文章编号：1000-8152(2005)03-0511-04

时变系统的统一和通用的最优噪声估值器

盛 梅，邹 云
（南京理工大学 自动化系，江苏 南京 210094）

摘要：对于带相邻及同一时刻相关噪声的时变系统，基于Kalman滤波理论提出了统一和通用的最优噪声估值器，包括观测噪声估值器和输入噪声估值器，提出了统一和通用的固定点和固定区间的最优噪声平滑器，它们为解决状态和信号估计问题提供了新的工具．一个仿真算例说明了其有效性．

关键词：噪声估值器；平滑器；Kalman滤波

中图分类号：O211.64　　**文献标识码**：A

Unifying and universal optimal noise estimators for time-varying systems

SHENG Mei, ZOU Yun
(Department of Automation, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing Jiangsu 210094, China)

Abstract: Unifying and universal optimal noise estimators are presented for the time-varying systems with the correlated noise both at the same time and the next time, including the measurement noise estimators and input noise estimators. Unifying fixed-point and fixed interval optimal noise smoothers are also presented. They provide a new tool in solving the problems of the state and signal estimators. A simulation example is given to show the effectiveness of those estimators.

Key words: noise estimator; smoother; Kalman filter

1 引言(Introduction)

噪声估计问题在石油地震勘探，通信，信号处理等领域有着广泛应用．Mendel在文献[1]中给出了时变系统的最优输入白噪声估值器，文献[2]中给出了带相关噪声时变系统的输入白噪声估值器，但二者均未给出观测噪声估值器．文献[3]中给出了带相关噪声时变系统的最优输入和观测白噪声估值器．但观测噪声和输入噪声仅在相同时刻相关．本文基于文献[4]中Kalman滤波器，给出了观测噪声和输入噪声在相邻时刻和同时刻均相关，且输入噪声在相邻时刻自相关的时变系统的观测噪声和输入噪声估值器，它为解决状态和信号最优滤波问题提供了新的工具．

2 系统模型(System models)

考虑带相关噪声的离散时变随机系统

$$\begin{cases} x(t+1) = A(t)x(t) + w(t), & (1)\\ y(t) = H(t)x(t) + v(t). & (2)\end{cases}$$

其中：t 为离散时间；状态 $x(t) \in \mathbb{R}^n$；观测 $y(t) \in \mathbb{R}^m$；输入噪声 $w(t) \in \mathbb{R}^r$；观测噪声 $v(t) \in \mathbb{R}^m$；$A(t), H(t)$ 为适当维数的已知时变阵．

假设1　$w(t), v(t)$ 为零均值噪声，满足

$$\mathrm{E}\left\{\begin{bmatrix} w(t)\\ v(t)\end{bmatrix}\begin{bmatrix} w^{\mathrm{T}}(t) & v^{\mathrm{T}}(t)\end{bmatrix}\right\} = \begin{bmatrix} Q(t) & \Pi(t)\\ \Pi^{\mathrm{T}}(t) & R(t)\end{bmatrix}, \tag{3}$$

$$\mathrm{E}\{w(t-1)[w^{\mathrm{T}}(t) \quad v^{\mathrm{T}}(t)]\} = [\Gamma(n-1) \quad G(n-1)]. \tag{4}$$

其中：E为均值号；T为转置号；$R(t) > 0$，其他时刻 $v(t)$ 与 $w(t)$ 互不相关，即

$$\mathrm{E}\{w(t)[w^{\mathrm{T}}(t+j) \quad v^{\mathrm{T}}(t+k)]\} = [0 \quad 0],$$
$$j = 2,3,\cdots,\ k = -1, \pm 2, \pm 3, \cdots;$$
$$\mathrm{E}[v(t)v^{\mathrm{T}}(m)] = 0,\ t \neq m.$$

假设2　$x(0), x(0|-1)$ 不相关，且不相关于 $w(t)$ 及 $v(t)$，具均值 μ_0, μ_{-1}，方差阵 P_0，$P(0|-1)$．

最优噪声估计问题为：基于观测 $\{y(t+N), \cdots, y(1)\}$，求观测噪声 $v(t)$ 和输入噪声 $w(t)$ 的线性最小方差估值器 $\hat{v}(t|t+N)$ 和 $\hat{w}(t|t+N)$，统一记为 $\hat{\vartheta}(t|t+N)$，$\vartheta = v, w$，对 $N = 0, N > 0$ 或 $N <$

收稿日期：2003-05-04；收修改稿日期：2004-09-29．
基金项目：国家自然科学基金资助项目(60474078)．

0,分别称为最优噪声滤波器,平滑器或预报器.

