文章编号: 1000－8152(2005)04－0527－06

一类不确定脉冲型混杂系统的保代价控制

张 霓[1], 马 皓[2]

(1.浙江工业大学 信息学院,浙江 杭州 310032; 2.浙江大学 电气工程学院,浙江 杭州 310027)

摘要: 针对混合代价函数,研究了参数不确定脉冲型混杂系统的保代价控制问题,给出了混杂状态反馈保代价控制律的设计方法,由此得到的控制律既能使系统闭环鲁棒渐近稳定,又可使系统的闭环混合代价指标在对象参数摄动的范围内不超过确定的上界.本文提出的控制律不仅包含连续时间动态,也包含离散事件动态,而且其离散事件动态行为不需要与被控系统的离散事件动态行为一致,因此设计时不要求被控系统的每个连续时间子系统都具有可控性.仿真结果表明所提设计方法是可行有效的.

关键词: 混杂系统; 不确定系统; 保代价控制; 鲁棒控制; 状态反馈

中图分类号: TP13　　**文献标识码**: A

Guaranteed cost control for a class of uncertain impulsive hybrid systems

ZHANG Ni[1], MA Hao[2]

(1. College of Information Engineering, Zhejiang University of Technology, Hangzhou Zhejiang 310032, China;
2. College of Electrical Engineering, Zhejiang University, Hangzhou Zhejiang 310027, China)

Abstract: For the uncertain impulsive hybrid dynamic systems (IHDSs) and the hybrid cost functions, the synthesis method of the guaranteed cost control laws via hybrid state feedback is developed. By the obtained control law, the perturbed IHDS can be asymptotically stabilized and the closed-loop hybrid cost is not greater than a specified upper limit for all admissible uncertainties. The control law considered here consists of the discrete event dynamics as well as the continuous time dynamics. The discrete event dynamics of the control law doesnot need to coincide exactly with the controlled hybrid system, so that the continuous time subsystems of the controlled hybrid system are not required to be controllable. The simulation result shows the effectiveness of the proposed approach.

Key words: hybrid systems; uncertain systems; guaranteed cost control; robust control; state feedback

1 引言(Introduction)

实际过程中存在这样一类混杂系统:当离散事件状态发生转移时,其连续时间状态会发生跳变,这类系统称为脉冲型混杂系统.这类系统由于其连续时间状态轨迹的间断性,其性能分析与控制需作特别考虑,目前有关研究已引起大家注意.Pettersson[1,2]给出了脉冲型混杂系统的 Lyapunov 稳定性判据,并将其用于自动变速汽车中巡航控制系统的分析.Li 和 Soh 等[3,4]推导得到参数不确定脉冲型混杂系统鲁棒稳定的充分条件,他们的研究成果只适用于具有周期离散事件状态切换序列且离散事件状态使能时间已知的混杂系统;而 Pettersson[1,2]的结果则适用于离散事件状态转移条件为状态或输出依赖的混杂系统,这类系统的离散事件状态使能时间往往是未知的,而且可能具有非周期的离散事件状态切换序列,此类系统在现实中普遍存在,如:电力系统,当其受到大扰动时会进入紧急控制模式[5,6],但扰动到来的时间通常是不可知的,只能通过测量系统的状态或输出是否偏离额定值来判断.

按标称状态设计的控制系统在对象参数发生未预见的摄动时,有可能造成系统性能的恶化.因此,如何设计一个合理的控制器既能保证系统闭环鲁棒稳定,又能保证系统的性能满足一定要求,是一个具有重要意义的问题,这可以归结为系统的保代价控制.目前,有关混杂系统保代价控制方面的研究报道还很少.针对混合代价函数,本文以 Pettersson 的稳

收稿日期:2003－11－19; 收修改稿日期:2004－08－25.
基金项目:国家自然科学基金资助项目(50207008);浙江省自然科学基金资助项目(Y104277);浙江省教育厅科研计划项目(20040575).

定性理论[1,2]为基础,结合线性矩阵不等式(LMI)方法研究离散事件状态转移条件为状态依赖的、参数不确定脉冲型混杂系统的保代价控制问题.

本文提出的混杂系统控制器设计方法突破了文献[7~9]中预先设定控制器的切换律等同于被控系统离散事件状态切换律的保守设计思想,使得控制器具有自己的离散事件动态行为,因此不要求被控混杂系统的每个连续时间子系统都具有可控性,放宽了这些文献中要求被控系统的每个连续时间子系统都具有可控性这一前提条件的限制.

