文章编号: 1000 - 8152(2005)04 - 0520 - 07

# Mamdani 模糊系统 I/O 关系的表示及隶属函数优化

唐少先[1], 陈建二[2], 张泰山[1]
(1.中南大学 信息科学与工程学院,湖南 长沙 410083; 2.德克萨斯州 A&M 大学计算机系,美国 德克萨斯州)

**摘要**: 探讨一类高效率 Mamdani 模糊系统隶属函数优化方法.首先通过严密的理论分析将 MISO(多输入单输出)-Mamdani 模糊系统的输入/输出函数表示成系统隶属函数的局部线性表达式;论证了这个表达式中系统隶属函数项的系数仅由该点所对应的 $2p$ 个隶属函数值,按大小排成的序列决定.以此为基础,提出了根据输入/输出样本集误差对系统隶属函数进行优化的新方法.该方法近似地将隶属函数优化问题转换成一组线性规划问题进行求解.本文提供的仿真结果也进一步证实了该方法的有效性.

**关键词**: Mamdani 模糊系统; 隶属函数; 模糊系统优化; 模糊推理
**中图分类号**: O22,C934　　　**文献标识码**: A

# Mamdani fuzzy system I/O relation representative and membership function optimization

TANG Shao-xian[1], CHEN Jian-er[2], ZHANG Tai-shan[1]
(1. Information Science and Engineering College, Central South University, Changsha Hunan 410083, China;
2. Computer Science Department, Texas A&M University, Texas, USA)

**Abstract**: An efficient method to optimize membership function of Mamdani fuzzy system is studied. Firstly, through strictly theoretical analysis the input/output function of a MISO(multi-input/single-output)-Mamdani fuzzy system can be represented as a local linear function of their membership functions. Next, every coefficient in the local linear function is proved to be solely determined by the sequence of the $2p$ values of the related membership arranged in the order of magnitudes. Based on this conclusion, a new method to optimize the membership function is presented in which the optimization problem is approximately transformed into a group of linear programming problems. The simulation results validate this method.

**Key words**: Mamdani fuzzy system; membership function; fuzzy system optimization; fuzzy reasoning

## 1 引言(Introduction)

Mamdani 模糊系统是一类基于语言规则的模糊系统.这类系统具备通用逼近器的性质,而且它们的模糊规则结构简明、具有突出的承载语言信息的能力,因而在决策支持、过程控制等领域具有重要的应用价值.近年来,在基于样本数据自动建立和优化模糊系统的形式化理论研究领域中,Mamdani 模糊系统[1~4]已经成为研究的重要对象之一.

本文讨论的对象是 Mamdani 模糊系统隶属函数的优化问题.目前解决该类问题的主要方法是遗传算法和模糊神经网络[1,4~6].尽管这些方法在应用中获得了许多成效,但它们的收敛速度和解的质量具有较多的不确定性(尤其当系统维数较高时),因而在实际应用中受到一定的局限.

Mamdani 模糊系统的输入-输出函数表达式是以模糊规则结论部分为中心展开的[1].尽管这种方法有许多有利的方面,但对于隶属函数的优化而言,难以将输入-输出关系与隶属函数的取值紧密地联系起来.本研究中,通过对 MISO Mamdani 模糊系统输入/输出过程的严密分析,得出了以系统隶属函数为中心的该类模糊系统的输入 - 输出函数展开式.并论证了论域中每一个点 $(x_1,\cdots,x_p)$ 的函数展开式中的系数仅由该点所对应的 $2p$ 个隶属函数值的顺序决定的结论.以此为基础,提出了根据输入-输出样本集误差分布状况对系统隶属函数进行优化的新方法.该方法的主要特点是将 MISO-Mamdani 模糊系统隶属函数局部优化问题近似地转换成一组线性规划问题进行求解.

收稿日期:2003 - 07 - 30; 收修改稿日期:2004 - 09 - 30.
基金项目:中国国家博士点基金资助项目(2000053303).

## 2 相关概念及隶属优化问题(Related concepts and membership function optimization problem)

### 2.1 模糊划分(Fuzzy partition)

本文所讨论的 MISO-Mamdani 模糊系统的论域 $D$ 是一个 $p$ 维超立方体

$$D = [d_1^0, d_1^1] \times [d_2^0, d_2^1] \times \cdots \times [d_p^0, d_p^1],$$

这样的模糊系统对应一个关于 $D$ 的模糊划分[1].

