第 22 卷第 4 期
2005 年 8 月

控制理论与应用
Control Theory & Applications

Vol.22 No.4
Aug. 2005

文章编号: 1000 - 8152(2005)04 - 0543 - 04

时滞输出反馈非恒同主从耦合混沌系统一致同步的判据

王建根[1,2], 赵 怡[1]

(1. 中山大学 数学与计算科学学院,广东 广州 510275; 2. 佛山职业技术学院,广东 佛山 528001)

摘要: 当主从耦合混沌系统的参数之间非恒同时,一般意义上的混沌同步难以实现,因此,讨论了其具有一定误差界的一致同步问题.本文对一类包含 Lur'e 系统和 Lipschitz 系统在内的混沌系统,应用 Lyapunov 函数方法导出通过时滞输出反馈控制实现一致同步的充分条件,该判据用矩阵不等式的形式给出.进而讨论了同步的鲁棒性问题.最后结合 Chua 电路对结论进行了数值模拟,验证了结论的正确性与有效性.

关键词: 非恒同主从耦合混沌系统; 一致同步; Chua 电路; 时滞输出反馈控制

中图分类号: TP13, O23　　**文献标识码**: A

Uniform synchronization criterion for nonidentical coupled master-slave chaotic system under time-lag output feedback control

WANG Jian-gen[1,2], ZHAO Yi[1]

(1. School of Mathematics and Computational Science, Sun Yat-sen University, Guangzhou Guangdong 510275, China;
2. Foshan Polytechnic College, Foshan Guangdong 528001, China)

Abstract: It is difficult to achieve the synchronization for the master-slave chaotic systems with nonidentical parameters, so the uniform synchronization with a small error bound is discussed. For a class of chaotic systems which include Lur'e systems and Lipschitz systems, the sufficient criterion for uniform sysnchronization under time-lag output feedback control is deducecd by Lyapunov function method. It is given by matrix inequality. Moreover, the robustness problem is discussed and the simulation for chua's circuit is made to illustrate the correctness and effectiveness of the conclusions.

Key words: nonidentical coupled chaotic systems; uniform synchronization; Chua's circuit; time-lag output feedback control

1 引言(Introduction)

混沌同步在保密通信、生命科学等领域潜在的应用价值使得这一问题越来越引起人们的研究兴趣.对主从耦合系统的混沌同步问题的研究已经有不少结果,这些工作大多是围绕恒同主从系统展开的[1~4].事实上,在实际应用中,除了需要研究完全恒同的主从系统的同步问题,还需要考虑非恒同的情形.因此,近年来,又有关于非恒同主从系统同步的一些结果[5].文献[6]研究了两个耦合混沌系统,得到了关于其全局同步的一个简单判据;文献[7]又讨论了其具时滞的情形.显然,考虑具有时滞的非恒同主从系统的同步问题更具有实际意义,因此,本文在这些工作的基础上讨论了具时滞的输出反馈非恒同主从耦合混沌系统一致同步的判定问题,得到了一致同步的充分条件.

考虑以下耦合主从混沌系统

$$\mathscr{M}: \begin{cases} \dot{x} = A_1 x + g(x(t)), \\ p(t) = C_1 x(t), \end{cases} \tag{1}$$

$$\mathscr{S}: \begin{cases} \dot{z} = A_2 z + g(z(t)) + L(p(t-\tau) - q(t)), \\ q(t) = C_2 z(t). \end{cases} \tag{2}$$

这里: $x, z \in \mathbb{R}^n$ 是状态向量, $p, q \in \mathbb{R}^l$ 是输出向量, $A_1, A_2 \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}^{m\times n}$ 是常数矩阵. $L \in \mathbb{R}^{n\times m}$ 是需要设计的反馈矩阵. $g(x)$ 是一个连续非线性函数,假设它满足

$$g(x(t_1)) - g(z(t_2)) = M_{x,z}(x(t_1) - z(t_2)). \tag{3}$$

这里 $M_{x,z}$ 是一有界矩阵,其元素依赖于 x, z.

大多数混沌系统,包括所有的 Lur'e 系统和 Lipschitz 系统,都可表示为上述形式(参见文献[6]注 1).本文后面的例子也将给出一个具体的解释.

对前述系统,定义系统误差为

$$e(t) = x(t-\tau) - z(t),$$

收稿日期: 2004 - 02 - 27; 收修改稿日期: 2004 - 08 - 18.

基金项目: 国家自然科学基金项目资助(10371136); 广东省自然科学基金项目资助(021765).