2 系统描述及问题提出(System description and problem formulation)

考虑如下参数不确定脉冲型混杂系统

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = (A(m(t)) + \Delta A(m(t),t))\boldsymbol{x}(t) + (B(m(t)) + \Delta B(m(t),t))\boldsymbol{u}(t), \quad (1)$$

$$\boldsymbol{x}(\tau_{ij}^{+}) = (G(m_i) + \Delta G(m_i,\tau_{ij}))\boldsymbol{x}(\tau_{ij}), \quad \text{当 } \boldsymbol{x}(\tau_{ij}) \in S_{ij} \text{ 时}, \quad (2)$$

$$m(t^{+}) = \phi(\boldsymbol{x}(t), m(t)). \quad (3)$$

式(1)~(3)中:$\boldsymbol{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ 为连续时间状态,$\boldsymbol{u}(t) \in \mathbb{R}^p$ 为输入,$m(t) \in \bar{M} = \{m_1,\cdots,m_N\}$ 为离散事件状态,ϕ 为$m(t)$的转移函数;τ_{ij} 为$m(t)$由m_i切换到m_j的时刻,$S_{ij} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid m_j = \phi(\boldsymbol{x}, m_i)\}$ 为$m(t)$由m_i到m_j的切换集;当$m(t)$由m_i切换至m_j时,$\boldsymbol{x}(t)$ 由 $\boldsymbol{x}(\tau_{ij})$ 跳变至 $\boldsymbol{x}(\tau_{ij}^{+})$;$A(m(t))$, $B(m(t))$ 和 $G(m_i)$ 为适维矩阵;$\Delta A(m(t),t)$, $\Delta B(m(t),t)$, $\Delta G(m_i,\tau_{ij})$ 为时变参数摄动阵,它们具有以下形式:

$$\Delta A(m(t),t) = E_A(m(t))\Sigma_A(m(t),t)F_A(m(t)),$$
$$\Delta B(m(t),t) = E_B(m(t))\Sigma_B(m(t),t)F_B(m(t)),$$
$$\Delta G(m_i,\tau_{ij}) = E_G(m_i)\Sigma_G(m_i,\tau_{ij})F_G(m_i).$$

其中: $E_A(m(t)), F_A(m(t)), E_B(m(t)), F_B(m(t))$, $E_G(m_i), F_G(m_i)$ 均为已知分段定常阵;$\Sigma_A(m(t),t), \Sigma_B(m(t),t), \Sigma_G(m_i,t)$ 为未知时变函数阵,并满足

$$\Sigma_D^{\mathrm{T}}(m(t),t)\Sigma_D(m(t),t) \leqslant I \ (D \in \{A,B,G\}). \quad (4)$$

对系统作如下假设:

假设 1 混杂系统连续时间状态空间的原点(以下简称原点)为平衡点,即平衡状态 $\boldsymbol{x}_e = \boldsymbol{0}$.

假设 2 如果 $\boldsymbol{x}(\tau_{ij}) \in S_{ij}$ 且$\boldsymbol{x}(\tau_{ij}) \neq \boldsymbol{0}$,那么有$\boldsymbol{x}(\tau_{ij}^{+}) \notin S_{jk}$. 这样可保证连续时间状态在有限时间内只发生有限次跳变.

定义系统混合代价指标

$$J = \int_0^{\infty}(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)Q_c(m(t))\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}(t)R_c(m(t))\boldsymbol{u}(t))\mathrm{d}t + \sum_{k=1}^{N(0,\infty)}(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\tau_k)Q_d(m(\tau_k))\boldsymbol{x}(\tau_k) + \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}(\tau_k)R_d(m(\tau_k))\boldsymbol{u}(\tau_k)). \quad (5)$$

其中: $Q_c(m(t)), R_c(m(t)), Q_d(m(\tau_k)), R_d(m(t))$ 是给定的对称正定加权矩阵,τ_k 表示离散事件状态 $m(t)$ 发生第 k 次切换的时刻,$N(0,\infty)$ 为在时间区间$(0,\infty)$中离散事件状态总的切换次数.

定义 1 对于参数不确定脉冲型混杂系统(1)~(3)和代价指标(5),如果存在一个控制律 $\boldsymbol{u}^*(t)$ 和一个正标量 J^*,使得对所允许的不确定性,闭环混杂系统是渐近稳定的,且闭环代价满足 $J \leqslant J^*$,则 $\boldsymbol{u}^*(t)$ 称为系统的一个保代价控制律,J^* 称为系统的一个代价.

考虑如下混杂状态反馈保代价控制律

$$\begin{cases} \boldsymbol{u}(t) = k(h(t))\boldsymbol{x}(t), \\ h(t^{+}) = \Psi(\boldsymbol{x}(t), m(t)). \end{cases} \quad (6)$$

其中:$k(h(t))$ 为连续时间状态反馈矩阵,$h(t) \in \bar{h} = \{h_1,\cdots,h_l\}$ 为控制器的离散事件状态,Ψ 为 $h(t)$ 的转移函数. 若混杂系统状态轨迹到达混杂状态集 Γ_{ij} 时,$h(t)$ 由 h_i 切换到h_j,那么Γ_{ij} 称为由h_i到h_j的切换集. Γ_{ij} 的连续状态集表示为$\Gamma_{ij}^{x} \subset \mathbb{R}^n$,离散事件状态集表示为 $\Gamma_{ij}^{m} \subset \bar{M}$.