**定义 2.1**　对于论域 $D = [d_1^0, d_1^1] \times [d_2^0, d_2^1] \times \cdots \times [d_p^0, d_p^1]$, $d_i^0 < d_i^1, 1 \leqslant i \leqslant p$($d_i^0, d_i^1$ 都是实数). 对于区间$[d_i^0, d_i^1]$,选择正整数 $K_i$(一般情况下 $3 \leqslant K_i \leqslant 9$),选择划分点 $d_i^0 = b_i^1 <, \cdots, < b_i^{K_i} = d_i^1$,并选择模糊集 $H_i^{j_i} \in F([d_i^0, d_i^1])(1 \leqslant j_i \leqslant K_i, 1 \leqslant i \leqslant p)$ 满足当 $x \notin [b_i^{j-1}, b_i^{j+1}]$ 时 $H_i^{j_i}(x_i) = 0$;当 $x \in [b_i^{j-1}, b_i]$ 时 $H_i^j(x_i)$ 单调上升;当 $x \in [b_i^j, b_i^{j+1}]$ 时 $H_i^j(x_i)$ 单调下降. 则称 $D(K, B, H)$ 为对论域 $D$ 的一个划分. 其中

$$K = (K_1, \cdots, K_p),$$

$$B = \{b_i^{j_i} \mid i = 1,2,\cdots,p, j_i = 1,2,\cdots,K_i\},$$

$$H = \{H_i^{j_i} \| 1 \leqslant j_i, \leqslant K_i, 1 \leqslant i \leqslant p\}.$$

**定义 2.2**　对 $\forall x = (x_1, \cdots, x_p) \in D$,必定存在唯一的$(j_1(x_{1_1}), \cdots, j_p(x_p)), 1 \leqslant j_i(x_i) \leqslant K_i$, 使得

$$x_i \in [b_i^{j_i(x)}, b_i^{j_i(x)+1}],\ 1 \leqslant i \leqslant p.$$

令 $g(i, x) = j_i(x_i)$,则 $D$ 中的划分单元 $D_x$ 定义为

$$D_x = \{(z_1, \cdots, z_p) \in D \mid b_i^{g(i,x)} \leqslant z_i \leqslant b_i^{g(i,x)+1}, 1 \leqslant i \leqslant p\},$$

$$DB = \{x_1 \text{ is } H_1^{j_1} \text{ and}, \cdots, \text{and } p \text{ is } H_p^{j_p} \| 1 \leqslant j_1 \leqslant K_i, 1 \leqslant i \leqslant p\}.$$

**推论 2.1**　对 $\forall x = (x_1, \cdots, x_p) \in D$, 若记

$$Z = x_1 \text{ is } H_1^{j_1} \text{ and}, \cdots, \text{and } x_p \text{ is } H_p^{j_1},$$

$$H_i^{j_1}(\cdot) \text{ is } H(i, z),$$

$$W_x(Z) = \{\min\{H(i, Z)(x_j) \mid 1 \leqslant i \leqslant p\},$$

则根据文献[1], $\forall x = (x_1, \cdots, x_p) \in D$,系统输入 $x$ 对应的系统输出$f(x)$ 可表示为

$$f(x) = \sum_{Z \in DB} W_x(Z) * C(Z) \Big/ \sum_{Z \in DB} W_x(Z). \quad (1)$$

### 2.2 隶属函数优化问题(Membership function optimization problem)

对于一个 MISO-Mamdani 模糊系统而言,它的隶属函数 $H_i^{j_i} \in F([d_i^0, d_i^1])(1 \leqslant j_i \leqslant K_i, 1 \leqslant i \leqslant p)$ 的选择很大程度上依赖于经验. 而检验隶属函数质量的主要方法就是在相同的系统输入下对比系统的输入–输出样本的输出项与模糊系统的输出的误差[1,5,6]. 但根据检验结果对隶属函数进行优化是一个十分复杂的问题,因为系统的输出与隶属函数的关系十分复杂,目前采用较为普遍的方法是遗传算法,它们的优化过程和结果都带有一定程度的不确定性).

## 3 MISO-Mamdani 模糊系统的输入/输出关系的表示(I/O relation representation of MISO-Mamdani fuzzy systems)

一般情况下,MISO-Mamdani 模糊系统的输入/输出关系可表示为方程(1). 这种表示方法是以规则后件(模糊规则的结论部分)为中心来表达系统的输入/输出关系.

不足之处是从这个表达式中难以体现出隶属函数值 $\{H_j^{g(j,x(m))}(x_j(m)), 1 \leqslant j \leqslant p, 1 \leqslant m \leqslant M\}$ 与输出结果 $f(x)$ 之间的明确关系, 对隶属函数 $\{H_j^{g(j,x(m))}(x_j) \mid 1 \leqslant j \leqslant p, 1 \leqslant m \leqslant M\}$ 的优化难以利用一些确定性优化工具来进行. 本节将讨论以隶属函数$\{H_j^{g(j,x)}(x_j), 1 \leqslant j \leqslant p\}$ 为中心的 MISO-Mamdani 模糊系统的输入/输出关系表示方法.

