

MIMO 网络控制系统的建模与分析

樊卫华, 蔡 骅, 周 川, 胡维礼

(南京理工大学 自动化系, 江苏 南京 210094)

摘要: 针对网络只存在于传感器节点与控制器节点之间的多输入多输出(MIMO)网络控制系统, 研究了系统建模和稳定性问题. 设传感器节点和控制器节点均为时间驱动, 且它们的采样存在着固定的时间差, 网络诱导时延的上界大于一个采样周期, 建立了此类网络控制系统的模型. 基于 Lyapunov 函数和线性矩阵不等式(LMIs)方法, 给出了闭环系统渐近稳定的充分条件. 仿真表明本文的方法是有效的.

关键词: 网络控制系统; 时延; Lyapunov 函数; 线性矩阵不等式

中图分类号: TP273

文献标识码: A

Modeling and analysis of MIMO networked control systems

FAN Wei-hua, CAI Hua, ZHOU Chuan, HU Wei-li

(Department of Automation, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing Jiangsu 210094, China)

Abstract: Considering the MIMO networked control systems with the sensors and controller interconnected by network, the model and stability are studied. Suppose the sensor nodes and the controller node are time-driven with fixed time difference among their sampling time, the maximum network-induced delay is larger than one sample period; the model of the networked control system is given. Based on the Lyapunov function and linear matrix inequalities (LMIs), the sufficient condition subject to the asymptotic stability of the close loop system is derived. The simulation verified the validity of the method.

Key words: networked control systems; delay; Lyapunov function; linear matrix inequalities

1 前言(Introduction)

网络控制系统(NCS)是控制技术、网络通信与计算机技术相结合而产生的新型控制系统, 近年来日渐为人们所关注. 多包传输是指网络控制系统的传感器等系统部件的待发数据被分成多个数据包, 分时传输, 其数据不可能同时发送和到达目标节点, 给系统分析和设计带来了新的问题.

目前多包传输网络控制系统的研究结果报道较少^[1~3]. 文献[1]针对传感器采用多包传输的网络控制系统, 忽略网络诱导时延, 将网络控制系统建模为切换系统, 分析了传感器数据封装为两个数据包时系统的稳定性. 文献[2]针对控制器与传感器为时间驱动, 执行器为事件驱动的 MIMO 网络控制系统, 分析了时变时延的影响, 给出了闭环系统的离散模型, 但未进行系统的分析和设计. 文献[3]对文献[2]中系统的一个特例, 即固定时延的 MIMO 网络控制系统, 研究了控制器的设计.

本文针对如图 1 所示的 MIMO 网络控制系统,

设定控制器节点与传感器节点均为时间驱动, 建立了广义被控对象的模型. 基于动态反馈控制律, 利用 Lyapunov 函数和线性矩阵不等式方法, 分析了闭环系统的稳定性. 仿真表明本文所研究的方法是有效的.

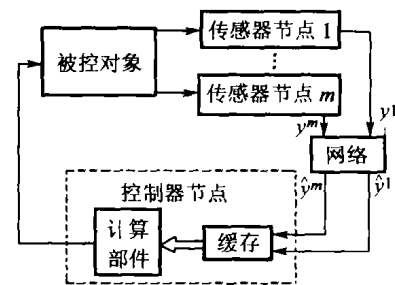


图 1 MIMO NCS 的结构
Fig. 1 Structure of MIMO NCS

2 建模(Modeling)

2.1 网络诱导时延(Network induced delay)

如图 1 所示, 设网络控制系统的被控对象为

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_p x(t) + B_p u(t), \\ y(t) = C_p x(t). \end{cases} \quad (1)$$

其中 $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ 为被控对象的状态, $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^l$ 为输入, $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^m$ 为输出, A_p, B_p, C_p 为适维常系数矩阵. 设传感器节点的数目与系统输出的维数相同, 每个传感器节点的数据为单包传输, 其数据包带有节点标识和时间戳. 控制器节点具有存放每个传感器节点数据的缓存, 当传感器数据到达时, 根据节点标识和时间戳判断数据是否“新”, 是则保存数据, 否则丢弃该数据. 在计算时刻到来时, 控制器节点利用缓存数据计算控制量, 并输出.