即

$$\dot{e}(t)=A_1x(t-\tau)-A_2z+g(x(t-\tau))-g(z(t))-L(p(t-\tau)-q(t))=(A_2-LC_2)e(t)+M_{x,z}e(t)+[\Delta A-L\Delta C]x(t-\tau),$$

于是

$$\dot{e}(t)=(A_2-LC_2+M_{x,z})e(t)+[\Delta A-L\Delta C]x(t-\tau). \tag{4}$$

这里 $\Delta A=A_1-A_2,\Delta C=C_1-C_2$.

2 一致同步的判据(Criterion of uniform synchronization)

为了得到关于混沌同步的判据,先引入误差系统中关于非线性项、系数矩阵和主系统状态向量的两个假设.

假设 1 存在一个正实数 δ,对任何初值 x_0,都存在时间 $T(x_0)$ 使得

$$\|x(t;x_0)\|_2\leqslant\delta,\ \forall t\geqslant T. \tag{5}$$

以上假设参见文献[5].从实际观点来看,在讨论混沌系统时,作者仅对具有界轨线的系统感兴趣,所以这种假设是合理的.

假设 2 存在一个较小的正数 α 使得 $\|\Delta A\|\leqslant\alpha,\|\Delta C\|\leqslant\alpha$.

由于讨论的主从耦合混沌系统是非恒同的,即主从系统之间存在参数的不匹配,因此,二者之间的同步误差将不再渐近于0,于是,引入下面的具误差界 ε 一致同步的概念[5].

定义 1 称主从系统(1),(2)是具误差界 ε 一致同步的,如果存在一个 $\delta_0>0$ 和一个 $T\geqslant0$ 使得如果 $\|x(0)-z(0)\|_2\leqslant\delta_0$,则有 $\|x(t)-z(t)\|_2\leqslant\varepsilon$ 对所有的 $t\geqslant T$ 成立.

本文的目标是通过设计控制器 L 使主从系统在上述意义上同步,且这种同步关于参数的不匹配具有好的鲁棒性.

在以下的分析中,选取 Lyapunov 函数为

$$V(e(t))=e^{\mathrm{T}}(t)Pe(t).$$

其中矩阵 $P=P^{\mathrm{T}}>0$.

则由式(4)得

$$\begin{aligned}\dot{V}(e(t))=&\\ &\dot{e}^{\mathrm{T}}(t)Pe(t)+e^{\mathrm{T}}(t)P\dot{e}(t)=\\ &\{(A_2-LC_2+M_{x,z})e(t)+[\Delta A-L\Delta C]x(t-\tau)\}^{\mathrm{T}}Pe(t)+\\ &e^{\mathrm{T}}(t)P\{(A_2-LC_2+M_{x,z})e(t)+[\Delta A-L\Delta C]x(t-\tau)\}=\\ &e^{\mathrm{T}}(t)[(A_2-LC_2+M_{x,z})^{\mathrm{T}}P+P(A_2-LC_2+M_{x,z})]e(t)+\\ &x^{\mathrm{T}}(t-\tau)(\Delta A-L\Delta C)^{\mathrm{T}}Pe(t)+\\ &e^{\mathrm{T}}(t)P(\Delta A-L\Delta C)x(t-\tau).\end{aligned}$$

由假设

$$\begin{aligned}&\|x^{\mathrm{T}}(t-\tau)(\Delta A-L\Delta C)^{\mathrm{T}}Pe(t)+e^{\mathrm{T}}(t)P(\Delta A-L\Delta C)x(t-\tau)\|\leqslant\\ &2\|x(t-\tau)\|_2\cdot\|\Delta A-L\Delta C\|\cdot\|P\|\cdot\|e\|_2\leqslant\\ &2\delta\alpha(1+\|L\|)\lambda_{\max}(P)\|e\|_2,\end{aligned}$$

所以,若取 $Q=(A_2-LC_2+M_{x,z})^{\mathrm{T}}P+P(A_2-LC_2+M_{x,z})$,则有

$$\begin{aligned}&\dot{V}(e(t))\leqslant\\ &e^{\mathrm{T}}(t)Qe(t)+2\delta\alpha(1+\|L\|)\lambda_{\max}(P)\|e\|_2\leqslant\\ &\lambda_{\max}(Q)\|e\|_2^2+2\delta\alpha(1+\|L\|)\lambda_{\max}(P)\|e\|_2.\end{aligned} \tag{6}$$

在以上论述的基础上,可得到以下结论:

定理 1 在假设1,2的前提下,若存在正定矩阵 P 与矩阵 L 使得

$$\lambda_{\max}(Q)<0 \tag{7}$$

成立,则主从系统(1),(2)可达到具有误差界 c_2 的一致同步.这里

$$c_2=-2\delta\alpha(1+\|L\|)\lambda_{\max}(P)k(P)/\lambda_{\max}(Q),$$

其中

$$k(P)=\lambda_{\max}(P)/\lambda_{\min}(P)$$

为矩阵P的条件数.