**定义 3.1**　若 $x \in D$, 对集合 $\{H_i^{g(i,x)}(x_i), H_i^{g(i,x)+1}(x_i) \mid 1 \leqslant i \leqslant p\}$从小到大排序并对相等成员按规则(若 $H_i^{g(i,x)}(x_i) = H_i^{g(i,x)+1}(x_i)$, 则 $H_i^{g(i,x)}(x_i)$ 的位置比 $H_i^{g(i,x)+1}(x_i)$ 位置靠前; 若 $H_i^{g(i,x)+a}(x_i) = H_j^{g(j,x)+b}(x_j), i < j$,则 $H_i^{g(i,x)+a}(x_i)$ 的位置比 $H_j^{g(j,x)+b}(x_j)$ 位置靠前) 确定顺序所得到的序列记为 $H[x]$;令 $h_i(x) = [j_i/2]$, $k(x)$ 是这样一个正整数, $\forall 1 \leqslant v_1 < v_2 \leqslant k(x), h_{v_1}(x) \neq h_{v_2}(x)$; $\exists 1 \leqslant t(x) \leqslant k(x); h_{t(x)}(x) = h_{k(x)+1}(x)$.

定义

$$H[x] = (H_{j_1}^{g(j_1,x)+b_1}(x_{j_1}), \cdots, H_{j_{2p}}^{g(j_{2p},x)+b_{2p}}(x_{j_{2p}})),$$

$$Q[x] = [2 * j_1 + b_1, \cdots, 2 * j_{k(x)+1} + b_{k(x)+1}],$$

不难证明 $Q[x]$是唯一存在的,定义 3.1 给出了每个 $x$ 的一个特征,下面根据这个特征对 $x$ 进行分类.

**定义 3.2**　若 $y \in D, D_y = \{x \in D \mid Q[x] = Q[y]\}$,不难证明当$\{H_i^{j_i} \| 1 \leqslant j_i \leqslant K_i, 1 \leqslant i \leqslant p\}$ 都

是连续函数时 $D_y$ 是 $R^p$ 中有限个区域(通常为一个).

**定义 3.3** 若 $x \in D_y, a(i,x) = j_i(x) - 2*[j_i(x)/2]$,

$A_x =$

$\{(l_1,\cdots,l_p) \mid$ 当 $i \in Q[x] \wedge i \neq v, l_i = 1 - a(i,x)$,

当 $i = v, l_i = a(v,x)$;否则 $l_i \in \{0,1\}\}$;

$B_x =$

$\{(l_1,\cdots,l_p) \mid$ 当 $i \in Q[X] \wedge i \notin \{t(k),v\}, l_i = 1 - a(i,x)$,

当 $i = v, l_i = a(v,x)$;否则 $l_i \in \{0,1\}\}$;

$$P_y[j_1,\cdots,j_v] = \begin{cases} \sum\limits_{(l_1,\cdots,l_p)\in A_y} C[g(1,y)+l_1,\cdots,g(p,y)+l_p], & v \leqslant k(y), \\ \sum\limits_{(l_1,\cdots,l_p)\in B_y} C[g(1,y)+l_1,\cdots,g(p,y)+l_p], & v = k(y)+1, \\ 0, & v > k(y)+1. \end{cases}$$

**定理 3.1** 若 $y \in D, (j_1,\cdots,j_{k(y)+1}) = Q[y]$, $h_i = [j_i/2], a(i,y) = j_i - 2h_i, 1 \leqslant i \leqslant k(y)+1$, 则对 $\forall x \in D_y$, MISO-Mamdani 模糊系统的输入/输出关系可表示为

$$f(x) = \Big(\sum_{i=1}^{k(y)+1} P_y[j_1,\cdots,j_i] * H_{h_i}^{g(h_i,y)+a(i,y)}(x_{h_i})\Big) \Big/ \Big(\sum_{i=1}^{k(y)} 2^{p-i-1} * H_{h_i}^{g(h_i,y)+a(i,y)}(x_{h_i}) + 2^{p-k(y)-1} * H_{h_{k(y)+1}}^{g(h(k(y)+1),y)+a(k(y)+1,y)}(x_{h_{k(y)+1}})\Big). \tag{2}$$

**证** 当 $p = 1$ 时,

$$f(x) = \Big(C(g(1,x),0) * H_1^{g(1,x)}(x) + \frac{C(g(1,x),1) * H_1^{g(1,x)+1}(x)\Big)}{(H_1^{g(1,x)}(x) + H_1^{g(1,x)+1}(x))},$$

于是定理 3.1 成立;

当 $p > 1$ 时由式(1)可假定

$$f(x) = \frac{\sum\limits_{i=1}^{2p} L_y[i] * H_{h_i}^{g(h_i,y)+a(i,y)}(x_{h_i})}{\Big(\sum\limits_{i=1}^{2p} S_y[i] * H_{h_i}^{g(h_i,y)+a(i,y)}(x_{h_i})\Big).} \tag{3}$$

其中 $L_y[i], S_y[i]$ 待定. 下面证明 $P_y[i] = P_y[j_1,\cdots,j_v], S_y[i] = 2^{p-i-1}$ 当 $i \leqslant k(y)$; $S_y[i] = 2^{p-i-1}$ 当 $i = k(y)+1$.

