文章编号：1000-8152(2005)04-0567-06

一类非线性不确定时滞系统的混杂状态反馈 H_∞ 鲁棒控制

聂 宏[1,2]，赵 军[1]
(1.东北大学 信息科学与工程学院 教育部流程工业综合自动化重点实验室，辽宁 沈阳 110004；
2.辽宁石油化工大学 理学院，辽宁 抚顺 113001)

摘要：利用混杂状态反馈控制策略研究一类非线性不确定时滞系统的 H_∞ 鲁棒控制问题. 假定在给定的控制器集合中有有限个备选的状态反馈控制器，并且每个单一的连续控制器都不能使系统具有鲁棒 H_∞ 性能. 当控制器的增益矩阵已知时，基于单 Lyapunov 函数技术和凸组合条件给出控制器切换方案以确保非线性不确定时滞系统具有鲁棒 H_∞ 性能. 当控制器的增益矩阵未知时，使用多 Lyapunov 函数技术得到了问题可解的另一个充分条件，同时还给出了混杂状态反馈 H_∞ 控制器的设计.

关键词：控制器切换；非线性不确定时滞系统；单 Lyapunov 函数；多 Lyapunov 函数；线性矩阵不等式(LMI)
中图分类号：TP273　　**文献标识码**：A

Hybrid state feedback H-infinity robust control for a class of time-delay systems with nonlinear uncertainties

NIE Hong[1,2], ZHAO Jun[1]
(1. Key Lab of Process Industry Automation of Ministry of Education, School of Information Science and Engineering, Northeastern University, Shenyang Liaoning 110004, China;
2. Faculty of Science, Liaoning University of Petroleum & Chemical Technology, Fushun Liaoning 113001, China)

Abstract: The problem of H-infinity robust control for a class of time-delay systems with nonlinear uncertainties is addressed through hybrid state feedback strategy. Suppose that there exist finite candidate controllers in a given set of controllers, and none of the individual controllers makes the systems stabilizable with H-infinity-norm bound. When the gain matrices of controllers are known, based on single Lyapunov function technique and convex combination condition, a switching law under which the systems are stable with H-infinity-norm bound is constructed. When the gain matrices are unknown, by employing the multiple Lyapunov function technique, another sufficient condition for the problem is derived, and the state feedback controllers and the switching law are also designed.

Key words: controller switching; time-delay systems with nonlinear uncertainties; single Lyapunov function; multiple Lyapunov function; linear matrix inequality (LMI)

1 引言(Introduction)

近年来，控制器切换问题引起了人们的广泛关注. 研究这一问题主要基于以下原因：1) 连续动态反馈控制器有时由于其过于复杂或造价太高，在工程实际中难以实现；2) 有时不允许使用连续的控制如空调温度的分段自动调节需要几个控制器和一条决定如何切换的切换规则；3) 在许多控制问题中，由于物质条件和复杂性的限制制约了可获得的控制器选择，有时控制系统只能使用事先指定的控制器，即控制行为由有限个给定的控制器之间的切换所决定. 这种控制器切换的典型实例包括计算机磁盘驱动器[1]、某些机器人控制系统[2]和柔性制造系统[3]等；4) 多控制器的设计为系统获得其它性能要求，如 H_2 范数约束和可靠控制等提供了更多的可能性；5) 混杂反馈通常能为系统提供较好的鲁棒性和其它性能. 在实际系统中，确实存在着不能输出反馈镇定但可用简单的控制器切换来镇定的系统[4]. 文献[5]利用混杂输出反馈控制策略研究了一类确定性线性系统的镇定问题. 但它没有考虑系统同时具有时滞、非线性不确定及外部扰动输入的情形.

收稿日期：2003-05-26；收修改稿日期：2004-07-28.
基金项目：国家自然科学基金资助项目(60274009)；高等学校博士专项科研基金资助项目(20020145007)；辽宁省自然科学基金资助项目(20032020)；辽宁省教育厅青年基金资助项目(2004F100).

