 Schur 补得到

$$(A_0 + \Delta A)^T P + P^T(A_0 + \Delta A) + C_0^T C_0 +$$

$$\gamma^{-2} P^T(B_0 + \Delta B)(B_0 + \Delta B)^T P < 0. \quad (26)$$

又

$$\begin{aligned}
 P^T E_e &= \begin{bmatrix} W & -Q \\ -Q & Q \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{bmatrix} = \\
 &\begin{bmatrix} W^T E & -Q^T E \\ -Q^T E & Q^T E \end{bmatrix} = \\
 &\begin{bmatrix} (X+Q)^T E & -Q^T E \\ -Q^T E & Q^T E \end{bmatrix} = \\
 &\begin{bmatrix} E^T(X+Q) & -E^T Q \\ -E^T Q & E^T Q \end{bmatrix} = E_e^T P,
 \end{aligned}$$

$$\text{且 } RP^T E_e R^T = \begin{bmatrix} X^T E & 0 \\ 0 & Q^T E \end{bmatrix} \geq 0, \text{ 这样} \\
 P^T E_e = E_e^T P \geq 0. \quad (27)$$

根据式(26)和式(27),由引理4知,闭环广义系统(13)容许,且 $\|T_s(s)\|_\infty < \gamma$.

注4 类似于注3,具有约束条件 $E^T X = X^T E \geq 0$ 的 GARI(22)和具有约束条件 $E^T Q = Q^T E \geq 0$ 的 GARI(23)分别等价于 LMI

$$\begin{bmatrix} Z_{10} & \sqrt{2}B_1 & \bar{X}^{-T}C_2^T & \bar{X}^{-T}C_1^T \\ \sqrt{2}B_1^T & -\gamma^2 I & 0 & 0 \\ C_2 \bar{X}^{-1} & 0 & -\rho_0^{-1} I & 0 \\ C_1 \bar{X}^{-1} & 0 & 0 & -I \end{bmatrix} < 0, \quad (22')$$

其中 $Z_{10} = \bar{X}^{-T}A^T + A\bar{X}^{-1} - B_2 B_2^T$ 有解

$$\bar{X} = \begin{bmatrix} X_s & 0 \\ X_1 & X_f \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

其中: $X_s \in \mathbb{R}^{r \times r}$; $X_s = X_s^T > 0$; $X_1 \in \mathbb{R}^{(n-r) \times r}$; $X_f \in \mathbb{R}^{(n-r) \times (n-r)}$; X_f 可逆,以及 LMI

$$\begin{bmatrix} A^T Q + Q^T A + \bar{\Pi} & \sqrt{3}Q^T B_1 \\ \sqrt{3}B_1^T Q & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (23')$$

有解 Q ,其中矩阵 Q 与矩阵 $\bar{X}$ 具有相同的结构特征, $\bar{\Pi} = \bar{X}^T B_2 B_2^T \bar{X} - C_2^T \Pi^{-1} C_2$.

6 结论(Conclusions)

本文给出了广义系统(1)在执行器出现故障情况下存在 H_∞ 可靠性控制器的充要条件,及在传感器出现故障情况下存在 H_∞ 可靠性控制器的充分条件,并分别给出了它们的设计方法.

参考文献(References):

[1] YANG G H, LAM J, WANG J L. Reliable H_∞ control for affine non-

linear systems [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1998, 43(8): 1112 - 1117.

[2] VEILLETTE R J, MEDANIC J V, PERKINS W R. Design of reliable control systems [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1992, 37(3): 293 - 304.

[3] 陈跃鹏, 张庆灵, 姚波. 广义系统具有完整性的鲁棒二次稳定 [J]. *自动化学报*, 2002, 28(4): 615 - 619.

(CHEN Yuepeng, ZHANG Qingling, YAO Bo. Robust quadratic stabilization with integrity for descriptor systems [J]. *Acta Automatica Sinica*, 2002, 28(4): 615 - 619.)

[4] CHEN Y P, ZHANG Q L, LIU W Q. Fault-tolerant control about integrity for descriptor systems [C] // *Proc of the 39th IEEE Conf on Decision and Control*. Sydney, Australia: IEEE Press, 2000, 4359 - 4360.

[5] 张庆灵. 广义大系统的分散控制与鲁棒控制 [M]. 西安: 西北工业大学出版社, 1997.

(ZHANG Q L. *Decentralized and Robust Control for Large-scale Descriptor Systems* [M]. Xi'an: Northwestern Polytechnic University Press, 1997.)

[6] 申铁龙. H_∞ 控制理论与应用 [M]. 北京: 清华大学出版社, 1996.

(SHEN Tielong. *H_∞ Control Theory and Application* [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 1996.)

[7] DAI L Y. *Singular Control Systems* [M]. Berlin: Springer-Verlag, 1989.

[8] PETERSEN I R. A stabilization algorithm for a class of uncertain linear systems [J]. *Systems and Control Letters*, 1987, 8(5): 351 - 357.

[9] MASUBUCHI, KAMITANE Y, OHARA A, et al. H_∞ control for descriptor systems: a matrix inequalities approach [J]. *Automatica*, 1997, 33(4): 669 - 673.

作者简介:

陈跃鹏 (1971—), 男, 东北大学博士, 现为武汉理工大学教师, 主要研究方向为广义系统的容错控制, E-mail: chen Yuepengneu@163.com;

张庆灵 (1956—), 男, 控制理论与控制工程学科教授, 博士生导师, 东北大学理学院院长, 主要研究方向为广义系统理论、广义系统的 H_∞ 控制、广义系统的模型化简、广义系统的容错控制等;

周祖德 (1946—), 男, 武汉理工大学机电学院教授, 博士生导师, 主要研究方向为数学制造和故障诊断等;

徐天群 (1973—), 女, 武汉理工大学讲师, 主要研究方向为随机控制和风险控制.