$$H_{h_i}^{g(h_i,x)+a(i,x)}(x_{h_i}) \geqslant \min\{H_{h_j}^{g(h_j,x)}(x_{h_j}), H_{h_j}^{g(h_j,x)+1}(x_{h_j}) \mid 1 \leqslant j \leqslant i-1\}, \tag{4a}$$

$$H_{h_i}^{g(h_i,x)+a(i,x)}(x_{h_i}) \geqslant \max\{H_{h_j}^{g(h_j,x)}(x_{h_j}), H_{h_j}^{g(h_j,x)+1}(x_{h_j}) \mid 1 \leqslant j \leqslant i-1\}, \tag{4b}$$

$$H_{h_i}^{g(h_i,x)+a(i,x)}(x_{h_i}) \geqslant \min\{H_j^{g(j,x)}(x_j), H_j^{g(j,x)+1}(x_j) \mid 1 \leqslant j \leqslant p\}, \tag{4c}$$

于是任何满足 $H_{h_i}^{g(h_i,x)+a(i,x)}(x_{h_i}) = \min\{H(j,Z)(x_j), 1 \leqslant j \leqslant p\}$ 的模糊规则 $r_Z$ 的条件部分 $Z$ 必须包含 $x_{h_i}$ is $H_{h_i}^{g(h_i,x)+a(i,x)}$ 和 $\{x_{h_j}$ is $H_{h_j}^{g(h_j,x)+1-a(j,x)} \mid 1 \leqslant j \leqslant i-1\}$. 模糊规则 $r_Z$ 产生的推理结果必定是 $C(Z) \times H_{h_j}^{g(h_j,x)+a(j,x)}(x_{h_j})$; 反之也是如此.

这样的模糊规则共有 $2^{p-i-1}$ 条并且它们对应的推理结论值之和为

$$\sum_{(l_1,\cdots,l_p)\in A_y} C(g(1,x)+l_1,\cdots,g(p,x)+l_p) H_{h_j}^{g(h_j,x)+a(j,x)}(x_{h_j}),$$

于是 $\qquad L_y[i] = P_y[j_1,\cdots,j_i].$

又因为以 $H_{h_i}^{g(h_i,x)+a(i,x)}(x_{h_i})$ 为系数的模糊规则的一共有 $2^{p-i-1}$ 条, 因此 $S_y[i] = 2^{p-i-1}$.

当 $i = k(y)+1$ 时, 任何满足

$$H_{h_{k(y)+1}}^{g(h_{k(y)+1},y)+a(k(y)+1,y)}(x_{h_{k(y)+1}}) = \min\{H(j,Z)(x_j), 1 \leqslant j \leqslant p\}$$

的模糊规则 $r_Z$ 的条件部分 $Z$ 必须包含 $x_{h_j}$ is $H_{h_j}^{g(h_j,x)+1-a(j,x)}(1 \leqslant j \leqslant i-1, j \neq h_{t(y)})$ 以及 $x_{h_{k(y)+1}}$ is $H_{h_{k(y)+1}}^{g(h_{k(y)+1},y)+a(k(y)+1,y)}$, 因此它的推理结果一定是 $C(Z) \times H_{h_i}^{g(h_i,y)+a(i,y)}(x_{h_i})$; 反之也是如此.

这样的模糊规则共有 $2^{p-k(y)-1}$ 条并且它们的 $y$ 值之和为

$$\sum_{(l_1,\cdots,l_p)\in B_y} C(g(1,x)+l_1,\cdots,g(p,x)+l_p) H_{h_i}^{g(h_i,y)+a(i,y)}(x_{h_i}).$$

于是 $\qquad L_h[i] = P_y[j_1,\cdots,j_i].$

当 $i > k(y)+1$, 由于任意模糊规则 $r_Z$ 的条件

部分 $Z$ 总包含

$$x_{h_{k(y)+1}} \text{ is } H_{h_{k(y)+1}}^{g(h_{k(y)+1},y)+1},\ x_{h_{k(y)+1}} \text{ is } H_{h_{k(y)+1}}^{g(h_{k(y)+1},y)}$$

中的一个，而

$$H_{h_i}^{g(h_i,x)+a(i,x)}(x_{h_i}) \geqslant$$

$$\max\{H_{h_{k(y)+1}}^{g(h_{k(y)+1},y)+1}(x_{h_{k(y)+1}}),\cdots,H_{h_{k(y)+1}}^{g(h_{k(y)+1},y)}(x_{h_{k(y)+1}})\},$$

因此 $H_{h_i}^{g(h_i,x)+a(i,x)}(x_{h_i})$ 的系数为 0. 于是 $L_y[i] = P_y[j_1,\cdots,j_i] = 0.$　　证毕.