在许多实际系统中,由于测量的不灵敏、信号的传输和元件的老化等原因,系统中不确定和时滞是普遍存在的.并且是造成系统不稳定和性能变坏的主要原因.近年来,人们对不确定时滞系统的 H_∞ 稳定性问题进行了广泛的研究.文献[6]给出了不确定线性时滞系统无记忆 H_∞ 鲁棒控制器存在的充分条件.考虑到实际控制系统所具有的非线性特性,文献[7]研究了一类非线性不确定时滞系统状态反馈 H_∞ 鲁棒镇定问题,但没有研究其混杂状态反馈 H_∞ 鲁棒镇定问题.

综上可知,利用混杂反馈控制策略实现非线性不确定时滞系统的 H_∞ 鲁棒镇定是一个具有实际意义的问题.本文将致力于这一问题.分别就控制器集合中的每一控制器均精确已知或均未知两种情况,通过切换律的设计,给出系统 H_∞ 鲁棒镇定问题可解的两个充分条件,同时还给出了切换信号和混杂控制器的设计.最后,以一个仿真实例说明结论的有效性.

2 系统的描述及引理(System description and lemma)

考虑如下非线性不确定时滞系统

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=Ax(t)+\Delta f_1(x(t),t)+A_dx(t-d)+\\ \qquad\Delta f_2(x(t-d),t)+B_1w(t)+B_2u(t),\\ z(t)=Cx(t),\\ x(t)=\phi(t),\ t\in[-d,0].\end{cases}\tag{1}$$

其中: $x\in\mathbb{R}^n$ 为状态, $u\in\mathbb{R}^m$ 为控制输入, $w\in\mathbb{R}^p$ 为属于 $L_2[0,\infty)$ 的扰动输入, $z\in\mathbb{R}^q$ 为被控输出; A,A_d,B_1,B_2 和 C 为具有适当维数的已知常值矩阵; $\Delta f_1,\Delta f_2$ 为具有适当维数的非线性连续可微函数向量; d 为时滞常数; ϕ 为 $[-d,0]$ 上的连续向量函数,表示系统(1)的初始状态,即 $\phi\in C[-d,0]$.

类似于文献[7],做如下标准的假设:

假设 非线性不确定函数 Δf_1 和 Δf_2 具有如下形式:

$$\begin{aligned}&\Delta f_1(x(t),t)=E_1\delta_f(x(t),t),\\ &\Delta f_2(x(t-d),t)=E_2\delta_f(x(t-d),t).\end{aligned}\tag{2}$$

其中: E_1,E_2 为已知常值矩阵, $\delta_f(\cdot,\cdot)$ 为未知非线性连续可微函数向量,满足增益有界条件

$$\|\delta_f(x(t),t)\|\leqslant\|w_fx(t)\|,\ \forall x\in\mathbb{R}^n,\ \forall t\in\mathbb{R}.\tag{3}$$

这里: w_f 为给定的加权矩阵, $\|\cdot\|$ 表示 Euclidean 范数.

定义 1 考虑 $u=0$ 时的系统(1).给定 $\gamma>0$,对满足式(3)的任意 Δf_1 和 Δf_2,如果 a)当 $w(t)=0$ 时,系统是渐近稳定的; b)在零初始条件 $x(t)=0,t\in[-d,0]$ 下,有 $\|z(t)\|_2\leqslant\gamma\|w(t)\|_2$ 成立,即具有有限的 L_2 增益,则称系统(1)($u=0$)具有鲁棒 H_∞ 性能.

定义 2 对于系统(1),如果存在一个无记忆线性状态反馈控制律 $u(t)=Lx(t)$,使得系统(1)的闭环系统具有鲁棒 H_∞ 性能,则称系统(1)可经状态反馈 H_∞ 鲁棒镇定.

文献[7]给出了系统(1)可经状态反馈 H_∞ 鲁棒镇定的一个充分条件.

引理 1 给定 $\gamma>0$,如果存在一个常数矩阵 L 和标量 $\lambda_f>0$,使得 Riccati 不等式

$$(A+B_2L)^{\mathrm{T}}P+P(A+B_2L)+P\tilde{B}_s\tilde{B}_s^{\mathrm{T}}P+\tilde{C}_s^{\mathrm{T}}\tilde{C}_s<0\tag{4}$$

存在正定对称解 P,其中

$$\tilde{B}_s=[\gamma^{-1}B_1\quad\gamma_fB_s],\ B_s=[E_1\quad E_2\quad A_d],$$

$$\tilde{C}_s=\begin{bmatrix}C\\ \lambda_f^{-1}C_s\end{bmatrix},\ C_s=\begin{bmatrix}\sqrt{2}w_f\\ I\end{bmatrix},$$

则系统(1)可经状态反馈 H_∞ 鲁棒镇定.

