

具有未知高频增益的鲁棒自适应反推控制器

张正强, 解学军, 吴昭景

(曲阜师范大学 自动化研究所, 山东 曲阜 273165)

摘要: 在高频增益未知的情况下, 对一类带有未建模动态和输入、输出干扰的系统, 给出了一种基于反推技术的鲁棒自适应控制器的设计方法. 通过修正传统鲁棒自适应控制中的动态规范化信号和切换- σ 算法, 证明了闭环系统的所有信号都有界, 同时可以取得较好的跟踪性能. 仿真结果表明了该方法的有效性.

关键词: 反推; 鲁棒自适应控制器; 高频增益

中图分类号: TP13 **文献标识码:** A

Robust adaptive backstepping controller with unknown high-frequency gain

ZHANG Zheng-qiang, XIE Xue-jun, WU Zhao-jing

(Institute of Automation, Qufu Normal University, Qufu Shandong 273165, China)

Abstract: In the case of unknown high-frequency gain, a design method of robust adaptive controller based on backstepping technique is given for a kind of systems with unmodelled dynamics and input/output disturbances. By modifying the dynamic normalizing signal and switching- σ algorithm in the traditional robust adaptive control, all the signals in the closed-loop system are proven to be bounded, meanwhile the better tracking performance can be achieved. Simulation results demonstrate the effectiveness of the approach.

Key words: backstepping; robust adaptive controller; high-frequency gain

1 引言(Introduction)

与传统的必然等价控制器相比, 基于反推技术的自适应控制器具有较好的瞬态性能和较强的稳定性, 因此近年来对这一问题的研究十分活跃. 但是迄今为止, 绝大多数结果仅限于理想系统. 文献[1]针对具有未建模动态和干扰的系统, 把传统的鲁棒自适应控制技术与反推方法结合起来, 提出了一种基于反推技术的鲁棒自适应控制方案. 这种方案通过修正动态规范化信号和切换- σ 算法, 保证了闭环系统的稳定性, 改善了系统的性能而不必牺牲其鲁棒性. 但文献[1]的设计方案是在高频增益已知的情况下给出的.

本文针对高频增益未知的一类系统, 给出了一种基于反推技术的鲁棒自适应控制器的设计. 主要工作在于: 1) 由于高频增益未知, 因此如何估计 $\vartheta \triangleq 1/b_m$ 和设计反推自适应控制器构成了本文的主要工作之一. 同文献[1]相比, 由于这一估计项的引入, 在稳定性分析中的一些相应结论需要重新证

明, 这使得整个自适应系统的分析更加困难; 2) 对于文献[1]给出的条件(34), 由于其中的 $\hat{Z}(s, t)$ 的系数是时变的, 因此对于实际问题很难判断这一条件是否成立. 本文研究了这一条件; 3) 关于文献[1]中式(55)的证明. 由于式(55)中含有时变参数, 因此由式(48)到式(53)的推导不能用文献[2]的引理 3.3.5; 同时由于自适应系统不能事先保证文献[2]中 $ce^{-\frac{\delta}{2}(t-t_0)}|x(t_1)| \in L_\infty$, 因此文献[1]中式(53)和(55)的证明不正确. 如何得到文献[1]的结论(55)构成了本文的另一主要工作; 4) 由于高频增益未知, 这里不能用文献[1]给出的方法分析跟踪性能. 如何分析闭环系统的跟踪性能构成了本文的又一主要工作.

2 问题的提出(Problem statement)

考虑下面的单输入单输出系统:

$$y = G(s)(1 + \mu_1 \Delta_m(s))(u + d_u) + d_y, \quad (1)$$

其中 $G(s) = \frac{Z(s)}{R(s)} = \frac{b_ms^m + \dots + b_1s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_0}$ 是系统建模部分的传递函数, $\Delta_m(s)$ 是系统的未建模动

态, d_u 和 d_y 是输入、输出干扰, $\mu_1 \geq 0$ 是一参数.

控制目标是设计一反推自适应控制律使得闭环系统的所有信号都有界, 同时使系统输出尽可能地跟踪参考信号 $y_r(t)$.

对系统(1)作如下假设:

P1) $a_0, \dots, a_{n-1}, b_0, \dots, b_m$ 是未知常数, 高频增益 b_m 的符号 $\text{sgn}(b_m)$ 已知.

P2) $G(s)$ 是最小相位的.

P3) 系统的相对阶 $\rho = n - m$ 及 $G(s)$ 的阶的上界 n 已知, $\rho > 0$.

