

一类带不确定输入动态非线性系统的输出反馈鲁棒镇定

王兴平¹, 张金春², 程兆林³

(1. 海军航空工程学院 应用数学研究所, 山东 烟台 264001; 2. 海军航空工程学院 基础部, 山东 烟台 264001;
3. 山东大学 数学与系统科学学院, 山东 济南 250100)

摘要: 研究一类带不确定输入动态非线性系统的输出反馈鲁棒镇定问题. 通过在高增益观测器引入新的设计参数, 改进了通常的高增益反馈控制的设计方法. 在输入动态满足零相对阶最小相位的假设下, 基于非分离设计原则给出了动态输出反馈控制器的设计方法, 所设计的控制器实现了对任意可允许不确定输入动态的全局鲁棒镇定.

关键词: 全局鲁棒镇定; 不确定输入动态; 动态输出反馈; 高增益观测器

中图分类号: TP273 **文献标识码:** A

Output feedback robust stabilization for a class of nonlinear systems with input unmodeled dynamics

WANG Xing-ping¹, ZHANG Jin-chun², CHENG Zhao-lin³

(1. Applied Mathematics Institute, Naval Aeronautical Engineering Institute, Yantai Shandong 264001, China;
2. Department of Basic Sciences, Naval Aeronautical Engineering Institute, Yantai Shandong 264001, China;
3. The School of Mathematics and Systems Science, Shandong University Jinan Shandong 250100, China)

Abstract: The problem of global robust stabilization via output feedback for a class of nonlinear systems with input unmodeled dynamics is considered. The improved high-gain observers with an additional parameter are introduced to design robust output feedback controllers, by which the gain can be determined without recursive procedure. Under the assumption that the unmodeled dynamics are minimum-phase and relative degree zero, a globally stabilizing output feedback controller is explicitly constructed based on nonseparation principle.

Key words: global robust stabilization; dynamic output feedback; input unmodeled dynamics; high gain observer

1 引言(Introduction and problem formulation)

控制系统的输出反馈镇定是控制理论中的一个重要问题, 近 10 年来, 非线性系统的输出反馈镇定问题得到了广泛的关注, 如文献[1~5]. 在非线性系统, 由于缺少系统的观测器设计理论及分离设计原则不再成立, 如何利用输出反馈实现系统镇定就是一个困难的问题. 一个解决方法是在半全局镇定意义上重建非线性系统的分离原则, 这样实现的是系统的半局镇定, 如文献[6, 7]; 另一个方法则是利用非分离设计原则, 直接建立系统的输出反馈控制, 如文献[4, 5]. 本文延续文献[3, 4, 8]的工作, 研究一类具有不确定输入动态非线性系统的输出反馈鲁棒镇定问题.

研究系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + f_1(t, x), \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} = x_n + f_{n-1}(t, x), \\ \dot{x}_n = v + f_n(t, x), \\ y = x_1, \\ \dot{\xi} = A(\xi) + bu, \\ v = c(\xi) + u, \end{cases} \quad (1)$$

这里 $z \in \mathbb{R}^r$, $x = (x_1, \dots, x_n)^T$, $x_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$ 是系统状态, $u \in \mathbb{R}$ 是控制输入, $y \in \mathbb{R}$ 是系统输出, f, p, f_i, p_i , $i = 1, \dots, n$ 均为连续函数并且满足 $f(t, 0, 0) = 0, f_i(t, 0, 0) = 0$. ξ 子系统

$$\begin{cases} \dot{\xi} = A(\xi) + bu, \\ v = c(\xi) + u, \end{cases} \quad (2)$$

是这个系统的不确定输入动态, 其中 $\xi \in \mathbb{R}^p$, $u \in \mathbb{R}$, $A(\xi)$, $c(\xi)$ 是未知连续函数, $b \in \mathbb{R}^p$ 是未知常向量. 显然这个系统是零相对阶的. 具有不确定输入动态的非线性系统具有广泛的背景, 例如具有执行部件 (Actuator) 的系统由于系统的建模误差或状态量的不可测都会产生这种类型的系统, 这样系统的鲁棒镇定问题一直受到广泛的关注^[3,8,9].