证 由定理条件及式(6)得

$$\begin{aligned}&\dot{V}(e(t))\leqslant\\ &\lambda_{\max}(Q)\|e\|_2^2+2\delta\alpha(1+\|L\|)\lambda_{\max}(P)\|e\|_2=\\ &\|e\|_2\cdot[\lambda_{\max}(Q)\|e\|_2+2\delta\alpha(1+\|L\|)\lambda_{\max}(P)].\end{aligned}$$

若 $\|e\|_2>-2\delta\alpha(1+\|L\|)\lambda_{\max}(P)/\lambda_{\max}(Q)$,后一项为负.故,在 $\|e(t)\|_2>-2\delta\alpha(1+\|L\|)\lambda_{\max}(P)/\lambda_{\max}(Q)$ 的地方有 $\dot{V}(e(t))<0$,即在超球 $B_1=\{e\mid\|e(t)\|_2\leqslant c_1=-2\delta\alpha(1+\|L\|)\lambda_{\max}(P)/\lambda_{\max}(Q)$ 外误差系统的轨线将呈下降走向.适当选取正数 c,使 Lyapunov 函数水平集 $\varepsilon_0(c)=\{e\mid e^{\mathrm{T}}(t)Pe(t)\leqslant c\}$ 为包含超球域 $B_1=\{e\mid\|e(t)\|_2\leqslant-2\delta\alpha(1+\|L\|)\lambda_{\max}(P)/\lambda_{\max}(Q)\}$ 的最小的水平集.则误差系统的轨线 $e(t)$ 总会进入该水平集 $\varepsilon_0(c)$.于是,对任一初始条件,误差系统的极限集是非空、有界闭集并且属于超椭球 ε_0.因此,主从系统可以达到具比 c_2 更小的误差界的一致同步,如图1所示,$c_2=-2\delta\alpha(1+\|L\|)\lambda_{\max}(P)k(P)/\lambda_{\max}(Q)$,其中 $k(P)=\lambda_{\max}(P)/\lambda_{\min}(P)$ 为矩阵 P 的条件数,δ 如前定义.

$$B_1=\{e\mid\|e(t)\|_2\leqslant c_1=-2\delta\alpha(1+\|L\|)\lambda_{\max}(P)/\lambda_{\max}(Q)\}\subseteq$$

$$\varepsilon_0(c) = \{e \mid e^{\mathrm{T}}(t)Pe(t) \leqslant c\} \subseteq$$

$$B_2 = \{e \mid \|e(t)\|_2 \leqslant c_2\}.$$

这里 c_2 是包含水平集 $\varepsilon_0(c)$ 的最小超球的半径.

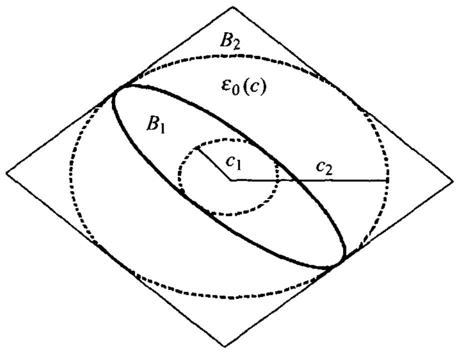

图 1　一致同步的误差界

Fig. 1　Error bound of the uniform synchronization

对上述证明加以改动,可得以下结论:

定理 2　在假设 1,2 的前提下,若存在正定矩阵 P 以及一个正的实常数 β 与矩阵 L 使得矩阵不等式

$$(A_2 - LC_2 + M_{x,z})^{\mathrm{T}}P + P(A_2 - LC_2 + M_{x,z}) + \beta I < 0,$$

则主从系统(1),(2)可达到具有误差界 c_2 的一致同步.这里 $c_2 = 2\delta\alpha(1 + \|L\|)\lambda_{\max}(P)k(P)/\beta$,其中 $k(P) = \lambda_{\max}(P)/\lambda_{\min}(P)$ 为矩阵 P 的条件数.