3 混杂状态反馈保代价控制(Hybrid state feedback guaranteed cost control)

将闭环混杂系统(1)~(3),(6)的混杂状态空间 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n \times \bar{M}$ 划分成 l 个区域Ω_q($q \in \bar{q} = \{1,\cdots,l\}$),其中 l 为$h(t)$的状态个数,Ω_q 为 h_q 的使能区域.

定义 2 若混杂状态 $(\boldsymbol{x}(t), m(t))$ 的轨迹从 Ω_f($f \in \bar{q}$)出发不经过任何其它区域就直接进入区域 Ω_g($g \in \bar{q}$,且 $g \neq f$),则 Ω_g 称为Ω_f的直达相邻区域.

定义 3 混杂状态 $(\boldsymbol{x}(t), m(t))$ 由 Ω_f 运行到直达相邻区域Ω_g 的切换集 Λ_{fg} 定义为

$$\Lambda_{fg} = \{(\boldsymbol{x}(t), m(t)) \mid \text{若}(\boldsymbol{x}(t), m(t)) \in \Omega_f, \ \exists(\boldsymbol{x}(t+\varepsilon), m(t+\varepsilon)) \in \Omega_g, \text{对于 } \varepsilon > 0 \text{ 且 } \varepsilon \to 0\}.$$

定义 3 说明:如果 Ω_g 是 Ω_f 的直达相邻区域,那么 $\Lambda_{fg} \neq \varnothing$.

混杂状态空间的划分需遵循以下规则:

规则 1　因为当 $m(t)$ 由 m_i 切换到 m_j 时，$\boldsymbol{x}(t)$ 会发生跳变，即：在 $t=\tau_{ij}$ 处，$\boldsymbol{x}(t)$ 是不连续的，所以为了保证混杂状态轨迹每次穿越区域 $\Omega_f(f\in\bar{q})$ 时，$\boldsymbol{x}(t)$ 在 Ω_f 内连续，每个区域中的离散事件状态必须是恒定的，即：离散事件状态的切换不会在区域内部发生．若 $m_i\in\Omega_f, m_j\in\Omega_g, \Omega_g$ 是 Ω_f 的直达相邻区域，那么 $m(t)$ 由 m_i 到 m_j 的切换只会发生在 Ω_f 的边界 Λ_{fg} 上．

规则 2　混杂状态轨迹不允许从包含原点的区域运行到不包含原点的区域．这样做是为了能利用 MATLAB 仿真软件的 LMI 工具箱求解出保代价控制律．

注 1　混杂状态空间的划分意味着控制器离散事件动态行为的确立，有关如何划分混杂状态空间的具体细节请见第 4 节中控制器的设计算法说明．

由混杂状态空间的划分规则 1 可知控制器离散事件状态 $h(t)$ 由 h_f 到 h_g 的切换集 Γ_{fg} 等于 Λ_{fg}．

令 $\Omega_f^x\subset\mathbb{R}^n$ 和 $\Lambda_{fg}^x\subset\mathbb{R}^n$ 分别表示 Ω_f 和 Λ_{fg} 的连续时间状态集，$\Omega_f^m\subset\bar{M}$ 和 $\Lambda_{fg}^m\subset\bar{M}$ 分别表示 Ω_f 和 Λ_{fg} 的离散事件状态集．为了能利用 S-procedure[10] 将带约束条件的二次型不等式转化成不带约束条件的二次型不等式，Ω_f^x 和 Λ_{fg}^x 必须用一组二次型不等式或等式所表示的集合替代，这些集合必须大于或等于 Ω_f^x 和 Λ_{fg}^x，但不能过大，否则会造成相应的矩阵不等式无解．下面分两种情况给出 Ω_f^x 和 Λ_{fg}^x 的二次型表示形式：

1) 当 Ω_f 不包含原点（即平衡点）时：

Ω_f^x 表示为

$$\begin{cases}\Omega_f^x\subseteq\bigcap\limits_{s=1}^{u_f}\rho_{fs},\\ \rho_{f_s}=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n\mid\bar{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\bar{W}_f^s\bar{\boldsymbol{x}}\geqslant 0\},\ s=1,\cdots,u_f.\end{cases}\tag{7}$$

其中：$\bar{\boldsymbol{x}}=[\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\ \ 1]^{\mathrm{T}}$，$\bar{W}_f^s\in\mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)}$ 为对称阵，u_f 为不等式 $\bar{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\bar{W}_f^s\bar{\boldsymbol{x}}\geqslant 0$ 的个数．