3 问题的提出和主要结果(Problem formulation and main results)

对于系统(1),本文考虑的控制律 $u(t)$ 由下列 k 个状态反馈控制器

$$\begin{cases}u_1(t)=L_1x(t),\\ u_2(t)=L_2x(t),\cdots,u_k(t)=L_kx(t)\end{cases}\tag{5}$$

之间的切换而产生,其中 $L_1,\cdots,L_k$ 为全部已知或全部未知的控制器增益矩阵.即考虑下面的混杂状态反馈控制器[8]

$$u(t)=L_{i_x}x(t),\ \forall t\in[0,\infty),\ 这里\ i_x\triangleq i(x(\cdot)).\tag{6}$$

由系统(1)和混杂状态反馈 $u=L_ix$ 构成的闭环系统为

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=A_ix(t)+\Delta f_1(x(t),t)+A_dx(t-d)+\\ \qquad\Delta f_2(x(t-d),t)+B_1w(t),\\ z(t)=Cx(t),\\ x(t)=\phi(t),\ t\in[-d,0].\end{cases}\tag{7}$$

其中 $A_i=A+B_2L_i,i\in K=\{1,2,\cdots,k\}$.显然,系统(7)是非线性不确定时滞切换系统.

在系统(7)中,相应于切换信号 i 的切换序列表

示为

$$\Sigma:\{x_0;(i_0,t_0),(i_1,t_1),\cdots,(i_j,t_j),\cdots,i_j\in K,j\in N\}. \tag{8}$$

其中: t_0 为初始时刻, x_0 为初始状态, N 表示自然数集. 当 $t_j\leqslant t<t_{j+1}$ 时, 切换系统(7)的第 i_j 个子系统处于激活状态.

本文要解决以下问题: 在系统状态的完整信息可获得的假设下, 去构造切换律 $i:[0,+\infty)\to\{1,2,\cdots,k\}$, 使系统(7)具有鲁棒 H_∞ 性能. 本文将给出切换律两种设计方案.

注 1 假设在控制器集合(5)中, 单一的状态反馈控制器均不能使系统(1) H_∞ 鲁棒镇定. 因为如果是这种情形的话, 问题的解将是平凡的.

设计方法 1 单 Lyapunov 函数方法.

考虑状态反馈控制器的增益矩阵为已知的情形. 令 $r_{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k}(A_1,A_2,\cdots,A_k)$ 表示同维矩阵 $A_1,A_2,\cdots,A_k$ 凸组合的集合, 即

$$r_{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k}(A_1,A_2,\cdots,A_k)=\{\sum_{i=1}^k\alpha_iA_i:\alpha_i\in[0,1],\sum_{i=1}^k\alpha_i=1\}.$$

定理 1 给定 $\gamma>0$, 如果存在矩阵 $\bar{A}\in r_{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k}(A_1,A_2,\cdots,A_k)$, 对称正定矩阵 P 及适当的标量 $\lambda_f>0$, 满足不等式

$$\bar{A}^{\mathrm{T}}P+P\bar{A}+P\tilde{B}_s\tilde{B}_s^{\mathrm{T}}P+\tilde{C}_s^{\mathrm{T}}\tilde{C}_s<0, \tag{9}$$

则一定存在切换律 $i:[0,+\infty)\to\{1,2,\cdots,k\}$, 使系统(7)具有鲁棒 H_∞ 性能.