有关网络和系统的假设如下:

1) 设传感器节点、控制器节点为时间驱动, 周期均为 T . 传感器节点的采样时刻与控制器节点的计算时刻之间存在时间差, 记为 $\delta_s T, s = 1, 2, \dots, m, \delta_s < 1$ 为常数.

2) 若某个传感器节点在采样周期内未能成功发送数据, 新的采样时刻到来后, 丢弃该数据, 传输新的数据;

3) 数据包在网络传输过程中存在丢包和乱序现象.

由假设及图2所示的时序可见, 数据由传感器采样, 到为控制器节点所采用之间的时间 τ_k^s , 由网络诱导时延 t_k^s, δ_s 以及 T 共同确定.

若 $t_k^s \leq \delta_s T$, 则 $\tau_k^s = \delta_s T$;

若 $t_k^s > \delta_s T$, 则 $\tau_k^s = (d_k^s + \delta_s) T$,

其中

$$d_k^s = \begin{cases} (t_k^s - \delta_s T) / T, & (t_k^s - \delta_s T) / T \text{ 为整数,} \\ [(t_k^s - \delta_s T) / T] + 1, & \text{其他,} \end{cases}$$

$s = 1, 2, \dots, m; [\cdot]$ 为取整.

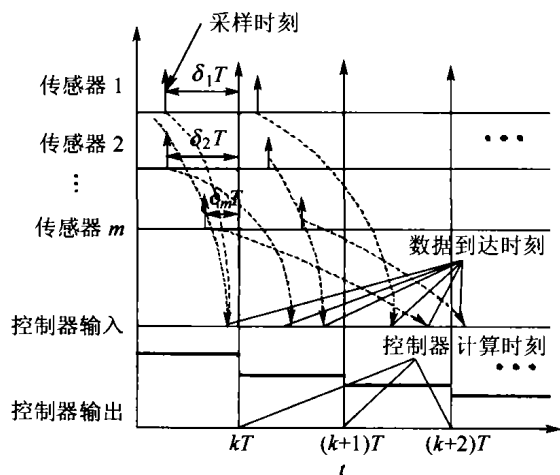


图2 NCS的时序

Fig. 2 Timing diagram of the NCS

若由于丢包和乱序的影响, 造成该周期无新的传感器数据到达, 控制器需用上个周期的数据计算控制量, 相当于已有数据的时延增大了一个周期, 即

$d_k^s = d_{k-1}^s + 1$. 综上所述, 有

$$\tau_k^s = (d_k^s + \delta_s) T. \quad (2)$$

简记 d_k^s 为 d_s , 不失一般性, 设 $d_s \leq \bar{d}_s$.

2.2 广义被控对象模型 (Generalized plant model)

首先将被控对象(1)按控制器节点的计算周期进行离散化, 可得

$$\mathbf{x}_{k+1} = A\mathbf{x}_k + B\mathbf{u}_k. \quad (3)$$

其中: $A = e^{A_p T}; B = \int_0^T e^{A_p q} dq B_p$. 由2.1节中的分析, 广义被控对象的输出的任一分量

$$\hat{y}_k^s = y_{k-\tau_k^s}^s = y_{k-d_s-\delta_s}^s = C_s \mathbf{x}_{k-d_s-\delta_s},$$

其中 $C_s \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ 为 C 的第 s 行. 由此

$$\hat{\mathbf{y}}_k = \begin{bmatrix} \hat{y}_k^1 \\ \vdots \\ \hat{y}_k^m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 \mathbf{x}_{k-d_1-\delta_1} \\ \vdots \\ C_m \mathbf{x}_{k-d_m-\delta_m} \end{bmatrix}. \quad (4)$$

由于式(4)涉及到分数时延, 不便处理, 因而将其转化为整数时延表示. 由连续系统的离散化公式, 可得

$$\mathbf{x}_{k-d_s-\delta_s} = A_\delta^s \mathbf{x}_{k-d_s-1} + B_\delta^s \mathbf{u}_{k-d_s-1}. \quad (5)$$