$\Lambda_{f_g}^x$ 表示为

$$\begin{cases}\Lambda_{f_g}^x\subseteq\bigcap\limits_{r=1}^{v_{fg}}\lambda_{f_g^r},\\ \lambda_{f_g^r}=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n\mid\bar{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\bar{W}_{f_g}^r\bar{\boldsymbol{x}}\geqslant 0\},\ r=1,\cdots,v_{f_g}.\end{cases}\tag{8}$$

其中：$\bar{\boldsymbol{x}}$ 同式(7)，$\bar{W}_{f_g}^r\in\mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)}$ 为对称阵，v_{f_g} 为不等式 $\bar{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\bar{W}_{f_g}^r\bar{\boldsymbol{x}}\geqslant 0$ 的个数．

2) 当 Ω_f 包含原点时：

分别用 $\boldsymbol{x}$，对称阵 $W_f^s\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 和 $W_{f_g}^r\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 代替式(7)和(8)中的 $\bar{\boldsymbol{x}}$，$\bar{W}_f^s$ 和 $\bar{W}_{fg}^r$，可得此种情况下 Ω_f^x 和 $\Lambda_{f_g}^x$ 的二次型表示形式．

为书写方便，本节后面均采用以下形式表示式(1)~(6)中的参数：当 $h(t)=h_f(f\in\bar{q})$ 时，$k_f=k(h(t))$；当 $m(t)=m_i(i\in\{1,\cdots,N\})$ 时，$A_i=A(m(t)),\Delta A_i(t)=\Delta A(m(t),t)$，其他与 $m(t)$ 有关的参数依此类推．令

$$\bar{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}\\1\end{bmatrix},\ \bar{A}_i=\begin{bmatrix}A_i&0\\0&0\end{bmatrix},$$

$$\bar{G}_i=\begin{bmatrix}G_i&0\\0&1\end{bmatrix},\ \bar{B}_i=\begin{bmatrix}B_i\\0\end{bmatrix},$$

$$\bar{E}_{Ai}=\begin{bmatrix}E_{Ai}\\0\end{bmatrix},\ \bar{E}_{Bi}=\begin{bmatrix}E_{Bi}\\0\end{bmatrix},$$

$$\bar{E}_{Gi}=\begin{bmatrix}E_{Gi}\\0\end{bmatrix},\ \bar{F}_{Ai}=[F_{Ai},0],$$

$$\bar{F}_{Gi}=[F_{Gi}\ \ 0],\ \bar{k}_f=[k_f\ \ 0],$$

则式(1)和(2)可被表示为

$$\dot{\bar{\boldsymbol{x}}}(t)=(\bar{A}_i+\bar{B}_i\bar{k}_f+\bar{E}_{Ai}\Sigma_{Ai}(t)\bar{F}_{Ai}+\bar{E}_{Bi}\Sigma_{Bi}(t)F_{Bi}\bar{k}_f)\bar{\boldsymbol{x}}(t),\tag{9}$$

$$\begin{cases}\bar{\boldsymbol{x}}(\tau_{ij}^+)=(\bar{G}_i+\bar{E}_{Gi}\Sigma_{Gi}(\tau_{ij})\bar{F}_{Gi})\bar{\boldsymbol{x}}(\tau_{ij}),\\ \boldsymbol{x}(\tau_{ij})\in S_{ij}.\end{cases}\tag{10}$$

令 $\bar{Q}_{ci}=\begin{bmatrix}Q_{ci}&0\\0&0\end{bmatrix}$，$\bar{Q}_{di}=\begin{bmatrix}Q_{di}&0\\0&0\end{bmatrix}$，则式(5)中的被积项和求和项分别有如下等价关系：

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)Q_c(m(t))\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}(t)R_c(m(t))\boldsymbol{u}(t)=\bar{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(t)(\bar{Q}_{ci}+\bar{k}_f^{\mathrm{T}}R_{ci}\bar{k}_f)\bar{\boldsymbol{x}}(t),\tag{11}$$

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\tau_k)Q_d(m(\tau_k))\boldsymbol{x}(\tau_k)+\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}(\tau_k)R_d(m(\tau_k))\boldsymbol{u}(\tau_k)=\bar{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(\tau_k)(\bar{Q}_{di}+\bar{k}_f^{\mathrm{T}}R_{di}\bar{k}_f)\bar{\boldsymbol{x}}(\tau_k).\tag{12}$$

引理 1[11]　设 E,Σ,F 是具有适当维数的矩阵，则对任意常数 $\varepsilon>0$ 及所有满足 $\Sigma\Sigma^{\mathrm{T}}\leqslant I$ 的矩阵 Σ，以下不等式成立：

$$E\Sigma F+F^{\mathrm{T}}\Sigma^{\mathrm{T}}E^{\mathrm{T}}\leqslant\varepsilon EE^{\mathrm{T}}+\varepsilon^{-1}F^{\mathrm{T}}F.$$