证 因为 $\bar{A}\in r_{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k}(A_1,A_2,\cdots,A_k)$, 所以存在 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k\in(0,1)$, $\sum_{i=1}^k\alpha_i=1$, 使得 $\bar{A}=\sum_{i=1}^k\alpha_iA_i$. 将 $\bar{A}$ 代入式(9), 则对 $\forall x(t)\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$, 有

$$\sum_{i=1}^k\alpha_ix^{\mathrm{T}}(A_i^{\mathrm{T}}P+PA_i+P\tilde{B}_s\tilde{B}_s^{\mathrm{T}}P+\tilde{C}_s^{\mathrm{T}}\tilde{C}_s)x<0. \tag{10}$$

令

$$\Omega_i=\{x\mid x^{\mathrm{T}}(A_i^{\mathrm{T}}P+PA_i+P\tilde{B}_s\tilde{B}_s^{\mathrm{T}}P+\tilde{C}_s^{\mathrm{T}}\tilde{C}_s)x<0\},\ i\in K. \tag{11}$$

由式(10)可知 $\mathbb{R}^n\setminus\{0\}=\bigcup_{i=1}^k\Omega_i$.

构造集合: $\tilde{\Omega}_1=\Omega_1,\tilde{\Omega}_2=\Omega_2\setminus\tilde{\Omega}_1,\cdots,\tilde{\Omega}_k=\Omega_k\setminus\bigcup_{i=1}^{k-1}\tilde{\Omega}_i$. 显然 $\mathbb{R}^n\setminus\{0\}=\bigcup_{i=1}^k\tilde{\Omega}_i$, 并且对于任意的 $i,j\in K$, 当 $i\neq j$ 时, 有 $\tilde{\Omega}_i\bigcap\tilde{\Omega}_j=\phi$.

设计切换律如下:

$$i(x)=i,\text{如果 } x(t)\in\tilde{\Omega}_i. \tag{12}$$

首先证明切换系统(7)的渐近稳定性. 取 Lyapunov 函数为 $V(x,t)=x^{\mathrm{T}}Px+\lambda_f^{-2}\int_{t-d}^{t}x^{\mathrm{T}}Qx\mathrm{d}\tau$, 其中 P 和 Q 为正定对称阵, P 满足不等式(9), Q 待定. 当 $w=0$ 时,

$$\dot{V}(x,t)=x^{\mathrm{T}}(A_i^{\mathrm{T}}P+PA_i+\frac{1}{\lambda_f^2}Q)x+2x^{\mathrm{T}}PB_s\begin{bmatrix}\delta_f(x,t)\\ \delta_f(x(t-d),t)\\ x(t-d)\end{bmatrix}-\frac{1}{\lambda_f^2}x^{\mathrm{T}}(t-d)Qx(t-d).$$

利用不等式

$$2x^{\mathrm{T}}PE_1\delta_f(x,t)\leqslant\lambda_f^2x^{\mathrm{T}}PE_1E_1^{\mathrm{T}}Px+\lambda_f^{-2}x^{\mathrm{T}}w_f^{\mathrm{T}}w_fx,$$

$$2x^{\mathrm{T}}PE_2\delta_f(x(t-d),t)\leqslant\lambda_f^2x^{\mathrm{T}}PE_2E_2^{\mathrm{T}}Px+\lambda_f^{-2}x^{\mathrm{T}}(t-d)w_f^{\mathrm{T}}w_fx(t-d),$$

$$2x^{\mathrm{T}}PA_dx(t-d)\leqslant\lambda_f^2x^{\mathrm{T}}PA_dA_d^{\mathrm{T}}Px+\lambda_f^{-2}x^{\mathrm{T}}(t-d)x(t-d),$$

并取 $Q=w_f^{\mathrm{T}}w_f+I>0$, 可得

$$\dot{V}(x,t)\leqslant x^{\mathrm{T}}(A_i^{\mathrm{T}}P+PA_i+\lambda_f^2PB_sB_s^{\mathrm{T}}P+\lambda_f^{-2}C_s^{\mathrm{T}}C_s)x. \tag{13}$$

由切换域的分划(11)和切换律的设计(12)可知, $\dot{V}<0$ 对满足式(3)的任意 Δf_1 和 Δf_2 以及 $d\geqslant0$ 均成立, 由单 Lyapunov 函数技术可知, 系统(7)是渐近稳定的.