## 4 隶属函数值优化问题的转换（Transformation of membership function optimization problem）

### 4.1 问题描述（Problem description）

隶属函数值 $\{H_j^{g(j,x(m))}(x_j(m)),1\leqslant j\leqslant p,1\leqslant m\leqslant M\}$ 优化问题：

目标函数为

$$\min\{\sum_{m=1}^{M}\|f(x(m))-y(m)\|\}.$$

设样本集 $S=\{(x(m),y(m))\,|\,1\leqslant m\leqslant M\}$（$y(m)$ 为系统在输入 $x(m)$ 时对应的系统输出）；根据当前 $\{H_j^{g(j,x(m))}(x_j)',H_j^{g(j,x(m))}(x_j)'\,|\,1\leqslant j\leqslant p,1\leqslant m\leqslant M\}$（尚未优化）的值可确定 $Q[x(m)]$，并且

$$(j_1(x(m)),\cdots,j(_{k(x(m))+1}x(m)))=Q[x(m)], \tag{5a}$$

若令

$$\begin{cases} j_i(m)=j_i(x(m));\ h_i(m)=[j_i(m)/2],\\ a(j_i(m),x(m))=j_i(m)-2*h_i(m),\ 1\leqslant i\leqslant 2p, \end{cases} \tag{5b}$$

则

$$f(x(m))= (\sum_{i=1}^{k(x(m))}P_{x(m)}[j_1(m),\cdots,j_i(m)]* H_{h_i(m)}^{g(h_i(m),x(m))+a(i,x(m))}(x_{h_i(m)})+ P_{x(m)}[j_1,\cdots,j_{k(x(m))+1}]* H_{h_{k(x(m))+1}(m)}^{g(h_{k(x(m))+1}(m),x(m))+1-a(k(x(m))+1,x(m))}(x_{h_{k(x(m))}+1}))\cdot (\sum_{i=1}^{k(x(m))}2^{p-i-1}*H_{h_i(m)}^{g(h_i(m),x(m))+a(i,x(m))}(x_{h_i(m)})+ 2^{p-k(x(m))-1}*H_{h_{k(x(m))+1}}^{g(h_{k(x(m))+1},x(m))+1-a(k(x(m)+1,x(m))}(x_{h_{k(x(m)+1}}))^{-1}. \tag{6}$$

求隶属函数值 $\{H_j^{g(j,x(m))}(x_j(m)),1\leqslant j\leqslant p,1\leqslant m\leqslant M\}$. 在保持 $Q[x(m)]=(j_1(x(m)),\cdots,j_{k(x(m))+1}(x(m)))$ 不变的前题下使 $\sum_{m=1}^{M}\|f(x(m))-y(m)\|$ 最小.

### 4.2 优化问题的转换（Transformation of the optimization problem）

**定理 4.1**　若令

$$(Z(j_1(m),m),\cdots,Z(j_{2p}(m),m))= (H_{h_1(m)}^{g(h_1(m),x(m))+a(1,x(m))}(x_{h_1(m)}(m)),\cdots, H_{h_{2p}(m)}^{g(h_{2p}(m),x(m))+a(2p,x(m))}(x_{h_{2p}(m)}(m))),$$

$$d_m=\|f(x(m))-y(m)\|,$$

则优化问题 $\Phi$ 可以转化为以下线性规划问题：

目标函数

$$\min(\sum_{m=1}^{M}d_m),$$

约束条件 $\Omega_1$：

$$\begin{cases} -d(m)\leqslant f(x_1(m),\cdots,x_p(m))-y(m)\leqslant d(m),\\ 1\leqslant m\leqslant M; \end{cases} \tag{7}$$

约束条件 $\Omega_2$：

$$0\leqslant Z(j_1(m),m)\leqslant,\cdots,\leqslant Z(j_{k(x(m))+1}(m),m)\leqslant 1, \tag{8a}$$

$$Z(j_{k(x(m))+1}(m),m)\leqslant Z(j_{k(x(m))+v}(m),m)\leqslant 1, \tag{8b}$$

$$d_m\geqslant 0,\ 1\leqslant m\leqslant M,\ 2\leqslant v\leqslant 2p-k(x(m));$$

约束条件 $\Omega_3$：

如果

$1\leqslant m_1<m_2\leqslant M,\ i,k\in\{1,\cdots,2p\}$,

$j_i(m_1)=j_k(m_2),\ x(j_i(m_1),m_1)=x(j_k(m_2),m_2)$,

则

$$Z(j_i(m_1),m_1)=Z(j_k(m_2),m_2); \tag{9a}$$

如果

$1\leqslant m_1\neq m_2\leqslant M,\ i,k\in\{1,\cdots,2p\}$,

$h_i(m_1)=h_k(m_2),\ x(h_i(m_1),m_1)\leqslant x(h_k(m_2),m_2)$,

$g(h_i(m_1),m_1)=g(h_k(m_2),m_2)$,

则

$$Z(2*h_i(m_1),m_1)\geqslant Z(2*h_k(m_2),m_2), \tag{9b}$$

$$Z(2*h_i(m_1)+1,m_1)\leqslant Z(2*h_k(m_2)+1,m_2). \tag{9c}$$

**证** 因为约束条件 $\Omega_1$ 是优化问题直接导出的，它必须得到满足.

因为约束条件 $\Omega_2$ 是对优化问题 $\Phi$ 解所对应的 $Q[x(m)]$ 的限制，它必须得到满足.