其中: $A_\delta^s = e^{A_p (1-\delta_s) T}, B_\delta^s = \int_0^{(1-\delta_s) T} e^{A_p s} ds B_p$. 由于 δ_s 为常数, A_δ^s, B_δ^s 为常数阵. 则

$$\hat{\mathbf{y}}_k = \sum_{i=1}^m (\Theta_i \mathbf{x}_{k-d_i-1} + \tilde{\Omega}_i \mathbf{u}_{k-d_i-1}). \quad (6)$$

其中

$$\Theta_i = \begin{bmatrix} \theta_1^i \\ \vdots \\ \theta_m^i \end{bmatrix}, \theta_j^i = \begin{cases} C_j A_\delta^i, & j = i, \\ 0, & j \neq i, \end{cases}$$

$$\tilde{\Omega}_i = \begin{bmatrix} \tilde{\varphi}_1^i \\ \vdots \\ \tilde{\varphi}_m^i \end{bmatrix}, \tilde{\varphi}_j^i = \begin{cases} C_j B_\delta^i, & j = i, \\ 0, & j \neq i, \end{cases} j = 1, \dots, m.$$

由式(3)和(6), 广义被控对象的离散模型:

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{k+1} = A\mathbf{x}_k + B\mathbf{u}_k, \\ \hat{\mathbf{y}}_k = \sum_{i=1}^m (\Theta_i \mathbf{x}_{k-d_i-1} + \tilde{\Omega}_i \mathbf{u}_{k-d_i-1}). \end{cases} \quad (7)$$

从式(7)可以看到, 广义被控对象的输出是多个时延的状态和输入的线性组合. 因此 MIMO 网络控制系统是具有多个时变时延的线性离散系统.

3 稳定性分析 (Stability analysis)

3.1 问题的描述 (Problem description)

不失一般性, 假设控制器的状态方程为

$$\begin{cases} \mathbf{z}_{k+1} = F\mathbf{z}_k + G\hat{\mathbf{y}}_k, \\ \mathbf{u}_k = H\mathbf{z}_k. \end{cases} \quad (8)$$

其中 $z_k \in \mathbb{R}^q$ 为控制器的状态量, F, G, H 是适维参数矩阵.

由式(7),(8)可得闭环系统的状态方程为

$$\begin{cases} x_{k+1} = Ax_k + BHz_k, \\ z_{k+1} = Fz_k + G \sum_{i=1}^m (\Theta_i x_{k-d_i-1} + \Omega_i z_{k-d_i-1}). \end{cases} \quad (9)$$

其中: $\Omega_i = \tilde{\Omega}_i H, d_i \leq \bar{d}_i, k, d_i, \bar{d}_i \in \mathbb{Z}^+, i = 1, \dots, m$.

3.2 主要结果(Main result)

定理 1 若矩阵不等式

$$\begin{bmatrix} \bar{M}_1 & 0 & 0 & 0 & X_1 A^T \\ 0 & \bar{M}_2 & 0 & X_2 F^T & (BHX_2)^T \\ 0 & 0 & -J_2 & N_2^T & 0 \\ 0 & FX_2 & N_2 & -X_2 & 0 \\ AX_1 & BHX_2 & 0 & 0 & -X_1 \end{bmatrix} < 0 \quad (10)$$

有解 $X_j^T = X_j > 0, T_{i,j} = T_{i,j}^T > 0, j = 1, 2, i = 1, 2, \dots, m$, 则闭环系统(9)渐近稳定. 式中

$$\bar{M}_j = -X_j + \sum_{i=1}^m T_{i,j}, \quad (11)$$

$$\begin{aligned} N_2 = & [G\Theta_1 X_1 \quad \cdots \quad G\Theta_m X_1 \quad G\tilde{\Omega}_1 HX_2 \quad \cdots \quad G\tilde{\Omega}_m HX_2], \\ & (12) \end{aligned}$$

$$J_2 = \text{diag}\{T_{1,1}, \dots, T_{m,1}, T_{1,2}, \dots, T_{m,2}\}. \quad (13)$$