P4) $\Delta_m(s)$ 是严格正则的, 且在 $\text{Re}[s] \geq -\delta/2$ 解析, $\delta > 0$ 是一常数.

P5) $d_u, d_y, \dot{d}_y \in S(\mu) = \{x: [0, \infty) \mapsto \mathbb{R}^n \mid \int_t^{t+T} |x(\tau)|^2 \leq c\mu T + c, \forall t, T \geq 0, c \text{ 为正常数}\}.$

对参考模型 $y_r(t)$ 作如下假设:

R1) $y_r(t), y_r^{(i)}(t), i = 1, 2, \dots, \rho$ 已知且有界, $y_r^{(\rho)}(t)$ 分段连续.

3 鲁棒的自适应反推控制器的设计 (Design of robust adaptive backstepping controller)

类似于文献[3]的式(10.3)的推导, 系统(1)的状态空间实现为

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax - ax_1 + \begin{bmatrix} 0_{(\rho-1) \times 1} \\ b \end{bmatrix} (1 + \mu_1 \Delta_m(s))(u + d_u), \\ y = x_1 + d_y, \end{cases} \quad (2)$$

其中 $A = \begin{bmatrix} 0_{(n-1) \times 1} & I_{n-1} \\ 0 & 0_{1 \times (n-1)} \end{bmatrix}$, $a = [a_{n-1} \ \dots \ a_0]^T$, $b = [b_m \ \dots \ b_0]^T$, $x = [x_1 \ \dots \ x_n]^T$. 设计如下滤波器:

$$\dot{\eta} = A_0 \eta + e_n, y, \dot{\lambda} = A_0 \lambda + e_n u,$$

$$\Xi = -[A_0^{-1} \eta \ \dots \ A_0 \eta \ \eta],$$

$$\Omega^T = [v_m \ \dots \ v_0 \ \Xi],$$

$$\xi = -A_0^{-1} \eta, v_j = A_0^j \lambda, j = 0, \dots, m.$$

选取 $K = [k_1 \ k_2 \ \dots \ k_n]^T$, 使得 $A_0 = A - Ke_1^T$ 是 Hurwitz 矩阵, 且 $1/K(s)$ 在 $\text{Re}[s] \geq -\delta/2$ 时解析, 其中

$$K(s) \triangleq \det(sI - A_0) = s^n + k_1 s^{n-1} + \dots + k_{n-1} s + k_n.$$

类似于文献[3], 选取状态 x 的估计 $\hat{x}$ 为

$$\hat{x} = \xi + \Omega^T \theta, \theta = [b^T \ a^T]^T.$$

定义估计误差 $\tilde{x} = x - \hat{x}$, 由此得

$$\dot{y} = \xi_2 + \omega^T \theta + \eta_d + \eta_m = b_m v_{m,2} + \xi_2 + \bar{\omega}^T \theta + \eta_d + \eta_m. \quad (3)$$

其中 $\xi_2, v_{m,2}$ 分别表示 ξ 和 v_m 的第 2 个分量,

$$\omega^T = \left[\frac{s + k_1}{K(s)} h_m^T(s) u \quad \frac{s + k_1}{K(s)} h_{n-1}^T(s) y \right],$$

$$\bar{\omega}^T = \left[0 \quad \frac{s + k_1}{K(s)} h_{m-1}^T(s) u \quad \frac{s + k_1}{K(s)} h_{n-1}^T(s) y \right],$$

$$h_1^T(s) = [s^i \ \dots \ s \ 1],$$

$$\eta_m = \mu_1 \frac{Z(s)(s + k_1)}{K(s)} \Delta_m(s) u,$$

$$\eta_d = \mu_1 \frac{Z(s)(s + k_1)}{K(s)} \Delta_m(s) d_u + \frac{Z(s)(s + k_1)}{K(s)} d_u +$$

$$\dot{d}_y + \frac{(R(s) - s^n)(s + k_1)}{K(s)} d_y + \epsilon_t,$$

$$\epsilon_t = e_2^T (sI - A_0)^{-1} \tilde{x}(0).$$

$e_2^T = [0 \ 1 \ \dots \ 0] \in \mathbb{R}^n$. 由 A_0 是 Hurwitz 矩阵知 ϵ_t 以指数速度收敛于零.