又因为集合 $\{Z(i,m) \mid 1 \leqslant i \leqslant 2p, 1 \leqslant m \leqslant M\}$ 中某些变量可能相等，所以应当满足以下等式：

如果

$1 \leqslant m_1 < m_2 \leqslant M,\ i,k \in \{1,\cdots,2p\}$,

$j_i(m_1) = j_k(m_2), x(j_i(m_1), m_1) = x(j_k(m_2), m_2)$,

则公式(9a)成立；

又因为函数 $H_i^{g(i,x)}(\cdot)$ 在 $[b_i^{g(i,x)}, b_i^{g(i,x)+1}]$ 内单调下降，函数 $H_i^{g(x)+1}(\cdot)$ 在 $[b_i^{g(i,x)}, b_i^{g(i,x)+1}]$ 内单调上升，集合 $\{Z(i,m) \mid 1 \leqslant i \leqslant 2p, 1 \leqslant m \leqslant M\}$ 中变量应当满足以下不等式：

如果

$1 \leqslant m_1 \neq m_2 \leqslant M,\ i,k \in \{1,\cdots,2p\}$,

$g(h_i(m_1), m_1) = g(h_k(m_2), m_2)$,

$h_i(m_1) =$

$h_k(m_2),\ x(h_i(m_1), m_1) \leqslant x(h_k(m_2), m_2)$,

则公式(9b),(9c)成立.

所以约束条件 $\Omega_3$ 必须得到满足.

论证不等式(10),(11)是线性不等式.

由于设定了 $Q[x(m)]$ 不变，这样可预先确定 $f(x(m))$ 中 $\{Z(i,m) \mid 1 \leqslant i \leqslant 2p, 1 \leqslant m \leqslant M\}$ 的系数.

将方程(2)代入约束条件 $\Omega_1$，得到

$$\sum_{i=1}^{k(x(m))} (P_{x(m)}[j_1(m),\cdots,j_i(m)] - y(m) + d_m) * 2^{p-i-1}) * Z(j_i(m),m) + (P_{x(m)}[j_1,\cdots,j_{k(x(m))+1}] - (y(m)+d_m) * 2^{p-k(x(m))-1}) * Z(j_{k(x(m))+1}(m),m) \leqslant 0, \tag{10}$$

$$\sum_{i=1}^{k(x(m))} (P_{x(m)}[j_1,\cdots,j_i] - (y(m)-d_m) * 2^{p-i-1}) * Z(j_i(m),m) + (P_{x(m)}[j_1,\cdots,j_{k(x(m))+1}] - (y(m)-d_m) * 2^{p-k(x(m))-1}) * Z(j_{k(x(m))+1}(m),m) \geqslant 0. \tag{11}$$

其中 $d_m \geqslant 0, m = 1,2,\cdots,M$.

上述不等式是关于 $\{Z(i,m) \mid 1 \leqslant i \leqslant 2p, 1 \leqslant m \leqslant M\}$ 的线性不等式，可直接验证约束条件 $\Omega_2$, $\Omega_3$ 是线性不等式. 证毕.

优化过程由两部分组成：①根据 $d_m(1 \leqslant m \leqslant M)$ 的分布情况设定下一个被优化的参数 $d_m(1 \leqslant m \leqslant M)$ 及 $d_m$ 的降低幅度 $e$；② 针对选定的被优化的参数 $d_m(1 \leqslant m \leqslant M)$ 及优化幅度 $e$，采用常规的线性规划问题求解方法求解.通过若干次重复这两个过程近似地完成优化问题的求解.

## 5 仿真实验(Imitation experiment)

从上一节的讨论中已将 Mamdani 模糊系统隶属函数优化问题转换成一组线性规划问题.在这个基础上本节通过 MATLAB6.5 软件系统对一个(2 为输入,1 为输出)Mamdani 模糊系统的隶属函数优化问题进行了求解.具体数据见以下所述.

### 5.1 系统描述(System description)

论域 $D = [0,2.6] \times [0,2.4]$，划分数 $K_1 = 3$, $K_2 = 3$, $B = \begin{Bmatrix} 0 & 0.9 & 1.9 & 2.6 \\ 0 & 1 & 1.7 & 2.4 \end{Bmatrix}$，最初所选隶属函数 $H = H_1^1, H_1^2, H_1^3, H_1^4; H_2^1, H_2^2, H_2^3, H_2^4$.

定义如下：

$H_1^1, H_1^2, H_1^3, H_1^4$ 在点集(称为插值点集)$\{0,0.3,0.5,0.7,0.9,1.2,1.5,1.65,1.9,2.1,2.2,2.4,2.6\}$ 处的函数值如表 1 所示，其他点的函数值由相邻插值点之间的连线确定.