证　由定理条件得 $Q + \beta I < 0$,所以 $e^{\mathrm{T}}Qe + \beta e^{\mathrm{T}}e < 0$,所以 $e^{\mathrm{T}}Qe < -\beta e^{\mathrm{T}}e < -\beta\|e\|_2^2$. 于是有

$$\dot V < -\beta\|e\|_2^2 + 2\delta\alpha(1 + \|L\|)\lambda_{\max}(P)\|e\|_2 =$$

$$\|e\|_2[-\beta\|e\|_2 + 2\delta\alpha(1 + \|L\|)\lambda_{\max}(P)].$$

类似定理 1 的证明,可得结论成立.

注　在定理 1 的基础上,可以导出同步误差界 ε 与参数不匹配界限 α 之间满足关系

$$\frac{\varepsilon}{\alpha} = -2\lambda_{\max}(P)k(P)/\lambda_{\max}(Q) \equiv c_0.$$

它说明同步误差界与参数的不匹配界限大致呈正比关系(参见文献[5]).因此,为达到鲁棒性要求,本文的目标是在满足矩阵不等式 $Q < 0$ 的前提下最小化 c_0,它是下述约束最优化问题:

$$\min_{P,L} -\lambda_{\max}(P)k(P)/\lambda_{\max}(Q),$$

$$\lambda_{\max}(Q) < 0,$$

$$P = P^{\mathrm{T}} > 0.$$

3　非恒同 Chua's 电路的数值模拟(Simulation of the nonidentical Chua's circuit)

考虑 Chua's 电路

$$\dot x = A_1x + g(x),$$

$$p(t) = C_1x.$$

其中

$$x = (x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}},$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} -c+0.1 & c & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -\beta & 0 \end{pmatrix},$$

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1.1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$g(x) = \begin{pmatrix} -cf(x_1) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

这里 $c > 0, \beta > 0, a < b < 0$, 非线性项

$$f(x_1) = bx_1 + \frac{1}{2}(a-b)(|x_1+1| - |x_1-1|).$$

将该系统作为主系统,显然有

$$\dot x(t-\tau) = A_1x(t-\tau) + g(x(t-\tau)). \tag{8}$$

从系统可取为

$$\dot z(t) = A_2z(t) + g(z(t)) + L(x(t-\tau) - z(t)),$$

$$q = C_2z(t).$$

其中: $z = (z_1, z_2, z_3)^{\mathrm{T}}, A_2 = \begin{pmatrix} -c & c & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -\beta & 0 \end{pmatrix}, C_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, g(z) = \begin{pmatrix} -cf(z_1) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} l_1 & 0 & 0 \\ 0 & l_2 & 0 \\ 0 & 0 & l_3 \end{pmatrix}.$

于是,误差系统

$$\dot e(t) = (A_2 - LC_2)e(t) + [g(x(t-\tau)) - g(z(t))] + [\Delta A - L\Delta C]x(t-\tau).$$

其中 $\Delta A = \Delta C = \begin{pmatrix} 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

注意到(见文献[6])可取 k_{x_1,z_1} 满足

$$f(x_1) - f(z_1) = k_{x_1,z_1}(x_1 - z_1). \tag{9}$$

其中 k_{x_1,z_1} 依赖于 x_1, z_1,并在区间$[a,b]$中变化,即 $a \leqslant k_{x_1,z_1} \leqslant b < 0$(见文献[6,7]).则有

$$g(x(t-\tau)) - g(z) =$$

$$\begin{pmatrix} -ck_{x_1,z_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t-\tau) - z_1(t) \\ x_2(t-\tau) - z_2(t) \\ x_3(t-\tau) - z_3(t) \end{pmatrix} =$$

$$M_{x,z}e(t).$$

于是,若取 $P = I$, 则

$$(A_2 + M_{x,z})^{\mathrm{T}}P + P(A_2 + M_{x,z}) =$$

$$\begin{pmatrix} -2c-2ck_{x_1,z_1} & c+1 & 0 \\ c+1 & -2 & 1-\beta \\ 0 & 1-\beta & 0 \end{pmatrix}.$$

由 Gerschgorin 定理,为使 $\lambda_{\max}(Q)<0$, 可取

$$l_1 > \frac{1}{2}(-2c-2ck_{x_1,z_1}+|1+c|),$$

$$l_2 > \frac{1}{2}(-2+|1+c|+|1-\beta|),$$

$$l_3 > \frac{1}{2}(|1-\beta|).$$

图2为参数 $c=9.78,\beta=14.97,a=-1.31,b=-0.75$ 时主从系统的误差曲线.可以看出,此时,主从系统达到一致同步,从而验证了定理1的结论.这里,根据前述分析,取 $l_1=9,l_2=12,l_3=8$.左为 $x(t)-z(t)$,右为 $x(t-\tau)-z(t)$,τ 取50倍的步长;图3与图2类似,只是取 $C_1=C_2=I$ 的情形.图中 e 为误差,n 为迭代次数.