在给出控制器的设计之前, 先定义动态规范化信号

$$m_s(t) = \sqrt{1 + \|(u_f)_t\|_{2\delta}^2}, u_f = \frac{K_f(s)}{K(s)} u,$$

$K_f(s)$ 是任意次数为 $m + 1$ 的首一 Hurwitz 多项式, 且 $1/K_f(s)$ 在 $\text{Re}[s] \geq -\delta/2$ 时解析. 由于 $\theta, 1/b_m$ 未知, 下面采用切换 σ -修正算法修正参数. 定义修正项为

$$\sigma_1(|\hat{\theta}|) = \begin{cases} 0, & |\hat{\theta}| \leq M_1, \\ \Psi_1(|\hat{\theta}|), & M_1 < |\hat{\theta}| < 2M_1, \\ \sigma_{10}, & |\hat{\theta}| \geq 2M_1, \end{cases}$$

$$\sigma_2(|\hat{\vartheta}|) = \begin{cases} 0, & |\hat{\vartheta}| \leq M_2, \\ \Psi_2(|\hat{\vartheta}|), & M_2 < |\hat{\vartheta}| < 2M_2, \\ \sigma_{20}, & |\hat{\vartheta}| \geq 2M_2. \end{cases}$$

其中: $\sigma_{10}, \sigma_{20} > 0$ 是常数; $|\theta| < M_1, |\vartheta| < M_2$, $M_1, M_2 > 0$ 为常数. 记 $\vartheta = 1/b_m$, $\hat{\vartheta}$ 是 ϑ 的估计, $\hat{\theta}$ 是 θ 的估计, 且

$$\hat{\theta} = [\hat{b}^T \ \hat{a}^T]^T = [\hat{b}_m \ \dots \ \hat{b}_0 \ \hat{a}_{n-1} \ \dots \ \hat{a}_0]^T,$$

$$\Psi_1(|\hat{\theta}|) =$$

$$\frac{\sigma_{10}(2\rho - 1)!}{M_1^{2\rho-1}[(\rho - 1)!]^2} \int_{M_1}^{|\hat{\theta}|} (\Theta - M_1)^{\rho-1} (2M_1 - \Theta)^{\rho-1} d\Theta,$$

$$\Psi_2(|\hat{\vartheta}|) =$$

$$\frac{\sigma_{20}(2\rho - 1)!}{M_2^{2\rho-1}[(\rho - 1)!]^2} \int_{M_2}^{|\hat{\vartheta}|} (\Theta - M_2)^{\rho-1} (2M_2 - \Theta)^{\rho-1} d\Theta.$$

定义

$$\bar{\theta} = \theta - \hat{\theta} = [\bar{b}_m \ \dots \ \bar{b}_0 \ \bar{a}_{n-1} \ \dots \ \bar{a}_0]^T,$$

$$\bar{\vartheta} = \vartheta - \hat{\vartheta}.$$

由文献[2]中引理 3.3.2, 定理 8.5.2 知动态规范化

信号和参数估计具有以下性质:

$$\begin{aligned} \eta_m^2 &\leq \mu_1^2 \Delta_1 m_s^2, \sigma_1 \tilde{\theta}^T \hat{\theta} \leq -\sigma_{10} \tilde{\theta}^T \hat{\theta} + 2\sigma_{10} M_1^2, \\ \sigma_1 \tilde{\theta}^T \hat{\theta} &\leq 0, \sigma_2 \tilde{\theta}^T \hat{\theta} \leq -\sigma_{20} \tilde{\theta}^2 + 2\sigma_{20} M_2^2, \sigma_2 \tilde{\theta}^T \hat{\theta} \leq 0. \end{aligned}$$

其中

$$\Delta_1 = \left\| \frac{Z(s)(s+k_1)}{K_f(s)} \Delta_m(s) \right\|_{2\delta}^2 < \infty.$$

定义 $z_1 = y - y_r, z_i = v_{m,i} - \hat{\partial} y_r^{(i-1)} - \alpha_{i-1}, i = 2, \dots, \rho$. 采用文献[3]的方法, 给出反推控制器的设计步骤.