文中基于系统(1),(2)的 Kalman 滤波器为[4]

$$\hat{x}(t)=\hat{x}(t|t-1)+k(t)[y(t)-H(t)\hat{x}(t|t-1)]; \tag{5}$$

$$\hat{x}(t|t-1)= A(t-1)\hat{x}(t-1)+k_1(t-1)\cdot [y(t-1)-H(t-1)\hat{x}(t-1|t-2]; \tag{6}$$

$$k(t)=[P(t|t-1)H^{\mathrm{T}}(t)+G(t-1)]R_1^{-1}(t); \tag{7}$$

$$k_1(t-1)=[\Gamma^{\mathrm{T}}(t-2)H^{\mathrm{T}}(t-1)+\Pi(t-1)]\cdot R_1^{-1}(t-1); \tag{8}$$

$$P(t)= [I-k(t)H(t)]P(t|t-1)[I-k(t)H(t)]^{\mathrm{T}}+ k(t)R(t)k^{\mathrm{T}}(t)-[I-k(t)H(t)]G(t-1)k^{\mathrm{T}}(t)- k(t)G^{\mathrm{T}}(t-1)[I-k(t)H(t)]^{\mathrm{T}}; \tag{9}$$

$$P(t|t-1)= A(t-1)P(t-1)A^{\mathrm{T}}(t-1)+Q(t-1)+ k_1(t-1)R_1(t-1)k_1^{\mathrm{T}}(t-1)+D(t-1)+D^{\mathrm{T}}(t-1); \tag{10}$$

$$D(t-1)= A(t-1)[I-k(t-1)H(t-1)]\cdot \Gamma(t-1)-A(t-1)k(t-1)\Pi^{\mathrm{T}}(t-1)- k_1(t-1)H(t-1)\Gamma(t-2)-k_1(t-1)\cdot\Pi^{\mathrm{T}}(t-1); \tag{11}$$

$$R_1(t-1)= H(t)P(t|t-1)H^{\mathrm{T}}(t)+H(t)\cdot G(t-1)+ G^{\mathrm{T}}(t-1)H^{\mathrm{T}}(t)+R(t); \tag{12}$$

$$\varepsilon(t)=y(t)-H(t)\hat{x}(t|t-1); \tag{13}$$

带初始值 $\hat{x}(0),\hat{x}(0|-1),P(0),P(0|-1)$, 新息 $\varepsilon(t)$ 的方差

$$Q_\varepsilon(t)=H(t)P(u|t-1)H^{\mathrm{T}}(t)+R(t)+ H(t)G(t-1)+G^{\mathrm{T}}(t-1)H^{\mathrm{T}}(t). \tag{14}$$

3 统一的最优噪声估值器(Unifying optimal noise estimators)

定理 1 带相关噪声时变系统(1),(2)在假设1,2下有固定点最优噪声估值器

$$\hat{\vartheta}(t|t+N)=0,\ N<0. \tag{15}$$

$$\hat{\vartheta}(t|t+N)= \hat{\vartheta}(t|t+N-1)+M_\vartheta(t|t+N)\varepsilon(t+N). \tag{16}$$

其中: $\vartheta=v,w,\ N=0,1,2,\cdots$, 且定义

$$M_v(t|t)=G_1(t)Q_\varepsilon^{-1}(t), \tag{17}$$

$$M_w(t|t)=\Gamma_1(t)Q_\varepsilon^{-1}(t), \tag{18}$$

$$M_v(t|t+1)= [G^{\mathrm{T}}(t-1)A^{\mathrm{T}}(t)+\Pi^{\mathrm{T}}(t)- G_1(t)k_2^{\mathrm{T}}(t)]H^{\mathrm{T}}(t+1)Q_\varepsilon^{-1}(t+1), \tag{19}$$

$$M_w(t|t+1)= \{[\Gamma^{\mathrm{T}}(t-1)A^{\mathrm{T}}(t)+Q(t)- \Gamma_1(t)k_2^{\mathrm{T}}(t)]H^{\mathrm{T}}(t+1)+G(t)\}Q_\varepsilon^{-1}(t+1), \tag{20}$$

$$M_\vartheta(t|t+N)= D_\vartheta(t,2)\Phi^{\mathrm{T}}(t+N,t+2)\cdot H^{\mathrm{T}}(t+N)Q_\varepsilon^{-1}(t+N),\ N\geqslant 2, \tag{21}$$

$$D_v(t,2)= [G^{\mathrm{T}}(t-1)\varphi(t)+\Pi^{\mathrm{T}}(t)- R(t)k_2^{\mathrm{T}}(t)]\varphi(t+1), \tag{22}$$

$$D_w(t,2)= \Gamma^{\mathrm{T}}(t-1)\varphi(t)\varphi(t+1)+ [Q(t)-\Pi(t)k_2^{\mathrm{T}}(t)]\varphi(t+1)+ \Gamma(t)-G(t)k_2^{\mathrm{T}}(t+1). \tag{23}$$