$H_2^1, H_2^2, H_2^3, H_2^4$ 在点集(称为插值点集)$\{0,0.3,0.6,0.8,1,1.2,1.5,1.7,2,2.2,2.4\}$ 处的函数值如表 2 所示，其他点的函数值由相邻插值点之间的连线确定.

$D(k,l)$ 为划分单元，假定在每个划分单元的顶点处系统的输出为 $C[i,j]$，它们的值如表 3 所示.系统的输入/输出样本集数据由表 4 给出.

表 1 $H_1^i(x_1)(1 \leqslant i \leqslant 4)$ 在插值点的值

Table 1 Values of $H_1^i(x_1)(1 \leqslant i \leqslant 4)$ in the inserted points

| $H$ | $x_1$ | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0 | 0.3 | 0.5 | 0.7 | 0.9 | 1.2 | 1.5 | 1.65 | 1.9 | 2.1 | 2.2 | 2.4 | 2.6 |
| $H_1^1(x_1)$ | 1 | 0.7 | 0.45 | 0.3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| $H_1^2(x_1)$ | 0 | 0.5 | 0.5 | 0.85 | 1 | 0.7 | 0.6 | 0.3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $H_1^3(x_1)$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0.45 | 0.65 | 0.85 | 1 | 0.7 | 0.6 | 0.3 | 0 |
| $H_1^4(x_1)$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0.3 | 0.6 | 0.7 | 1 |

表 2　$H_2^i(x_2)(1 \leqslant i \leqslant 4)$ 在插值点的值

Table 2　Values of $H_2^i(x_2)(1 \leqslant i \leqslant 4)$ in the inserted points

| $H$ | $x_2$ | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0 | 0.3 | 0.6 | 0.8 | 1 | 1.2 | 1.5 | 1.7 | 2 | 2.2 | 2.4 |
| $H_2^1(x_2)$ | 1 | 0.7 | 0.5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $H_2^2(x_2)$ | 0 | 0.3 | 0.7 | 1 | 0.7 | 0.5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $H_2^2(x_2)$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0.7 | 1 | 1 | 0.85 | 0.5 | 0.5 | 0 |
| $H_2^4(x_2)$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0.5 | 0.7 | 1 | 1 |

表 3　系统在所有划分单元的顶点处的输出

Table 3　Output values of the system in vertices of all partition units

| 子区域名 | 左上角顶点 $f$ 值 | 右上角顶点 $f$ 值 | 左下角顶点 $f$ 值 | 右下角顶点 $f$ 值 |
|---|---|---|---|---|
| $D(1,1)$: | $C[1,1] = 3$ | $C[1,2] = 2$ | $C[2,1] = 5$ | $C[2,2] = 1$ |
| $D(1,2)$ | $C[1,2] = 2$ | $C[1,3] = 6$ | $C[2,2] = 1$ | $C[2,3] = 4$ |
| $D(1,3)$ | $C[1,3] = 6$ | $C[1,4] = 2$ | $C[2,3] = 4$ | $C[2,4] = 5$ |
| $D(2,1)$ | $C[2,1] = 5$ | $C[2,2] = 1$ | $C[3,1] = 4$ | $C[3,2] = 2$ |
| $D(2,2)$ | $C[2,2] = 1$ | $C[2,3] = 4$ | $C[3,2] = 2$ | $C[3,3] = 5$ |
| $D(2,3)$ | $C[2,3] = 4$ | $C[2,4] = 5$ | $C[3,3] = 5$ | $C[3,4] = 1$ |
| $D(3,1)$ | $C[3,1] = 4$ | $C[3,2] = 5$ | $C[4,1] = 3$ | $C[4,2] = 6$ |
| $D(3,2)$ | $C[3,2] = 2$ | $C[3,3] = 5$ | $C[4,2] = 6$ | $C[4,3] = 1$ |
| $D(3,3)$ | $C[3,3] = 5$ | $C[3,4] = 1$ | $C[4,3] = 1$ | $C[4,4] = 3$ |

表 4　样本数据集(输入 $x_1, x_2$, 输出 $y$)

Table 4　Sample data set (input $x_1, x_2$ /output $y$)

| 输入点编号 $m$ | $x_1(m)$ 的值 | $x_2(m)$ 的值 | $y(m)$ 的值 |
|---|---|---|---|
| $x(1)$ | 1.2 | 1 | 2 |
| $x(2)$ | 1.5 | 1 | 2.6 |
| $x(3)$ | 1.65 | 1 | 3.8 |
| $x(4)$ | 1.2 | 1.2 | 2.3 |
| $x(5)$ | 1.5 | 1.2 | 3.1 |
| $x(6)$ | 1.65 | 1.2 | 4 |

### 5.2　优化的结果(Optimization results)

由于 $H_2^2(1.2) = Z_1, H_2^3(1.2) = Z_2, H_2^2(1.5) = Z_3, H_2^3(1.5) = Z_4, H_2^2(1.65) = Z_5, H_2^3(1.65) = Z_6, H_3^2(1.2) = Z_7, H_3^3(1.2) = Z_8, H_3^2(1.5) = Z_9, H_3^3 = (1.5) = Z_{10}$, 在不同的误差目标设定下，通过 MATLAB 6.5 系统求解得到隶属函数的优化结果如表 5 所示.