第1步 选取

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \hat{\partial} \alpha_1, \\ \tilde{\alpha}_1 &= -c_1 z_1 - d_1 m_s^2 z_1 - \xi_2 - \bar{\omega}^T \hat{\theta}, \\ \tau_1 &= (\omega - \hat{\partial}(\dot{y} + \tilde{\alpha}_1) e_1) z_1 - \sigma_1 \hat{\theta}. \end{aligned}$$

第2步 取

$$\begin{aligned} \tau_2 &= \tau_1 - \frac{\partial \alpha_1}{\partial y} \omega z_2, \\ \alpha_2 &= -c_2 z_2 - d_2 \left(-\frac{\partial \alpha_1}{\partial y} \right)^2 m_s^2 z_2 - h_2 \left| \frac{\partial \alpha_1}{\partial y} \omega - z_1 e_1 \right|^2 z_2 - \\ &\quad \hat{b}_m z_1 + k_2 v_{m,1} + (\dot{y}_r + \frac{\partial \alpha_1}{\partial \hat{\theta}}) \hat{\partial} + \frac{\partial \alpha_1}{\partial y} (\xi_2 + \omega^T \hat{\theta}) + \\ &\quad \frac{\partial \alpha_1}{\partial y} \dot{y}_r + \frac{\partial \alpha_1}{\partial \eta} (A_0 \eta + e_n y) + \frac{\partial \alpha_1}{\partial \hat{\theta}} \Gamma \tau_2 + \\ &\quad \sum_{j=1}^{m+1} \frac{\partial \alpha_1}{\partial \lambda_j} (-k_j \lambda_1 + \lambda_{j+1}) + \frac{\partial \alpha_1}{\partial m_s} \dot{m}_s. \end{aligned}$$

第i步 $i = 3, \dots, \rho - 1$, 取

$$\begin{aligned} \tau_i &= \tau_{i-1} - \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial y} \omega z_i, \\ \alpha_i &= -z_{i-1} - c_i z_i - d_i \left(-\frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial y} \right)^2 m_s^2 z_i - h_i \left| \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial y} \omega \right|^2 z_i + \\ &\quad k_i v_{m,1} + (\dot{y}_r^{(i-1)} + \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial \hat{\theta}}) \hat{\partial} + \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial y} (\xi_2 + \omega^T \hat{\theta}) + \\ &\quad \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial y_r^{(j-1)}} y_r^{(j)} + \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial \eta} (A_0 \eta + e_n y) + \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial \hat{\theta}} \Gamma \tau_i \\ &\quad + \sum_{j=1}^{m+i-1} \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial \lambda_j} (-k_j \lambda_1 + \lambda_{j+1}) + \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial m_s^{(j-1)}} m_s^{(j)} + \\ &\quad \sum_{j=1}^{i-2} \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial \sigma_1^{(j-1)}} \sigma_1^{(j)} + \sum_{j=1}^{i-2} \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial \sigma_2^{(j-1)}} \sigma_2^{(j)} - \sum_{j=2}^{i-1} \sigma_{ji} z_j, \\ \sigma_{ij} &= \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial \hat{\theta}} \Gamma \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial y} \omega. \end{aligned}$$

第p步 定义 $z_{\rho+1} = 0, \alpha_\rho = v_{m,\rho+1} + u - \hat{\partial} y_r^{(\rho)}$, 则 α_ρ, τ_ρ 的计算可由上面的步骤递推得到. 在上面的步骤中, $c_i > 0, d_i > 0, h_i \geq 0 (i = 2, \dots, \rho)$ 是设计常数, $\gamma, \Gamma = \Gamma^T$ 是自适应增益. 于是得控制律、自适应律分别为

$$\begin{cases} u = \alpha_\rho - v_{m,\rho+1} + \hat{\partial} y_r^{(\rho)}, \\ \dot{\theta} = \Gamma \tau_\rho, \dot{\partial} = -\gamma \operatorname{sgn}(b_m)(\dot{y}_r + \tilde{\alpha}_1) z_1 - \gamma \sigma_2 \hat{\partial}. \end{cases} \quad (4)$$

4 稳定性分析(Stability analysis)

下面给出主要结果.

定理1 对于由系统(1), 控制律和自适应律(4)组成的鲁棒自适应反推控制方案, 假若(P1)~(P5)和(R1)成立, 且 $h_i \geq 0, i = 2, \dots, \rho$, 则

1) $z_i, \hat{\theta}, \hat{\partial}, \gamma, \eta, \Xi, \xi$ 都是一致有界的, $|z| \in S(\frac{\mu_1^2 \Delta_1 + (\mu_1^2 + 1)\mu}{c_0 d_0})$;

2) 一定存在 $\mu^* > 0$, 使得对于任意 $\mu_1 \in [0, \mu^*)$ 闭环系统的其他信号也一致有界;