本文假设系统(1)满足如下假设:

假设 1 存在实数 $\lambda > 0$, 使得任意 $i = 1, \dots, n$,
 $|f_i(t, x, u)| \leq \lambda(|x_1| + \dots + |x_i|)$; (3)

(其中 $|\cdot|$ 表示向量的 Euclidean 范数).

为限制不确定输入动态(2)的可允许范围, 对其提出如下可允许条件:

A1) 存在已知正实数 K , 使得 $|b| \leq K$;

A2) 存在已知正实数 $\bar{c}$, 使得 $|c(\xi)| \leq \bar{c}|\xi|$;

A3) ξ -子系统的零动态

$$\dot{\xi} = A(\xi) - bc(\xi) = A_0(\xi)$$

满足: 以 d_1, d_2 为输入的系统

$$\dot{\zeta} = A_0(\zeta + d_1) + d_2,$$

存在光滑的径向无界正定函数 $\bar{V}(\zeta)$ 和正实数 α , α_1 , 使得

$$\frac{\partial \bar{V}}{\partial \zeta}(A_0(\zeta + d_1) + d_2) \leq \alpha_1 |(\bar{d}_1^T, \bar{d}_2^T)^T|^2 - \alpha |\zeta|^2.$$

可允许条件 A1) ~ A3) 与文献[3,8]是相同的, 它们表明, 系统的不确定输入动态是零相对阶最小相位的.

本文的问题就是在系统(1)满足假设 1, 不确定输入动态满足 A1) ~ A3) 的条件下, 设计的输出反馈控制器

$$\dot{\chi} = \vartheta(\chi, y), \quad u = \bar{\omega}(\chi, y) \quad (4)$$

满足 $\vartheta(0, 0) = 0, \bar{\omega}(0, 0) = 0$, 使闭环系统(1) ~ (4)的全局指数渐近稳定.

2 主要结论(Main results)

引理 1 考虑系统

$$\begin{cases} \dot{e} = LA(\kappa)e + \bar{F}(L, e, \tilde{x}, \bar{\xi}), \\ \dot{\tilde{x}} = L\bar{D}\tilde{x} + LC(\kappa)e, \\ \dot{\bar{\xi}} = \bar{A}(L, \bar{\xi}, e, \tilde{x}). \end{cases} \quad (5)$$

这里 $e \in \mathbb{R}^n, \tilde{x} \in \mathbb{R}^n, \bar{\xi} \in \mathbb{R}^p$. 假设系统满足:

1) $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 是 Hurwitz 矩阵并且对任意 $\kappa > 0$, $A(\kappa) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 是 Hurwitz 矩阵;

2) $\lim_{\kappa \rightarrow 0} \|C(\kappa)\| = 0$;

3) 存在 $\mu_1 > 0$, 使得对任意 $L \geq 1$,

$$|\bar{F}(L, e, \tilde{x}, \bar{\xi})| \leq \mu_1(|e| + |\tilde{x}| + L^{-(n-1)}|\bar{\xi}|);$$

4) 存在 $\mu_2 > 0$ 及正定径向无界 Lyapunov 函数 $\bar{V}(\bar{\xi})$, 使得

$$\frac{\partial \bar{V}}{\partial \bar{\xi}} \bar{A}(L, \bar{\xi}, e, \tilde{x}) \leq \mu_2 L^{2(n-1)}(|e|^2 + |\tilde{x}|^2) - |\bar{\xi}|^2.$$

则存在 $\bar{L}, \bar{\kappa}$, 使得当 $L = \bar{L}, \kappa = \bar{\kappa}$ 时, 系统(5)是全局指数渐近稳定的.

证 由 $A(\kappa)$ 是稳定矩阵, 存在正定矩阵 $P(\kappa)$ 使得 $P(\kappa)A(\kappa) + A^T(\kappa)P(\kappa) = -I$; 由 D 为稳定阵, 存在正定阵 Q , 使得

$$QD + D^T Q = -I.$$

构造

$$V(e, \tilde{x}, \bar{\xi}) =$$

$$V_1(e) + V_2(\tilde{x}) + \frac{1}{L^{2(n-1)}}[\mu_1 \|P(\kappa)\| + 1]\bar{V}(\bar{\xi}),$$