下面证明在零初始条件下, 被控输出 z 满足 $\|z\|_2\leqslant\gamma\|w\|_2$. 为此引入辅助函数 $J=\int_0^\infty(z^{\mathrm{T}}z-\gamma^2w^{\mathrm{T}}w)\mathrm{d}t$. 在零初始条件下, 对任意非零的 $w\in L_2[0,\infty)$, 有

$$J\leqslant\int_0^\infty[z^{\mathrm{T}}z-\gamma^2w^{\mathrm{T}}w+\dot{V}(x,t)]\mathrm{d}t. \tag{14}$$

由式(13)可知, 对任意非零 $w\in L_2[0,\infty)$,

$$\dot{V}(x,t)\leqslant x^{\mathrm{T}}(A_i^{\mathrm{T}}P+PA_i+\lambda_f^2PB_sB_s^{\mathrm{T}}P+\lambda_f^{-2}C_s^{\mathrm{T}}C_s)x+2x^{\mathrm{T}}PB_1w.$$

将上式代入式(14)中, 并使用不等式 $2x^{\mathrm{T}}PB_1w\leqslant\gamma^{-2}x^{\mathrm{T}}PB_1B_1^{\mathrm{T}}Px+\gamma^2w^{\mathrm{T}}w$, 可得

$$J\leqslant\sum_{j\in N}\int_{t_j}^{t_{j+1}}x^{\mathrm{T}}(A_{i_j}^{\mathrm{T}}P+PA_{i_j}+P\tilde{B}_s\tilde{B}_s^{\mathrm{T}}P+\tilde{C}_s^{\mathrm{T}}\tilde{C}_s)x\mathrm{d}t.$$

由切换域的分划(11)和切换律的设计(12)可知 $J<0$, 即对 $\forall w\in L_2[0,\infty)$ 和满足式(3)的任意 Δf_1 和 Δf_2 以及 $d\geqslant0$, 有 $\|z\|_2\leqslant\gamma\|w\|_2$ 成立.

注 2 如果不确定性函数 Δf_1 和 Δf_2 是线性的，即 $\Delta f_1 = E_1\sum(t)w_f x = E_1\delta_f(x,t), \Delta f_2 = E_2\sum(t)w_f x = E_2\delta_f(x,t), \sum^{\mathrm{T}}(t)\sum(t) \leqslant I$. 显然 δ_f 满足条件(3)，即增益有界条件. 因此定理1的结果是线性情形的一种推广.

设计方法 2 多 Lyapunov 函数方法.

在状态反馈控制器的增益矩阵未知的情况下，使用多 Lyapunov 函数方法设计切换律 $i:[0,+\infty)\to\{1,2,\cdots,k\}$，同时给出控制器的设计方案，使得系统(7)具有鲁棒 H_∞ 性能.

定理 2 给定 $\gamma > 0$，如果存在常数 $\beta_{ji} \geqslant 0$(或 $\beta_{ji} \leqslant 0$)，$i,j \in K$，及适当的正常数 $\lambda_f > 0$ 和 $\mu > 0$，使得下面的不等式

$$-A^{\mathrm{T}}P_i - P_iA + \beta_{ji}(P_j - P_i) - P_i(\tilde{B}_s\tilde{B}_s^{\mathrm{T}} - \mu^{-2}B_2B_2^{\mathrm{T}})P_i - \tilde{C}_s^{\mathrm{T}}\tilde{C}_s > 0 \tag{15}$$

存在正定对称解 P_i，则如果选择增益阵

$$L_i = -1/2\mu^{-2}B_2^{\mathrm{T}}P_i, \tag{16}$$

那么一定存在切换律 $i:[0,+\infty)\to\{1,2,\cdots,k\}$，使得系统(7)具有鲁棒 H_∞ 性能.

证 不失一般性，假定 $\beta_{ji} \geqslant 0$. 将式(16)代入式(15)，并令 $A + B_2L_i \triangleq A_i$，可得

$$-A_i^{\mathrm{T}}P_i - P_iA_i + \beta_{ji}(P_j - P_i) - P_i\tilde{B}_s\tilde{B}_s^{\mathrm{T}}P_i - \tilde{C}_s^{\mathrm{T}}\tilde{C}_s > 0. \tag{17}$$