3) 若 $h_i > 0, i = 2, \dots, \rho$ 则下列性质成立:

$$\begin{cases} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} |z(\tau)|^2 d\tau \leq \frac{\mu_1^2 \Delta_1 + (\mu_1^2 + 1)\mu}{c_0 d_0}, \\ |z(t)| \leq \\ |z(0)| e^{-c_0 t} + \sqrt{\frac{N_1}{c_0} + \frac{2}{d'} N_2 + 32 |b_m| \gamma V_{\max} N_3}, \end{cases} \quad (5)$$

其中

$$\begin{aligned} c_0 &= \min_{1 \leq i \leq \rho} c_i, d_0 = \left(\sum_{i=1}^{\rho} d_i^{-1} \right)^{-1}, \\ d' &= \left(\frac{1}{d_1} + \sum_{i=2}^{\rho} \frac{1}{2d_i} \right)^{-1}, h_0 = \left(\sum_{i=2}^{\rho} \frac{1}{h_i} \right)^{-1}, \\ \Delta_2 &= \left\| \frac{s+k_1}{K_f(s)} h_{m-1}(s) \right\|_{2\delta}, V_{\max} = \sup_{t \geq 0} V_\rho(t), \\ l_1 &= \sqrt{2V_{\max}} + \|\gamma_r\|_\infty, l_2 = \left\| L^{-1} \left(\frac{s+k_1}{K(s)} h_{n-1}(s) \right) \right\|_1, \\ l_3 &= \|L^{-1}(e_2^T A_0^n (sI - A_0)^{-1} e_n)\|_1, \\ N_1 &= \frac{1}{d'} \mu_1^2 \Delta_1 + \left[\frac{\bar{\lambda}(\Gamma)}{2h_0} + \frac{2\bar{\lambda}(\Gamma)}{d_1} (\Delta_2 + l_1 l_2)^2 + \right. \\ &\quad \frac{4|b_m| \gamma \|\dot{y}_r\|_\infty^2}{d_1} + \frac{16|b_m| \gamma l_1^2 l_3^2}{d_1} + \\ &\quad \left. \frac{32|b_m| \gamma (\Delta_2 + l_1 l_2)^2 |\theta|^2}{d_1} \right] V_{\max} + \\ &\quad \left[\frac{32|b_m| \gamma c_1^2}{d_1} + \frac{64|b_m| \gamma (\Delta_2 + l_1 l_2)^2 \bar{\lambda}(\Gamma)}{d_1} \right] V_{\max}^2, \end{aligned}$$

$$N_2 = \int_0^t e^{-2c_0(t-\tau)} \eta_d^2(\tau) d\tau,$$

$$N_3 = \int_0^t e^{-2c_0(t-\tau)} [d_1 m_s^2(\tau) z_1^2(\tau)] d\tau,$$

L^{-1} 表示 Laplace 逆变换, $\bar{\lambda}(\Gamma)$ 表示 Γ 的最大特征值.

证 取类 Lyapunov 函数

$$V_\rho = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\rho} z_i^2 + \frac{1}{2} \bar{\theta}^T \Gamma^{-1} \bar{\theta} + \frac{1}{2\gamma} |b_m| \bar{\vartheta}^2,$$

利用文献[2]的系 3.3.3 和引理 9.8.2 可证结论 1), 2) 成立. 注意到非线性阻尼项

$$-h_2 \left| \frac{\partial \alpha_1}{\partial y} \omega - z_1 e_1 \right|^2 z_2, -h_i \left| \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial y} \omega \right|^2 z_i, i=3, \dots, \rho$$

的引入只能使得 Lyapunov 函数的导数更负, 3) 易证.

5 仿真例子 (Simulation example)

考虑下面的系统:

$$y = \frac{b_0}{s^2 + a_1 s + a_0} (1 + \mu_1 \Delta_m(s))(u + d_u) + d_y. \quad (6)$$

其中 b_0, a_1, a_0 是未知常数, b_0 的符号 $\text{sgn}(b_0)$ 已知. 选取参数 $k_1 = k_2 = 4, \delta = 1, b_0 = 1, a_1 = 2, a_0 = -1, \mu_1 = 0.4, \Delta_m(s) = \frac{-40s + 1}{s^2 + 10s + 100}, d_u = 0.05 \sin 10t, d_y = 0.2 + 0.1 \sin 0.5t, \sigma_{10} = \sigma_{20} = 1, M_1 = M_2 = 9, c_1 = d_1 = c_2 = d_2 = h_2 = 1, \gamma = 1, \Gamma = \text{diag}\{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\}, \gamma_1 = 5, \gamma_2 = 5, \gamma_3 = 1$, 状态初值 $x_1(0) = 0, x_2(0) = 2, \eta_1(0) = \eta_2(0) = \lambda_1(0) = \lambda_2(0) = 0, \hat{\vartheta}(0) = 0.5, \hat{b}_0(0) = -1, \hat{a}_1(0) = -0.5, \hat{a}_0(0) = 0$. 仿真结果见图 1~4.