这里用 $\|\cdot\|$ 表示矩阵的 Frobenius 范数. 计算 $V(e, \tilde{x}, \bar{\xi})$ 沿系统(5)的方向导数, 得

$$\dot{V}(e, \tilde{x}, \bar{\xi}) \leq -\frac{1}{L^{2(n-1)}}|\bar{\xi}|^2 -$$

$$[(1 - \|QC(\kappa)\|)L - 4\mu_1 \|P(\kappa)\| - \mu_2]|\tilde{x}|^2 -$$

$$[(1 - \|QC(\kappa)\|)L - \mu_1 \|P(\kappa)\| - \mu_2]|e|^2,$$

由条件 2), 可选取 $\kappa = \kappa_0$ 使得

$$\|QC(\kappa_0)\| \leq \|Q\| \|C(\kappa_0)\| \leq \frac{1}{2},$$

令

$$L(\kappa_0) = 2(4\mu_1 \|P(\kappa)\| + \mu_2 + 1),$$

当 $L \geq L(\kappa_0)$ 时, 便有

$$\dot{V}(e, \tilde{x}, \bar{\xi}) \leq -\frac{1}{L^{2(n-1)}}|\bar{\xi}|^2 - |e|^2 - |\tilde{x}|^2.$$

证毕^[10].

从证明中看到, 确定 κ 的目的是为了抑制因子 $\|Q\|$, 只有这样才能选取充分大的 L 使 $\dot{V}$ 负定.

研究系统的动态输出反馈控制问题, 首先要设计系统状态观测器. 与已有文献[1,4]不同, 本文对系统(1)引入了具有两个设计参数 L 和 κ 的状态观测器

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}_1 = \tilde{x}_2 + La_1 \kappa (y - \tilde{x}_1), \\ \vdots \\ \dot{\tilde{x}}_{n-1} = \tilde{x}_n + L^{n-1} a_{n-1} \kappa^{n-1} (y - \tilde{x}_1), \\ \dot{\tilde{x}}_n = u + L^n a_n \kappa^n (y - \tilde{x}_1), \end{cases} \quad (6)$$

这里 $a_1, \dots, a_n$ 是一个 Hurwitz 多项式系数, 即使多项式 $p(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n$ 的根全部具有负实部, $L \geq 1$ 即是通常的高增益参数, $\kappa > 0$ 为这里引入新的设计参数. 如同引理 1, κ 和 L 有各自的设计目的.

定理 2 假设系统(1)满足假设 1, 不确定输入

动态满足假设 A1) ~ A3), 则存在线性的输出反馈控制器(4)使闭环系统(1) ~ (4)的全局指数渐近稳定.

证 将原系统改写为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + f_1(t, x), \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} = x_n + f_{n-1}(t, x), \\ \dot{x}_n = c(\xi) + u + f_n(t, x), \\ \dot{\xi} = A(\xi) + bu. \end{cases} \quad (7)$$

对系统作变换 $\tilde{\xi} = \xi - bx_n$, 得

$$\dot{\tilde{\xi}} = A_0(\tilde{\xi} + bx_n) - bf_n(t, z, x). \quad (8)$$

对系统(6),(7)进行非奇异的线性变换

$$e_i = \frac{x_i - \tilde{x}_i}{L^{i-1}}, \quad \tilde{x}_i = \frac{\tilde{x}_i}{L^{i-1}}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (9)$$

这里 L 与式(6)中的 L 相同, 系统变为

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = Le_2 - La_1\kappa e_1 + f_1(t, x), \\ \vdots \\ \dot{e}_n = -La_n\kappa^n e_1 + L^{-(n-1)}c(\tilde{\xi} + bx_n) + L^{-(n-1)}f_n(t, x), \\ \dot{\tilde{x}}_1 = L\tilde{x}_2 + La_1\kappa e_1, \\ \vdots \\ \dot{\tilde{x}}_n = \frac{1}{L^{n-1}}u + La_n\kappa^n e_1, \\ \dot{\tilde{\xi}} = A_0(\tilde{\xi} + bx_n) - bf_n(t, x). \end{cases} \quad (10)$$

进一步, 把系统(10)写成

$$\begin{cases} \dot{e} = LA(\kappa)e + L^{-(n-1)}Gc(\tilde{\xi} + L^{n-1}b(e_n + \tilde{x}_n)) + F, \\ \dot{\tilde{x}} = LB\tilde{x} + L^{-(n-1)}Gu + LC(\kappa)e, \\ \dot{\tilde{\xi}} = A_0(\tilde{\xi} + L^{n-1}b(e_n + \tilde{x}_n)) - L^{n-1}bG^T F. \end{cases} \quad (11)$$