由于优化的解不一定唯一，而本文是以 $Z$ 尽可能大为原则从解集中选取解，因此有一些 $Z$ 的值等于 1.

表 5　隶属函数的优化结果

Table 5　Results of membership function optimization

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 目标 | $d_1 = 0.01$ | $d_2 = 0.01$ | $d_3 = 0/12$ | $d_4 = 0.01$ | $d_5 = 0.01$ | $d_6 = 0.01$ | | | | |
| 结果 | $Z_1 = 1.00$ | $Z_2 = 0.5801$ | $Z_3 = 0.8808$ | $Z_4 = 0.9168$ | $Z_5 = 0.2766$ | $Z_6 = 1.00$ | $Z_7 = 1.00$ | $Z_8 = 1.00$ | $Z_9 = 0.7041$ | $Z_{10} = 1.00$ |
| 目标 | $d_1 = 0.02$ | $d_2 = 0.02$ | $d_3 = 0/12$ | $d_4 = 0.02$ | $d_5 = 0.02$ | $d_6 = 0.02$ | | | | |
| 结果 | $Z_1 = 1.00$ | $Z_2 = 0.6224$ | $Z_3 = 0.9837$ | $Z_4 = 0.9837$ | $Z_5 = 0.2500$ | $Z_6 = 1.00$ | $Z_7 = 1.00$ | $Z_8 = 1.00$ | $Z_9 = 0.7545$ | $Z_{10} = 1.00$ |
| 目标 | $d_1 = 0.1$ | $d_2 = 0.1$ | $d_3 = 0.1$ | $d_4 = 0.1$ | $d_5 = 0.1$ | $d_6 = 0.1$ | | | | |
| 结果 | $Z_1 = 1.00$ | $Z_2 = 0.8644$ | $Z_3 = 1.00$ | $Z_4 = 1.00$ | $Z_5 = 0.2500$ | $Z_6 = 1.00$ | $Z_7 = 1.00$ | $Z_8 = 1.00$ | $Z_9 = 0.8870$ | $Z_{10} = 1.00$ |

## 6　总结(Summary)

本文建立了一种以线性规划为基础的 MISO-Mamdani 模糊系统隶属函数优化方法和算法. 这些相关算法的计算复杂度和不确定性与采用遗传算法求解相比都是很低的. 本文所建立的方法可以推广到 MIMO-Mamdani 模糊系统；这些方法也可以结合遗传算法理论进行更深入的研究.

**参考文献**(References):

[1]　GUILLAUME S. Designing fuzzy inference systems from data: an interpretability-oriented review [J]. *IEEE Trans on Fuzzy Systems*, 2001, 9(3): 426 – 430.

[2] CAO S G, REES N W, FENG G. Mamdani-type fuzzy controllers are universal fuzzy controllers [J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 2001, 123(3): 359 - 367.

[3] CORDÓN O, HERRERA F, ZWIR I. Linguistic modeling by hierarchical systems of linguistic rules [J]. *IEEE Trans on Fuzzy Systems*, 2002, 10(1): 2 - 29.

[4] ISHIBUCHI H. Effect of rule weights in fuzzy rule-based classification systems [J]. *IEEE Trans on Fuzzy Systems*, 2001, 9(4): 506 - 515.

[5] ISHIBUCHI H, MURATA T, TURKSEN I B. Single-objective and two-objective genetic algorithms for selecting linguistic rules for pattern classification problems [J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 1997, 89(2): 135 - 149.

[6] CORDÓN O, HERRERA F, VILLAR P. Generating the knowledge Base of a Fuzzy rule-based system by the genetic learning of the data base [J]. *IEEE Trans on Fuzzy Systems*, 2001, 9(4): 667 - 674.



作者简介:

**唐少先** (1963—),男,在职博士生,副教授,中国人工智能学会智能控制与智能机器人分会理事,1983 年毕业于北京大学数学系,获数学学士学位,1989 年毕业于中南工业大学计算机系,获计算机应用硕士学位,主要研究方向为模糊控制、智能系统、计算机软件理论,E-mila: tangcop1963@yahoo.com.cn;

**陈建二** (1954—),男,中南大学信息科学与工程学院特聘教授,博士生导师,长江学者,美国德克萨州 A&M 大学计算机科学系教授,主要研究方向为计算机软件理论,计算机网络;

**张泰山** (1938—),男,教授,博士生导师,主要研究方向为模糊控制、智能系统等.


# 下 期 要 目