其中

$$G_1(t)=R(t)+G^{\mathrm{T}}(t-1)H^{\mathrm{T}}(t),$$
$$\Gamma_1(t)=\Gamma^{\mathrm{T}}(t-1)H^{\mathrm{T}}(t)+\Pi(t),$$
$$k_2(t)=A(t)k(t)+k_1(t),$$
$$\varphi(t)=[A(t)-k_2(t)H(t)]^{\mathrm{T}},$$
$$\Phi(t+N,t+N)=I_n,$$
$$\Phi(t+N,i)=\varphi^{\mathrm{T}}(t+N-1)\cdot \varphi^{\mathrm{T}}(t+N-2)\cdots\varphi^{\mathrm{T}}(i),\ i<t+N.$$

估值误差方差阵为

$$P_v(t|t+N)=R(t), \tag{24}$$

$$P_w(t|t+N)=Q(t),\ N<0, \tag{25}$$

$$P_\vartheta(t|t+N)=P_\vartheta(t|t+N-1)- M_\vartheta(t|t+N)Q_\varepsilon(t+N)M_\vartheta^{\mathrm{T}}(t|t+N). \tag{26}$$

证 设 S_n 为由 $\{y(1),\cdots,y(n)\}$ 张成的线性流形,则由假设有

$$w(n)\perp S_{n-1},\ v(n)\perp S_{n-1},\quad \varepsilon(n)\perp S_{n-1},\ \varepsilon(n)\in S_n \tag{27}$$

由式(27)即得式(15)成立,由射影定理(16)式成立,且有

$$\hat{v}(t|t)=\hat{v}(t|t-1)+\mathrm{E}[v(t)\varepsilon^{\mathrm{T}}(t)]\cdot Q_\varepsilon^{-1}(t)\varepsilon(t), \tag{28}$$

$$\hat{w}(t|t)=\hat{w}(t|t-1)+\mathrm{E}[w(t)\varepsilon^{\mathrm{T}}(t)]\cdot Q_\varepsilon^{-1}(t)\varepsilon(t), \tag{29}$$

由式(13),(28),(29)得式(17),(18)成立,

$$\hat{v}(t|t+1)=\hat{v}(t|t)+\mathrm{E}[v(t)\varepsilon^{\mathrm{T}}(t+1)]\cdot Q_\varepsilon^{-1}(t+1)\varepsilon(t+1),\tag{30}$$

$$\hat{w}(t|t+1)=\hat{w}(t|t)+\mathrm{E}[w(t)\varepsilon^{\mathrm{T}}(t+1)]\cdot Q_\varepsilon^{-1}(t+1)\varepsilon(t+1).\tag{31}$$

由式(5),(6)得

$$\tilde{x}(t+1|t)=\varphi^{\mathrm{T}}(t)\tilde{x}(t|t-1)+w(t)-k_2(t)v(t).\tag{32}$$

由式(13),(30),(31),(32)得式(19),(20),将式(32)迭代,得预测误差

$$\tilde{x}(t+N|t+N-1)=\Phi(t+N,t)\tilde{x}(t|t-1)+\sum_{i=t+1}^{t+N}\Phi(t+N,i)[w(i-1)-k_2(i-1)v(i-1)].\tag{33}$$

由式(13),(33)得式(21),(22),(23)成立.

证毕.

推论1　系统(1),(2)在假设条件下有最优噪声滤波器

$$\hat{v}(t|t)=G_1(t)Q_\varepsilon^{-1}(t)\varepsilon(t),\tag{34}$$

$$\hat{w}(t|t)=\Gamma_1(t)Q_\varepsilon^{-1}(t)\varepsilon(t),\tag{35}$$

推论2　系统(1),(2)在假设条件下有非递推最优噪声估值器

$$\begin{cases}\hat{\vartheta}(t|t+N),\ \vartheta=w,v,\\ \hat{\vartheta}(t|t+N)=\sum_{i=0}^{N}M_\vartheta(t|t+i)\varepsilon(t+i).\end{cases}\tag{36}$$

推论3　$M_\vartheta(t|t+N)$ 可递推计算为

$$M_\vartheta(t|t+N)=D_\vartheta(t,N)H^{\mathrm{T}}(t+N)Q_\varepsilon^{-1}(t+N),\tag{37}$$

$$D_\vartheta(t,j)=D_\vartheta(t,j-1)\varphi(t+j-1).\tag{38}$$

其中 $j=3,4,\cdots,N$.