由式(1)~(12)、引理 1、文献[2]的定理 3.3 和 Remark 3.6 以及文献[10]中的 LMI 理论可以推导出如下定理：

定理 1　给定混杂系统运行代价上限 J^* 和初始状态 $(\boldsymbol{x}(0),m(0))$，如果对所有 $h_f(f\in\bar{q})$，$\Omega_f^m=m_i(i\in\{1,\cdots,N\})$ 有

1) 若 Ω_f 不包含原点，那么对于 Ω_f 及其直达相邻区域 Ω_g，存在正定对称阵 $\bar{P}_f\in\mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)}$，矩阵

$\bar{k}_f$ 及标量 $\bar{\varepsilon}_{Af} > 0, \bar{\varepsilon}_{Bf} > 0, \bar{\beta}_f^s \geqslant 0, \bar{\delta}_{fg}^r \geqslant 0, \bar{\varepsilon}_{fg} > 0$ 满足以下条件：

① 若 Ω_f 为初始运行区域(即初始状态 $(\boldsymbol{x}(0), m(0))$ 所在区域)，那么必须有 $\bar{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(0)\bar{P}_f\bar{\boldsymbol{x}}(0) \leqslant J^*$.

②

$$\begin{bmatrix} \bar{\Theta}_1 - \sum_{s=1}^{u_f}\bar{\beta}_f^s\bar{W}_f^s & \bar{F}_{Ai}^{\mathrm{T}} & \bar{k}_f^{\mathrm{T}}F_{Bi}^{\mathrm{T}} & \bar{k}_f^{\mathrm{T}} \\ \bar{F}_{Ai} & \varepsilon_{Af} & 0 & 0 \\ F_{Bi}\bar{k}_f & 0 & \bar{\varepsilon}_{Bf} & 0 \\ \bar{k}_f & 0 & 0 & R_{ci}^{-1} \end{bmatrix} > 0. \quad (13)$$

其中

$$\bar{\Theta}_1 = -(\bar{A}_i^{\mathrm{T}}\bar{P}_f + \bar{P}_f\bar{A}_i + \varepsilon_{Af}\bar{P}_f\bar{E}_{Ai}\bar{E}_{Ai}^{\mathrm{T}}\bar{P}_f + \varepsilon_{Bf}\bar{P}_f\bar{E}_{Bi}\bar{E}_{Bi}^{\mathrm{T}}\bar{P}_f + \bar{k}_f^{\mathrm{T}}\bar{B}_i^{\mathrm{T}}\bar{P}_f + \bar{P}_f\bar{B}_i\bar{k}_f + \bar{Q}_{ci}).$$

③ 1° 若 $\Omega_g^m = m_i$，即：混杂状态从区域 Ω_f 运行到 Ω_g 时，离散事件状态 $m(t)$ 未发生变化，那么有

$$\bar{P}_f - \bar{P}_g - \sum_{r=1}^{v_{f_g}}\bar{\delta}_{f_g}^r\bar{W}_{f_g}^r \geqslant 0. \quad (14)$$

2° 若 $\Omega_g^m = m_j (j \neq i)$，即：混杂状态从区域 Ω_f 运行到 Ω_g 时，离散事件状态 $m(t)$ 由 m_i 切换到 m_j，在这种情况下有

$$\begin{bmatrix} \bar{\Theta}_2 - \sum_{r=1}^{v_{fg}}\bar{\delta}_{fg}^r\bar{W}_{fg}^r & \bar{k}_f^{\mathrm{T}} & -\bar{G}_i^{\mathrm{T}}\breve{P}_g & 0 \\ \bar{k}_f & R_{di}^{-1} & 0 & 0 \\ -\breve{P}_g\bar{G}_i & 0 & \breve{P}_g & \breve{P}_g\bar{E}_{Gi} \\ 0 & 0 & \bar{E}_{Gi}^{\mathrm{T}}\breve{P}_g & \bar{\varepsilon}_{fg}^{-1}I \end{bmatrix} \geqslant 0. \quad (15)$$

其中

$$\bar{\Theta}_2 = \bar{P}_f + \tilde{\sigma}_g - \bar{\varepsilon}_{fg}^{-1}\bar{F}_{Gi}^{\mathrm{T}}\bar{F}_{Gi} - \bar{Q}_{di}. \quad (16)$$

当 Ω_g 不包含原点时，$\breve{P}_g = \bar{P}_g, \tilde{\sigma}_g = 0$；当 Ω_g 包含原点时，$\breve{P}_g = \begin{bmatrix} P_g & 0 \\ 0 & \sigma_g \end{bmatrix}, \tilde{\sigma}_g = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sigma_g \end{bmatrix}$，标量 $\sigma_g > 0$，$P_g \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

2) 若 Ω_f 包含原点，Ω_g 为 Ω_f 的直达相邻区域，那么将条件 1)-① ~ 1)-③ 中的符号“-”，“~”和“⌣”全部去除，去掉式(16)中的矩阵 $\tilde{\sigma}_g$，就可得到此种情况下必须满足的 3 个条件，对应于条件 1)-①、条件 1)-② 和条件 1)-③，这 3 个条件分别称为条件 2)-①、条件 2)-② 和条件 2)-③.