由 S-procedure 可知：如果 $x^{\mathrm{T}}(P_i - P_j)x \geqslant 0$ 且 $x \neq 0$，那么

$$x^{\mathrm{T}}(A_i^{\mathrm{T}}P_i + P_iA_i + P_i\tilde{B}_s\tilde{B}_s^{\mathrm{T}}P_i + \tilde{C}_s^{\mathrm{T}}\tilde{C}_s)x < 0. \tag{18}$$

令

$$\Omega_i = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x^{\mathrm{T}}(P_i - P_j)x \geqslant 0,\ x \neq 0\}, \tag{19}$$

这里，关于式(19)说明如下：对每个固定的 i，Ω_i 中的元素 x 为 $k-1$ 个不等式 $x^{\mathrm{T}}(P_i - P_j)x \geqslant 0$ 的公共解，其中 $j \in K, j \neq i$. 显然 $\bigcup_{i=1}^{k}\Omega_i = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

切换律设计如下：$i(x) = i$，如果 $x(t) \in \Omega_i$.

考虑 Lyapunov 函数

$$V_i(x,t) = x^{\mathrm{T}}P_ix + \lambda_f^{-2}\int_{t-d}^{t}x(\tau)^{\mathrm{T}}(w_f^{\mathrm{T}}w_f + I)x(\tau)\mathrm{d}\tau.$$

其中 P_i 为满足式(15)的正定对称矩阵. 当 $x(t) \in \Omega_i$ 时，选取 Lyapunov 函数为 $V_i(x,t)$，求导可得

$$\dot{V}_i(x,t) = x^{\mathrm{T}}(A_i^{\mathrm{T}}P_i + P_iA_i + \lambda_f^2P_iB_sB_s^{\mathrm{T}}P_i + \lambda_f^{-2}C_s^{\mathrm{T}}C_s)x. \tag{20}$$

由切换律的设计可知 $\dot{V}_i(x,t) < 0$.

注意到当 $x^{\mathrm{T}}(P_i - P_j)x \geqslant 0$ 且 $x \neq 0$ 时，有式(20)成立. 则在任何切换时刻 t_j，有 $V_{\sigma(t_j)}(x(t_j)) \leqslant \lim\limits_{t\to t_j^-}V_{\sigma(t)}(x(t))$ 成立，由多 Lyapunov 函数技术可知[9]，在所设计的切换律下，系统(7)是渐近稳定的.

在零初始条件 $x(t_0) = 0$ 下，对任意非零的 $w \in L_2[0,\infty)$，有

$$J = \sum_{j\in N}\int_{t_j}^{t_{j+1}}(z^{\mathrm{T}}z - \gamma^2w^{\mathrm{T}}w)\mathrm{d}t \leqslant$$

$$\sum_{j\in N}\Big(\int_{t_j}^{t_{j+1}}[z^{\mathrm{T}}z - \gamma^2w^{\mathrm{T}}w + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x^{\mathrm{T}}P_{i_j}x)]\mathrm{d}t - x^{\mathrm{T}}P_{i_j}x\,\Big|_{t_j}^{t_{j+1}}\Big) \leqslant$$

$$\sum_{j\in N}\int_{t_j}^{t_{j+1}}x^{\mathrm{T}}(A_{i_j}^{\mathrm{T}}P_{i_j} + P_{i_j}A_{i_j} + P_{i_j}\tilde{B}_s\tilde{B}_s^{\mathrm{T}}P_{i_j} + \tilde{C}_s^{\mathrm{T}}\tilde{C}_s)x\mathrm{d}t -$$

$$\sum_{j\in N}x^{\mathrm{T}}(t_{j+1})(P_{i_j} - P_{i_{j+1}})x(t_{j+1}).$$

考虑 $V_{\sigma(t_j)}(x(t_j)) \leqslant \lim\limits_{t\to t_j}V_{\sigma(t)}(x(t))$，则对任意 $j \in N$，有

$$x^{\mathrm{T}}(t_{j+1})(P_{i_j} - P_{i_{j+1}})x(t_{j+1}) \geqslant 0. \tag{21}$$

利用切换律的设计可得 $J < 0$，即对于任意非零 $w \in L_2[0,\infty)$，有 $\|z\|_2 < \gamma\|w\|_2$ 成立.

注 3 如果存在某个 $\beta_{ji} = 0$，式(15)和(16)即为文献[7]中相应的结果. 此时，切换信号将固定在第 i 个稳定的子系统上，不必进行切换. 这是一种平凡的情形.