其中

$$\begin{aligned} A(\kappa) &= \begin{pmatrix} -a_1\kappa & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & I & & \\ -a_{n-1}\kappa^{n-1} & & & & \\ & & & & \\ -a_n\kappa^n & 0 & \dots & 0 & \end{pmatrix}, \\ B &= \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & & I & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ C(\kappa) &= \begin{pmatrix} a_1\kappa & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_2\kappa^2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \dots & \\ a_n\kappa^n & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$F = \begin{pmatrix} f_1(t, e_1 + \tilde{x}_1, \dots, L^{n-1}(e_n + \tilde{x}_n)) \\ L^{-1}f_2(t, e_1 + \tilde{x}_1, \dots, L^{n-1}(e_n + \tilde{x}_n)) \\ \vdots \\ L^{-(n-1)}f_n(t, e_1 + \tilde{x}_1, \dots, L^{n-1}(e_n + \tilde{x}_n)) \end{pmatrix}.$$

选取 $b_n, b_{n-1}, \dots, b_1$ 是一个 Hurwitz 多项式的系数, 即使多项式 $q(\lambda) = \lambda^n + b_n\lambda^{n-1} + \dots + b_2\lambda + b_1$ 的根全部具有负实部. 构造如下形式的反馈控制器

$$u = -L^n(b_1\tilde{x}_1 + b_2\tilde{x}_2 + \dots + b_n\tilde{x}_n). \quad (12)$$

闭环系统(10) ~ (12)最终可以表示为

$$\begin{cases} \dot{e} = LA(\kappa)e + L^{-(n-1)}Gc(\tilde{\xi} + L^{n-1}b(e_n + \tilde{x}_n)) + F, \\ \dot{\tilde{x}} = LD\tilde{x} + LC(\kappa)e, \\ \dot{\tilde{\xi}} = A_0(\tilde{\xi} + L^{n-1}b(e_n + \tilde{x}_n)) - L^{n-1}bG^T F. \end{cases} \quad (13)$$

其中

$$D = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ \vdots & & I & \\ 0 & & & \\ -b_1 & -b_2 & \dots & -b_n \end{pmatrix}.$$

可以证明系统(13)满足引理 1 条件, 由引理 1 证得结论. 证毕.

比较式(6)和(12)看到, 出现在观测器中的反馈增益和控制器中的反馈增益是不同的, 一个是 κL , 一个是 L , 而在文献[4,7]中, 两者是相同的.

4 算例与仿真(Simulation example)

为了与利用反传方法进行的控制设计对比, 重新计算文献[4]中的例子.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + x_1 \sin x_2^2, \\ \dot{x}_2 = u + x_1^{2/3} x_2^{1/3}. \end{cases} \quad (14)$$

选取

$$a_1 = a_2 = \frac{1}{2}, \quad b_1 = 5, \quad b_2 = \frac{25}{4},$$

经定理所述的步骤, 可得闭环系统

$$\begin{cases} \dot{e} = LA(\kappa)e + F, \\ \dot{\tilde{x}} = LB\tilde{x} + LC(\kappa)e. \end{cases} \quad (15)$$

Lyapunov 方程

$$P(\kappa)A(\kappa) + A^T(\kappa)P(\kappa) = -I,$$

$$QB + B^TQ = -I$$

的解分别为

$$P(\kappa) = \begin{pmatrix} \frac{\kappa^2 + 2}{2\kappa} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3\kappa^2 + 4}{2\kappa^3} \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} \frac{221}{200} & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{10} & \frac{12}{125} \end{pmatrix}.$$

进一步解出 $\kappa_0 = 0.7243$, $\|P(\kappa_0)\| = 7.5716$, 得

$L(\kappa_0) = 64.57290644$. 取初值

$x_1(0) = 5, x_2(0) = 50, \bar{x}_1(0) = 1, \bar{x}_2(0) = -200$,

作出的数值仿真如图 1, 2 所示.