那么混杂状态反馈控制律(6)是参数不确定脉冲型混杂系统(1) ~ (3)和代价指标(5)的一个保代价控制律，相应的闭环代价函数值满足：$J < J^*$（证明从略）.

4 混杂状态反馈保代价控制器设计算法 (Design procedure of the guaranteed cost control law)

定义 4 如果混杂状态轨迹进入 Ω_f 后不再离开，那么 Ω_f 称为混杂状态轨迹的终止区域.

定义 5 混杂系统从一个混杂状态点运行到另一个混杂状态点所经过的离散事件状态切换序列称为路径.

对于给定的混杂系统代价上限 J^* 及初始状态 $(\boldsymbol{x}(0), m(0))$，基于定理 1 可得如下混杂状态反馈保代价控制律设计算法：

1) 根据 $m(t)$ 的转移关系找出所有从给定初始混杂状态 $(\boldsymbol{x}(0), m(0))$，到达闭环平衡点 $\boldsymbol{x}_e = \boldsymbol{0}$ 的路径.

2) 令 N = 总路径数.

3) 在剩余的 N 条路径中选择一条路径.

4) 令 $\widehat{M}$ 表示所选路径包含的离散事件状态的集合. 在初态 $(\boldsymbol{x}(0), m(0))$，以及从初态到平衡点 $\boldsymbol{x}_e = \boldsymbol{0}$ 的路径确定的情况下，根据 $m(t)$ 的转移条件可知路径中每个离散事件状态 $m_i \in \widehat{M}$ 的有效区域.

5) 依路径中离散事件状态切换先后次序，将由 $\boldsymbol{x}(t), m(t)$ 构成的混杂状态空间 Ω 按 m_i 的有效区域进行划分，令 Ω_{j+1} 表示 Ω_j 的直达相邻区域，Ω_1 表示初始运行区域. 令 $a = 0$.

6) 令 l = 总的区域个数，$j = l$.

7) 当 $j = l$ 时，若 Ω_l 为终止区域，则需计算出 Ω_l^x 的二次型表示形式；若 Ω_l 不是终止区域，混杂状态轨迹在区域 $\Omega_k \to \Omega_{k+1} \to \cdots \to \Omega_l$ 间不断循环转移，那么除了计算 Ω_l^x 的二次型表示形式，还需计算出 Λ_{lk}^x 的二次型表示形式. 当 $j < l$ 时，则需计算出 Ω_j^x 和 $\Lambda_{j(j+1)}^x$ 的二次型表示形式. 具体计算方法请参见第 3 节和文献[2].

8) 这里分 3 种情况计算：

① 若 $j = l$，选取正定对称阵 P_l；

② 若 $1 < j < l$，将前面已求出的 $\bar{P}_{j+1}$ 或 P_{j+1} 代入定理 1 条件 1)-③ 或条件 2)-③，选取满足条件的可行解 $\bar{P}_j$ 或 P_j；

③ 若 $j = 1$，将已求出的 $\bar{P}_2$ 或 P_2 代入条件

1)-③或条件 2)-③,选取满足条件 1)-①和条件 1)-③的可行解 $\bar{P}_1$,或满足条件 2)-①和条件 2)-③的可行解 P_1.

如果混杂状态轨迹在区域 $\Omega_k \to \Omega_{k+1} \to \cdots \to \Omega_l$ 间不断循环转移,而且 $j = k$,那么由于 Ω_k 为 Ω_l 的直达相邻区域,Ω_{k+1} 为 Ω_k 的直达相邻区域,P_k 必须满足这两种情况下的条件 2)-③.

如果无法得到可行解,若 $a = 0$,则跳到步骤 1),2);若 $a = 1$,那么 $N = N - 1$,如果 $N \geqslant 1$,则返回步骤 3),否则计算结束,表明无法获得所需控制器.

9) 这一步分两种情况考虑:

① 如果 $\Omega^m \neq \Omega^m_{j+1}$,那么不仅要将 $\bar{P}_{j+1}$ 代入条件 1)-③ 或 P_{j+1} 代入条件 2)-③,还要将 $\bar{P}_j$ 代入条件 1)-② 及条件 1-③ 或 P_j 代入条件 2)-② 及条件 2)-③,选取满足条件 1)-② 及条件 1)-③ 的可行解 $\bar{k}_j$ 或满足条件 2-② 及条件 2-③ 的可行解 k_j.