注 4 从定理2的证明可知，如果常数 $\beta_{ji} \leqslant 0$，则切换律设计为 $i = \arg\min\limits_{j\in K}\{x^{\mathrm{T}}P_jx\}$.

注 5 当 β_{ji} 为已知常量时，式(17)可转化为下列LMIs：

$$\begin{bmatrix} A_i^{\mathrm{T}}P_i + P_iA_i + \beta_{ji}(P_i - P_j) + \tilde{C}_s^{\mathrm{T}}\tilde{C}_s & P_i\tilde{B}_s \\ \tilde{B}_s^{\mathrm{T}}P_i & -I \end{bmatrix} < 0. \tag{22}$$

4 仿真例子(Example)

考虑系统(1)，它的参数如下：

$$\begin{cases} A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -4 \end{bmatrix},\ A_d = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.2 \end{bmatrix}, \\ B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ C = [0\quad 1],\ E_1 = E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ \delta_f = \begin{bmatrix} \sin x_1(t) \\ \sin x_2(t) \end{bmatrix},\ w_f = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{cases} \tag{23}$$

设系统(1)有两个备选的状态反馈控制器

$$\begin{cases} u_1 = L_1x = \begin{bmatrix} -9 & -1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}x, \\ u_2 = L_2x = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & -7 \end{bmatrix}x. \end{cases} \tag{24}$$

当 $\alpha = 1/2$ 时，$\bar{A} = \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$.

将 Riccati 方程

$$\bar{A}^{\mathrm{T}}P + P\bar{A} + P\bar{B}_s\bar{B}_s^{\mathrm{T}}P + \bar{C}_s^{\mathrm{T}}\bar{C}_s < 0$$

转化为 LMIs：

$$\begin{bmatrix} \bar{A}^{\mathrm{T}}P + P\bar{A} + C^{\mathrm{T}}C + \lambda_f^{-2}C_s^{\mathrm{T}}C_s & PB_s & PB_1 \\ B_s^{\mathrm{T}}P & -\lambda_f^{-2}I & 0 \\ B_1^{\mathrm{T}}P & 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0,$$

求解可得

$$P = \begin{bmatrix} 0.1442 & 0 \\ 0 & 0.3044 \end{bmatrix},$$

$$\gamma = 0.2567,\ \lambda_f = 2.3939.$$

根据定理 1 的证明，可得控制器的切换域为

$$\Omega_1 = \{x \mid -2.0938x_1^2 + 3.2154x_2^2 < 0\},$$

$$\Omega_2 = \{x \mid 1.3670x_1^2 - 4.0898x_2^2 < 0\}.$$

由图 4 所示. 容易看出，无论控制器 u_1 还是控制器 u_2 都不能镇定系统(23)(见图 1 和图 2)，但是利用在控制器 u_1 和 u_2 间切换的办法可以镇定该系统(见图 3).