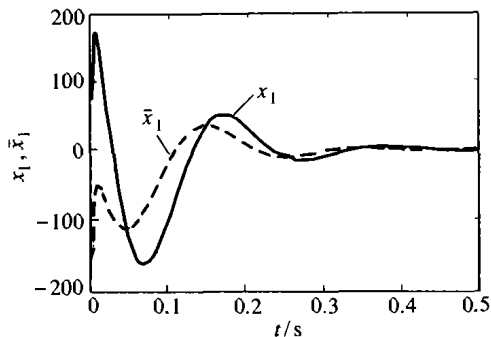


图 1 状态 x_1 和 $\bar{x}_1$ 的轨迹
Fig. 1 Trajectories of x_1 and $\bar{x}_1$

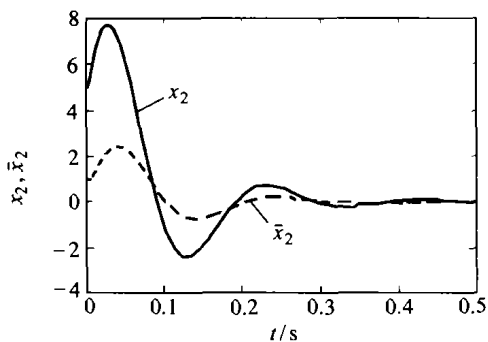


图 2 状态 x_2 和 $\bar{x}_2$ 的轨迹
Fig. 2 Trajectories of x_2 and $\bar{x}_2$

引入新的设计参数 κ , 可以用代数方法直接计算增益参数, 而已有的方法则是使用反传设计 (Backstepping) 经递归步骤确定. 本文的设计方法直接简明, 较少的中间步骤也保证我们可以获得比较小的高增益, 对上面的例子, 文献[4]用反传方法获得的增益为 $L = 100$, 而我们方法得到的增益为 $L = 65$, 出现在观测系统中的增益更低 ($\kappa L = 47$).

5 结束语 (Conclusions)

本文研究了一类具有零相对阶最小相位不确定输入动态且满足线性增长条件的非线性系统的鲁棒镇定问题, 借助具有两个设计参数的高增益观测器, 构造了系统的鲁棒补偿器, 实现了系统的全局鲁棒

镇定. 新设计参数的引入改进了高增益控制器的设计方法.

参考文献 (References):

- [1] ISIDORI A. *Nonlinear Control Systems* [M]. 3rd ed London, U.K.: Springer-Verlag, 1995.
- [2] JIANG Z P, MAREELS M Y. Output feedback global stabilization for a class of nonlinear systems with unmodeled dynamics [J]. *European Journal of Control*, 1996, 2(3): 201 - 210.
- [3] JIANG Z P, ARCAK M. Robust global stabilization with input unmodeled dynamics: an ISS small gain approach [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2001, 46(9): 1411 - 1415.
- [4] QIAN C J, LIN W. Output feedback control of a class of: a nonseparation principle paradigm [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2002, 47(10): 1710 - 1715.
- [5] PRALY L. Asymptotic stabilization via output feedback for lower triangular systems with output dependent incremental rate [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2003, 48(6): 1103 - 1108.
- [6] ATASSI A N, KHALIL H K. A separation principle for the stabilization of a class of nonlinear systems [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1999, 44(9): 1672 - 1687.
- [7] TEEL A, PRALY L. Tools for semiglobal stabilization by partial state and output feedback [J]. *SIAM J of Control Optimiziation*, 1995, 33(5): 1443 - 1488.
- [8] ARCAK M, KOKOTOVIC P. Robust nonlinear control of systems with input unmodeled dynamics [J]. *Systems and Control Letters*, 2000, 41(2): 115 - 122.
- [9] HAMZI B, PRALY L. Ignored input dynamics and a new characterization of control Lyapunov functions [J]. *Automatica*, 2001, 37(6): 831 - 841.
- [10] 黄琳. 稳定性理论 [M]. 北京: 北京大学出版社, 1992. (HUANG Lin. *Stability Theory* [M]. Beijing: Peking University Press, 1992.)

作者简介:

王兴平 (1962—), 男, 海军航空工程学院教员, 博士, 研究方向为非线性控制系统稳定性、非线性大系统控制, E-mail: wwwxpnm@sohu.com;

张金春 (1960—), 男, 海军航空工程学院教员, 研究方向为非线性系统辨识、非线性动力系统;

程兆林 (1939—), 男, 山东大学数学与系统科学学院教授, 博士生导师, 研究方向为奇异系统鲁棒控制、非线性系统鲁棒控制.