② 如果 $\Omega^m_j = \Omega^m_{j+1}$,将 $\bar{P}_j$ 代入条件 1)-② 或 P_j 代入条件 2)-②,选取满足条件 1)-② 的可行解 $\bar{k}_j$ 或满足条件 2)-② 的可行解 k_j.

若得到可行解,则继续步骤 10);若得不到可行解,则返回步骤 8)重新选取 $\bar{P}_j$ 或 P_j.

10) $j = j - 1$,若 $j \geqslant 1$ 则返回步骤 7),否则继续下一步.

11) 将求出的所有 $k_j(j = 1,\cdots,l)$ 代入闭环混杂系统(1) ~ (3),(6) 中.控制器(6) 中,$h(t)$ 由 h_j 转移到 h_{j+1} 的切换集 $\Gamma^x_{j(j+1)} = \Lambda^x_{j(j+1)}, \Gamma^m_{j(j+1)} = \Lambda^m_{j(j+1)}$,其中 $\Lambda_{j(j+1)}$ 为混杂状态($\boldsymbol{x}(t), m(t)$) 由 Ω_j 运行到 Ω_{j+1} 的切换集.验证闭环混杂系统的混杂状态轨迹是否从初态($\boldsymbol{x}(0), m(0)$) 出发经所选路径到达平衡点 $\boldsymbol{x}_e = \boldsymbol{0}$,并且满足前面提出的混杂状态空间 Ω 的划分规则.若是,计算正常结束;若不是,返回步骤 6),重新选取满足定理 1 的 k_j.

12) $a = a + 1$.对某些区域,特别是包含不可控连续动态的区域作进一步细分,返回步骤 6).

注 2　在计算 $\bar{k}_j$ 或 k_j,$\bar{P}_j$ 或 P_j 时所涉及的 LMI 可用 MATLAB 仿真软件的 LMI 工具箱求解.

5　仿真例子(Simulation results)

为了验证算法的有效性,选取参数不确定脉冲型混杂系统(1) ~ (3)的参数为

离散事件状态: $m(t) \in \{m_1, m_2\}$;

离散事件状态切换规则:

$$m(t^+) = \begin{cases} m_1, \text{当 } m(t) = m_2, x_2 - 0.5x_1 = 0 \text{ 时}, \\ m_2, \text{当 } m(t) = m_1, x_2 - 3x_1 = 0 \text{ 时}. \end{cases}$$

连续时间状态方程(1),(2)中:

m_1 所对应的连续时间子系统(以下称连续子系统 1)参数为

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & -20 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ G_1 = \begin{bmatrix} 1.5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$E_{A1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ F_{A1} = [0.1\quad 2],\ E_{B1} = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$F_{B1} = 1,\ E_{G1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ F_{G1} = [0.2\quad 0],$$

$$\Sigma_{A1}(t) = \Sigma_{B1}(t) = \Sigma_{G1}(t) = \cos(t),$$

$$S_{12} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 - 3x_1 = 0, m(t) = m_1\}.$$

m_2 所对应的连续时间子系统(以下称连续子系统 2)参数为

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},\ G_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1.5 \end{bmatrix},$$

$$E_{A2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ F_{A2} = [0.1\quad 0],\ E_{B2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.2 \end{bmatrix},$$

$$F_{B2} = 1,\ E_{G2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},\ F_{G2} = [0\quad 0.2],$$

$$\Sigma_{A2}(t) = \Sigma_{B2}(t) = \Sigma_{G2}(t) = \cos t,$$

$$S_{21} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 - 0.5x_1 = 0, m(t) = m_2\}.$$

代价指标(5)中:

当 $m(t) = m_1$ 时,$Q_{c1} = \begin{bmatrix} 0.05 & 0 \\ 0 & 0.05 \end{bmatrix}, R_{c1} = 0.05, Q_{d1} = \begin{bmatrix} 0.05 & 0 \\ 0 & 0.05 \end{bmatrix}, R_{d1} = 0.01$;

当 $m(t) = m_2$ 时,$Q_{c2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, R_{c2} = 1, Q_{d2} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}, R_{d2} = 0.01$.

要求整个混杂系统的运行代价上限为 $J^* = 220$.

从以上参数可看出,连续子系统 1,2 均为不稳定且不可控子系统,混杂系统开环运行时,其连续时间状态是发散的、不稳定的,此时系统运行代价 $J \to \infty$.

对于给定初态 ($[4,4]^{\mathrm{T}}, m_1$),根据本文提出的保代价控制律设计方法得控制器如下:

对于区域 $\Omega_1 = \{(\boldsymbol{x}(t), m(t)) \mid (x_2 > 0.5x_1) \cap (x_2 \leqslant 3x_1), m(t) = m_1\}$,当$(\boldsymbol{x}(t), m(t)) \in \Omega_1$ 时,控制律为:$h(t) = h_1, k(h_1) = [-3, -2]$;

对于区域 $\Omega_2 = \{(\boldsymbol{x}(t), m(t)) \mid (x_2 \geqslant 0.5x_1) \cap (x_2 < 3x_1), m(t) = m_2\}$,当$(\boldsymbol{x}(t), m(t)) \in \Omega_2$时,控制律为 $h(t) = h_2, k(h_2) = [-8, -5]$.