定理2　带相关噪声时变系统(1),(2)在假设条件下最优固定区间噪声平滑器为

$$\hat{\vartheta}(t|N)=\hat{\vartheta}(t|t)+M_\vartheta(t|t+1)\cdot\varepsilon(t+1)+D_\vartheta(t,2)r(t+2|N).\tag{39}$$

其中:$\vartheta=w,v$; $t=N-2,\cdots,1$,且有反向递推式

$$r(t+2|N)=\varphi(t+2)r(t+3|N)+H^{\mathrm{T}}(t+2)Q_\varepsilon^{-1}(t+2)\varepsilon(t+2).\tag{40}$$

带初值

$$r(N+1|N)=0,$$

$$\varphi(t+1)=[A(t+1)-k_2(t+1)H(t+1)]^{\mathrm{T}},$$

平滑误差方差阵为

$$P_\vartheta(t|N)=P_\vartheta(t|t)-M_\vartheta(t|t+1)Q_\varepsilon(t+1)M_\vartheta^{\mathrm{T}}(t|t+1)-D_\vartheta(t,2)S(t+2|N)D_\vartheta^{\mathrm{T}}(t,2),\tag{41}$$

$$S(t+2|N)=\varphi(t+2)S(t+3|N)\varphi^{\mathrm{T}}(t+2)+H^{\mathrm{T}}(t+2)Q_\varepsilon^{-1}(t+2)H(t+2),\tag{42}$$

$D_\vartheta(t,2)$ 满足式(22),(23),带初值 $S(N+1|N)=0$.

证　由式(36)得

$$\hat{\vartheta}(N-2|N)=\hat{\vartheta}(N-2|N-2)+M_\vartheta(N-2|N-1)\varepsilon(N-1)+D_\vartheta(N-2,2)\Gamma(N|N),$$

即式(39)成立.由式(21),(36)

$$\hat{\vartheta}(t|N)=\hat{\vartheta}(t|t)+M_\vartheta(t|t+1)\varepsilon(t+1)+D_\vartheta(t,2)\{H^{\mathrm{T}}(t+2)Q_\varepsilon^{-1}(t+2)\varepsilon(t+2)+\varphi(t+2)[\sum_{k=t+3}^{N}\Phi^{\mathrm{T}}(k,t+3)H^{\mathrm{T}}(k)Q_\varepsilon^{-1}(k)\varepsilon(k)]\},$$

令

$$r(t+2|N)=\varphi(t+2)[\sum_{k=t+3}^{N}\Phi^{\mathrm{T}}(k,t+3)H^{\mathrm{T}}(k)\cdot Q_\varepsilon^{-1}(k)\varepsilon(k)]+H^{\mathrm{T}}(t+2)\cdot Q_\varepsilon^{-1}(t+2)\varepsilon(t+2),$$

则式(39)成立,

$$\sum_{k=t+3}^{N}\Phi^{\mathrm{T}}(k,t+3)H^{\mathrm{T}}(k)Q_\varepsilon^{-1}(k)\varepsilon(k)=H^{\mathrm{T}}(t+3)Q_\varepsilon^{-1}(k+3)\varepsilon(k+3)+\varphi(t+3)\cdot[\sum_{k=t+4}^{N}\Phi^{\mathrm{T}}(k,t+4)H^{\mathrm{T}}(k)Q_\varepsilon^{-1}(k)\varepsilon(k)]=r(t+3|N)$$

故式(40)成立,由式(39),

$$\tilde{\vartheta}(t|N)+D_\vartheta(t,2)r(t+2|N)=\tilde{\vartheta}(t|t+1).\tag{43}$$

$r(t+2|N)$ 为 $\varepsilon(t+2),\cdots,\varepsilon(N)$ 的线性组合,故 $r(t+2|N)\perp\tilde{\vartheta}(t|N)$,

由式(43)求方差阵得式(41),类似地推出式(42),由式(40)同时考虑到 $r(t+3|N)$ 为 $\varepsilon(t+3),\cdots,\varepsilon(N)$的线性组合,故 $r(t+3|N)\perp\varepsilon(t+2)$,则式(42)成立.　证毕.