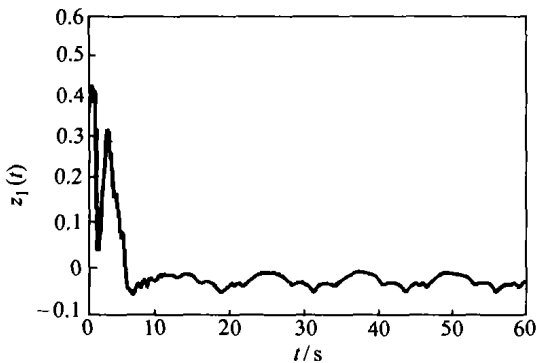


图 1 跟踪误差曲线
Fig. 1 Curve of tracking error

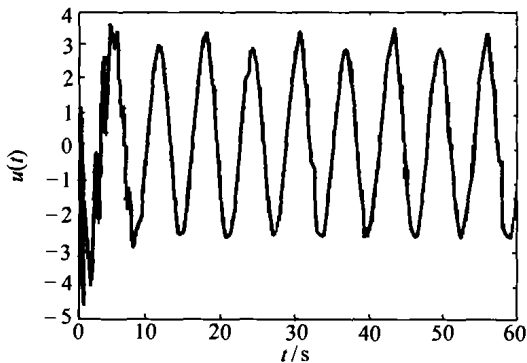


图 2 控制律曲线
Fig. 2 Curve of control law

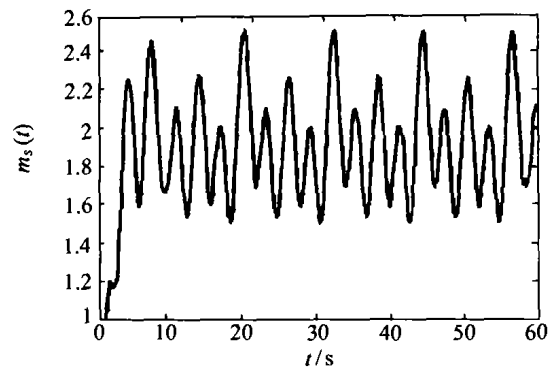


图 3 规范化信号曲线
Fig. 3 Curve of normalizing signal

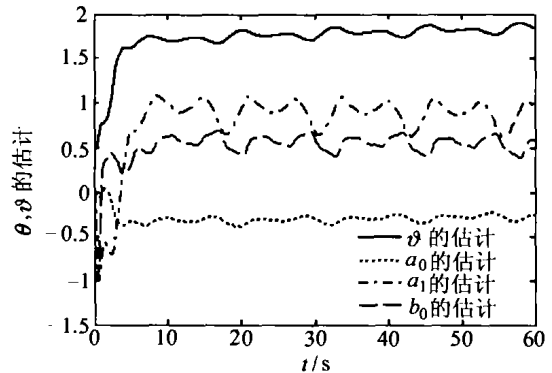


图 4 参数估计曲线
Fig. 4 Curve of parameter estimate

6 结论 (Conclusions)

本文对于一类系统(1), 在仅知高频增益符号的情况下, 给出了一种鲁棒自适应反推控制器的设计方法, 严格地分析了稳定性和跟踪性能. 仿真结果验证了本文工作的有效性.

参考文献 (References):

- [1] ZHANG Y P, IOANNOU P A. Robustness and performance of a modified adaptive backstepping controller [J]. *Int J of Adaptive Control and Signal Processing*, 1998, 12(3): 247-265.
- [2] IOANNOU P A, SUN J. *Robust Adaptive Control* [M]. New Jersey: Prentice-Hall, 1996.
- [3] KRSTIC M, KANELAKOPOULOS I, KOKOTOVIC P V. *Nonlinear and Adaptive Control Design* [M]. New York: Wiley-Interscience, 1995.

作者简介:

张正强 (1978—), 男, 现在曲阜师范大学电气信息与自动化学院工作, 主要研究方向为自适应控制, E-mail: qufuzzq@126.com;

解学军 (1968—), 男, 教授, 主要研究方向为复杂系统的自适应控制;

吴昭景 (1970—), 男, 主要研究方向为自适应控制.