证 定义 Lyapunov 函数

$$V(k) = x_k^T P_1 x_k + z_k^T P_2 z_k + \sum_{i=1}^m \sum_{l=-d_i-1}^{-1} \{x_{k+l}^T Q_{i,1} x_{k+l} + z_{k+l}^T Q_{i,2} z_{k+l}\},$$

其中 $P_j, Q_{i,j}$ 为对称正定阵, $j = 1, 2$. 由式(9)可得

$$\Delta V(k) = V(k+1) - V(k) = \eta_k^T \Sigma \eta_k.$$

其中

$$\eta_k^T = [x_k^T \quad z_k^T \quad x_{k-d_1-1}^T \cdots x_{k-d_m-1}^T \quad z_{k-d_1-1}^T \cdots z_{k-d_m-1}^T],$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} M_1 & A^T P_1 B H & 0 \\ (B H)^T P_1 A & M_2 & F^T P_2 N_1 \\ 0 & N_1^T P_2 F & J \end{bmatrix}, \quad (14)$$

$$M_1 = A^T P_1 A - P_1 + \sum_{i=1}^m Q_{i,1}, \quad (15)$$

$$M_2 = (B H)^T P_1 B H + F^T P_2 F - P_2 + \sum_{i=1}^m Q_{i,2}, \quad (16)$$

$$N_1 = [G\Theta_1 \quad \cdots \quad G\Theta_m \quad G\Omega_1 \quad \cdots \quad G\Omega_m], \quad (17)$$

$$J = N_1^T P_2 N_1 + J_1, \quad (18)$$

其中 $J_1 = -\text{diag}\{Q_{1,1}, \dots, Q_{m,1}, Q_{1,2}, \dots, Q_{m,2}\}$.

若 $\Delta V < 0$, 则系统(9)渐近稳定. 而 $\Delta V < 0$, 等价于 $\Sigma < 0$, 由 Schur 补引理, 可得 $\Sigma < 0$ 等价于:

$$\begin{bmatrix} -P_1 + \sum_{i=1}^m Q_{i,1} & 0 & 0 & 0 & A^T \\ 0 & -P_2 + \sum_{i=1}^m Q_{i,2} & 0 & F^T & (B H)^T \\ 0 & 0 & J_1 & N_1^T & 0 \\ 0 & F & N_1 & -P_2^{-1} & 0 \\ A & B H & 0 & 0 & -P_1^{-1} \end{bmatrix} < 0.$$

对上式左乘、右乘 $\text{diag}\{P_1^{-1}, P_2^{-1}, \underbrace{P_1^{-1}, \dots, P_1^{-1}}_{m \uparrow},$

$\underbrace{P_2^{-1}, \dots, P_2^{-1}}_{m \uparrow}, I, I\}$, 并令 $X_j = P_j^{-1}, T_{i,j} = X_j Q_{i,j}, X_j,$

可得式(10). 证毕.

式(10)是关于 $X_1, X_2, T_{i,1}, T_{i,2}$ 的线性矩阵不等式. 若将 F, G, H 也作为待求参数, 则式(10)转化为双线性矩阵不等式. 目前双线性矩阵不等式问题逐渐成为研究的热门, 已有一些求解方法, 例如迭代算法等^[4,5], 但这些算法尚不成熟, 应用还存在着困难.

4 仿真(Simulation)

设网络控制系统的被控对象为

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -10.54 & 1.05 & 0 & 0 \\ 0 & -18.18 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -16.25 & 1.091 \\ 0 & 0 & 0 & -17.86 \end{bmatrix} x(t) +$$

$$\begin{bmatrix} -0.0324 & 0 \\ 515.3 & 0 \\ 0 & -0.08846 \\ 0 & 517.1 \end{bmatrix} u(t),$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t).$$