$h(t)$ 由 h_1 到 h_2 的切换集 Γ_{12} 为

$\Gamma_{12} = \{(\boldsymbol{x}(t), m(t)) \mid x_2 - 3x_1 = 0, m(t) = m_1\}$;

$h(t)$ 由 h_2 到 h_1 的切换集 Γ_{21} 为

$\Gamma_{21} = \{(\boldsymbol{x}(t), m(t)) \mid x_2 - 0.5x_1 = 0, m(t) = m_2\}$.

当闭环混杂系统以 $([4,4]^{\mathrm{T}}, m_1)$ 为初态运行时,系统连续时间状态渐近稳定,系统运行代价 $J < \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(0)P_1\boldsymbol{x}(0) = 219.6990 < J^*$.

6 结论(Conclusion)

本文针对混合代价函数研究离散事件状态转移条件为状态依赖的、参数不确定脉冲型混杂系统的保代价问题.第3节中给出的定理1将参数不确定脉冲型混杂系统的保代价控制问题转换为一系列矩阵不等式的求解问题,而第4节中的设计算法则提供了利用MATLAB仿真软件的LMI工具箱求解这一系列矩阵不等式的方法.仿真结果表明本文提出的保代价控制器设计方法是可行有效的.

参考文献(References):

[1] PETTERSSON S, LENNARTSON B. Stability of hybrid systems using LMIs – a gear-box application [C]// *Lecture Notes in Computer Science*, Vol. 1790. Heidelberg, Germany: Springer-Verlag, 2000: 381 – 395.

[2] PETTERSSON S. *Analysis and design of hybrid systems* [D]. Göteborg, Sweden: Control Engineering Laboratory, Charmels University of Technology, 1999.

[3] SOH C B. Robust Stability of perturbed periodic hybrid systems [J]. *Int J of Systems Science*, 1999, 30(8): 811 – 821.

[4] LI Z G, SOH C B, WEN C Y. Stability of uncertain quasi-periodic hybrid dynamic systems [J]. *Int J Control*, 2000, 73(1): 63 – 73.

[5] 吕书强,秦世引,宋永华.混杂电力系统频率紧急控制的Petri网建模与仿真[J].电力系统自动化,2001,25(6):4 – 8.
(LÜ Shuqiang, QIN Shiyin, SONG Yonghua. Modelling and simulation of emergent frequency control for hybrid power systems based on differential Petri nets [J]. *Automation of Electric Power Systems*, 2001, 25(6): 4 – 8.)

[6] 韩景红,秦世引,宋永华.基于学习自动机的混杂电力系统紧急频率控制[J].电力系统自动化,2000,24(18):8 – 12.
(HAN Jinghong, QIN Shiyin, SONG Yonghua. The frequency control in emergency of hybrid power system based on learning automata [J]. *Automation of Electric Power Systems*, 2000, 24(18): 8 – 12.)

[7] RODRIGUES L, HASSIBI A, HOW J P. Output feedback controller synthesis for piecewise-affine systems with multiple equilibria [C]// *Proc of American Control Conference*. Evanston, IL: American Automatic Control Council, 2000: 1784 – 1789.

[8] 王泽宁,费树岷,冯纯伯.一类混杂系统的鲁棒性分析与控制[J].控制理论与应用,2001,18(3):375 – 379.
(WANG Zening, FEI Shumin, FENG Chunbo. Robust analysis and robust control for a class of hybrid system [J]. *Control Theory & Applications*, 2001, 18(3): 375 – 379.)

[9] 张霄力,刘玉忠,赵军.一类切换系统的鲁棒控制 [J].东北大学学报(自然科学版),2000,21(5):498 – 500.
(ZHANG Xiaoli, LIU Yuzhong, ZHAO Jun. Robust control of a class of switched system [J]. *J of Northeastern University* (*Natural Science*), 2000, 21(5): 498 – 500.)

[10] BOYD S, GHAOUI L El, FERON E, et al. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory* [M]. Philadelphia, PA: SIAM, 1994: 1 – 187.

[11] PETERSEN Ian R. Stabilization algorithm for a class of uncertain linear systems [J]. *Systems & Control Letters*, 1987, 8(4): 351 – 357.

作者简介:

张 霓 (1970—),女,工学博士,讲师,主要研究方向为混杂系统鲁棒控制,E-mail: zn@zjut.edu.cn;

马 皓 (1969—),男,工学博士,副教授,主要研究方向为混杂系统理论及其在电力电子系统中的应用,E-mail: mahao@cee.zju.edu.cn.