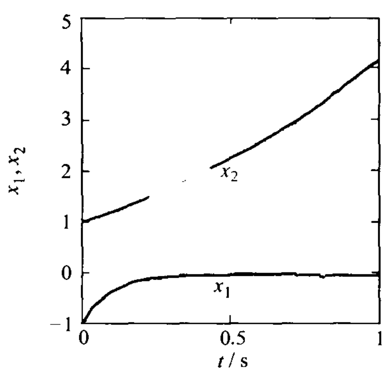

图 1　系统(23)在控制器 u_1 下的状态响应曲线

Fig. 1　State response of the system (23) under u_1

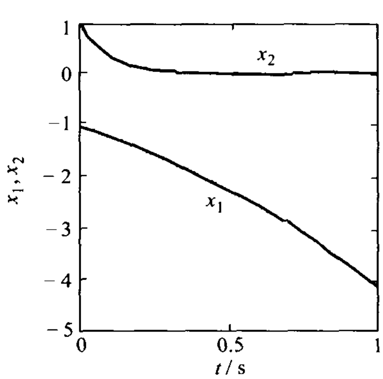

图 2　系统(23)在控制器 u_2 下的状态响应曲线

Fig. 2　State response of the system (23) under u_2

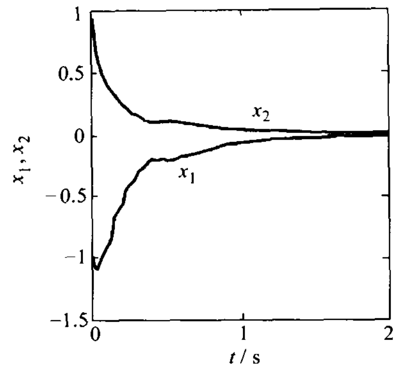

图 3　系统(23)在混杂控制器下的状态响应曲线

Fig. 3　State response of the system (23) under hybrid controller

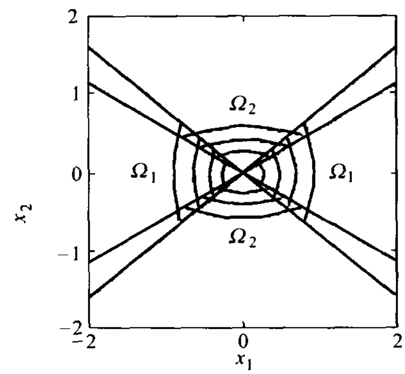

图 4　混杂控制器的切换域

Fig. 4　Switching region of hybrid controller

5　结论(Conclusion)

在本文中研究了一类具有非线性不确定性的时滞系统经混杂状态反馈 H_∞ 鲁棒镇定问题. 利用单 Lyapunov 函数技术和多 Lyapunov 函数技术给出了问题可解的两个充分条件和切换律的两种设计方案，这两种方案互不重合，互为补充. 当控制器的增益矩阵待设计时，多 Lyapunov 函数技术显示出自身的优势，设计切换律的同时还给出了混杂控制器的设计.

参考文献(References)：

[1] GOLLU A, VARAIYA P P. Hybrid dynamical systems [C] // *Proc of the 28 rd Conf on Decision and Control*. Tampa, Florida, USA: Omnipress, 1989: 2708 - 2712.

[2] JEON D, TOMIZUKA M. Learning hybrid force and position control of robot manipulators [J]. *IEEE Trans on Robotics Automata*, 1996, 9(4): 423 - 431.

[3] GERSHWIN S B. Hierarchical flow control: A framework for scheduling and planning discrete events in manufacturing systems [J]. *Proceeding of IEEE*, 1989, 77(1): 195 - 209.

[4] HU B, ZHAI G S, MICHEL A N. Hybrid static output feedback stabilization of second-order linear time-invariant systems [J]. *Linear Al-*

gebra and Its Applications, 2002, 351(15): 475 - 485.

[5] LIBERZON D, MORSE A S. Basic problems in stability and design of switched systems [J]. *IEEE Control Systems Magazine*, 1999, 19(5): 59 - 70.

[6] YU L, CHU J, SU H. Robust memoryless H_∞ controller design for linear time-delay systems with norm-bounded time-varying uncertainty [J]. *Automatica*, 1996, 32(12): 1759 - 1762.

[7] 王德进. H_2 和 H_∞ 优化控制理论[M]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学出版社, 2001.
(WANG Dejin. *Theory of H_2 and H_∞ Optimization Control* [M]. Harbin: Harbin Industry University Press, 2001.)

[8] SKAFIDAS E, EVANS R J, SAVKIN A V, et al. Stability results for switched controller systems [J]. *Automatica*, 1999, 35(4): 553 - 564.

[9] BRANICKY M S. Multiple Lyapunov functions and other analysis tools for switched and hybrid systems [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1998, 43(4): 475 - 482.

作者简介:

聂 宏 (1965—),女,博士,2004年在东北大学获工学博士学位,现在东北大学做博士后研究工作,主要研究兴趣包括非线性与切换系统、鲁棒控制,E-mail: hongnie_001@163.com;

赵 军 (1957—),男,东北大学信息科学与工程学院教授,博士生导师,中国自动化学会控制理论专业委员会委员,1991年在东北大学获工学博士学位,主要研究兴趣包括非线性与混杂系统、几何控制理论、切换控制和鲁棒控制,E-mail: zdongbo@pub.ln.cninfo.net.