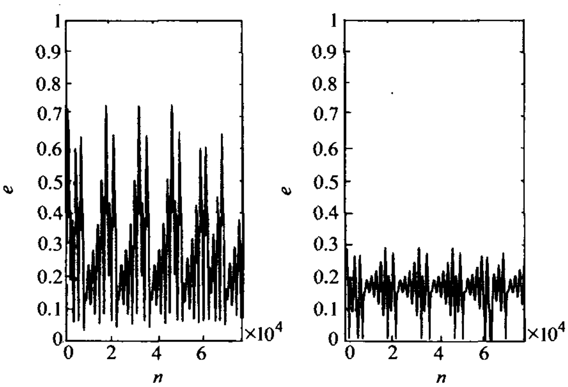

图2 系统误差

Fig. 2 System errors

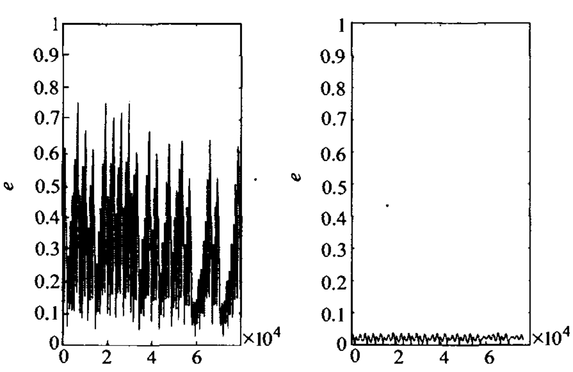

图3 系统误差

Fig. 3 System errors

4 结论(Conclusion)

本文利用 Lyapunov 方法讨论了非恒同主从耦合混沌系统之间具一定参数误差时的一致同步问题.给出了一种时滞状态反馈控制方法,并讨论了同步的鲁棒性,得到了一致同步的充分条件,结合 Chua's 电路进行了数值模拟.

进一步,可以研究一致同步误差界的更精确的估计和控制以及当主从系统(1),(2)的非线性部分 $g(\cdot)$ 存在非恒同时的一致同步问题.

参考文献(References):

[1] CURRAN P F, CHUA L O. Absolute stability theory and the synchronization problem [J]. *Int J of Bifurcation and Chaos*, 1997, 7(6): 1375 - 1383.

[2] SUYKENS J A K, CURRAN P F CHUA L O. Master-slave synchronization using dynamic output feedback [J]. *Int J of Bifurcation and Chaos*, 1997, 7(3): 671 - 679.

[3] YALCIN M E, SUYKENS J A K, VANDEWALLE J. Master-slave synchronization of Lur'e systems with time-delay [J]. *Int J of Bifurcation and Chaos*, 2001, 11(6): 1707 - 1722.

[4] LIAO X X, CHEN G R. Chaos synchronization of general Lur'e systems via time-delay feedback control [J]. *Int J of Bifurcation and Chaos*, 2003, 13(1): 207 - 213.

[5] SUYKENS J A K, CURRAN P F, CHUA L O. Robust synthesis for master-slave synchronization of Lur'e systems [J]. *IEEE Trans on Circuits and Systems-I: Fundamental Theory and Applications*, 1999, 46(7): 841 - 850.

[6] JIANG G P, WALLACE T K, CHEN G R. A simple global synchronization criterion for coupled chaotic system [J]. *Chaos Solitons and Fractals*, 2003, 15(5): 925 - 935.

[7] JIANG G P, ZHENG W X, CHEN G R. Global chaos synchronization with channel time-delay [J]. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2004, 20(2): 267 - 275.

作者简介:

王建根 (1964—),男,中山大学数学与计算科学学院博士生,佛山职业技术学院副教授,主要研究方向为混沌控制与混沌同步及其应用, E-mail: openedu@163.com;

赵 怡 (1940—),男,教授,博士生导师,主要研究方向为动力系统与控制系统.