采样周期 $T = 10\text{ms}$, 两个传感器节点与控制器之间的时间差分别为 $\delta_1 = 0.4, \delta_2 = 0.5, d_k^1, d_k^2 \leq 15$ 为随机时变的. 按照文中所给的方法将对象离散化, 并考虑网络的影响, 可得广义被控对象如式(7)所示, 其中

$$A = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.091 & 0 & 0 \\ 0 & 0.8338 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.85 & 0.0092 \\ 0 & 0 & 0 & 0.8364 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 0.0243 & 0 \\ 4.712 & 0 \\ 0 & 0.02438 \\ 0 & 4.735 \end{bmatrix},$$

$$\Theta_1 = \begin{bmatrix} 0.9387 & 0.0058 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\Theta_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.922 & 0.005 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{\Omega}_1 = \begin{bmatrix} 0.009 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \tilde{\Omega}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0.0062 \end{bmatrix}.$$

设动态反馈控制器已知,如式(8)所示,其中

$$F = \begin{bmatrix} -0.3815 & 0 \\ 0 & -0.5227 \end{bmatrix},$$

$$G = \begin{bmatrix} 1.7323 & 0 \\ 0 & 1.2135 \end{bmatrix},$$

$$H = \begin{bmatrix} -0.2265 & 0 \\ 0 & -0.1146 \end{bmatrix}.$$

由本文所给的方法,利用 Matlab 6.5 计算可知,闭环系统是渐近稳定的.此时,闭环系统的状态响应曲线如图 3 所示(初始状态为 $x_0 = [1 \ 2 \ 3 \ 4]^T$).

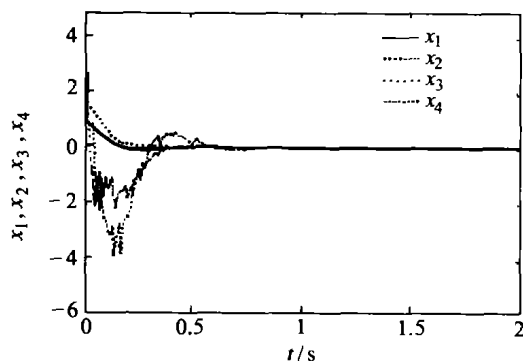


图3 NCS 的状态响应
Fig. 3 State response of NCS

5 结论(Conclusions)

研究了一类 MIMO 网络控制系统的建模以及稳

定性分析.考虑时延、数据包丢失以及数据包乱序对系统的影响,建立了广义被控对象的模型——具有多个时变时延的线性离散时间系统.基于动态反馈控制器,分析了闭环系统的渐近稳定性.此类系统的动态反馈控制器的设计有待进一步的研究.

参考文献(References):

- [1] ZHANG W, BRANICKY M S, PHILIPS S M. Stability of networked control systems [J]. *IEEE Control Systems Magazine*, 2001, 21(1): 85–99.
- [2] LIAN Fengli, JAMES M, DAWN T. Analysis and modeling of networked control systems: MIMO case with multiple time delays [C]// *Proc of the American Control Conference*. Arlington, VA, USA: IEEE Press, 2001, 4306–4312.
- [3] LIAN Fengli, JAMES M, DAWN T. Optimal controller design and evaluation for a class of networked control systems with distributed constant delays [C]// *Proc of the American Control Conference*. Anchorage, Alaska, USA: IEEE Press, 2002, 3009–3014.
- [4] CAO Yongyan, JAMES L, SUN Youxian. Static output feedback stabilization: an ILMI approach [J]. *Automatica*, 1998, 34(12): 1641–1645.
- [5] KIM E, KIM D. Stability analysis and synthesis for an affine fuzzy system via LMI and ILMI: discrete case [J]. *IEEE Trans on Systems, Man and Cybernetics-part B: Cybernetics*, 2001, 31(1): 132–140.

作者简介:

樊卫华 (1975—),男,南京理工大学自动化系博士研究生,研究方向为网络控制系统, E-mail: weihua_fan@tom.com;

蔡 骅 (1966—),男,副教授,主要研究方向为系统工程及智能控制与智能系统, E-mail: hcai@mail.njust.edu.cn;

周 川 (1970—),男,副教授,主要研究方向为故障诊断、网络控制系统, E-mail: cqwl002@sina.com;

胡维礼 (1941—),男,教授,博士生导师,1965年毕业于清华大学自动控制系,主要研究方向为鲁棒自适应控制、非线性控制及智能控制理论在伺服系统中的应用等, E-mail: hwl1002@sina.com.