4　仿真例子(Simulation example)

考虑时变系统

$$x(t+1)=\begin{bmatrix}0.8 & 0\\ 0.5+\sin\frac{2\pi t}{300} & 0\end{bmatrix}x(t)+w(t),\tag{44}$$

$$y(t) = [0 \quad 1 + 0.2\cos\frac{2\pi t}{300}]x(t) + v(t), \tag{45}$$

$w(t), v(t)$ 为满足式(3),(4)的噪声,

$$w(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}[v_1(t) + v_1(t+1)],$$

$$v(t) = v_1(t) + v_2(t).$$

其中 $v_1(t), v_2(t)$ 为相互独立的正态白噪声. 取 $N = 2$, 用定理1所得的噪声平滑器 $\hat{w}(t \mid t+2)$ 和 $\hat{v}(t \mid t+2)$ 的结果如图1和图2所示,其中实线端点纵标为真值 $\vartheta(t)$,圆实点纵标为平滑估值 $\hat{\vartheta}(t \mid t+2)$, $\vartheta = w, v$. 可看到它们有一定的精度.

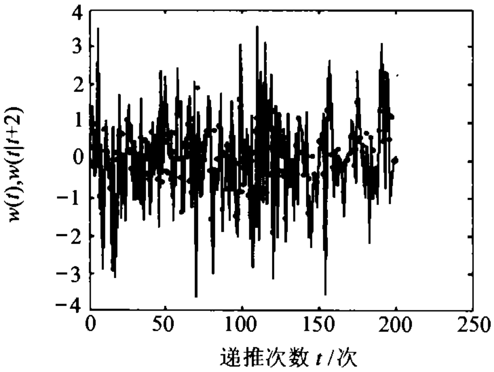

图1 输入噪声 $w(t)$ 与最优平滑器 $w(t \mid t+2)$ 的一维分量

Fig. 1 Component of input noise $w(t)$ and optimal smoother $w(t \mid t+2)$

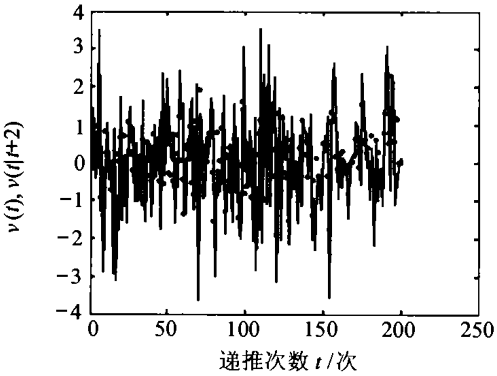

图2 观测噪声 $v(t)$ 与最优平滑器 $v(t \mid t+2)$

Fig. 2 Measurement noise $v(t)$ and optimal smoother $v(t \mid t+2)$

5 结论(Conclusions)

本文基于Kalman滤波理论,提出了带在相邻时刻和同时刻都相关的噪声的时变系统的观测噪声和输入噪声的固定点和固定区间的最优噪声估值器和平滑器,形成了统一和通用的最优噪声估计理论,为状态和信号的最优滤波问题提供了新的工具.

参考文献(References):

[1] MENDEL J M. White-noise estimators for seismic data processing in oil exploration [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1977, 22(5): 694 - 706.

[2] 秦超英,戴冠中.估计动态系统的平滑算法[J].控制理论与应用,1993,10(2):205 - 211.
(QIN Chaoying, DAI Guanzhong. The smoothing algorithm of dynamic noise estimation [J]. *Control Theory & Applications*, 1993, 10 (2):205 - 211.)

[3] 邓自立.时变系统的统一和通用的最优白噪声估值器[J].控制理论与应用,2003,20(1):142 - 146.
(DENG Zili. Unifying and universal optimal white noise estimators for time-varying systems [J]. *Control Theory & Applications*, 2003, 20(1):142 - 146.)

[4] 陈建国,师自强,王培德. Kalman滤波理论德推广[J].控制理论与应用,1990,7(3):107 - 113.
(CHEN Jianguo, SHI Ziqiang, WANG Peide. A generalzation of Kalman filtering theory [J]. *Control Theory & Applications*, 1990, 7 (3):107 - 113.)

[5] 郭尚来.随机控制[M].北京:清华大学出版社,2000.
(GUO Shanglai. *Stochastic Control* [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2000.)

作者简介:

盛 梅 (1970—),女,南京理工大学自动化系博士研究生,目前主要研究方向为随机系统的滤波问题与鲁棒控制, E-mail: mei-sheng@vip.163.com;

邹 云 (1962—),男,南京理工大学自动化系教授,目前主要研究方向为非线性控制、电力系统.