文章编号：1000-8152(2005)04-0632-05

非线性时变系统部分指数稳定的一次近似

蹇继贵[1]，廖晓昕[2]

(1.三峡大学 理学院，湖北 宜昌 443002；2.华中科技大学 控制科学与工程系，湖北 武汉 430074)

摘要：通过非线性系统的线性化方法，讨论了一类非线性时变微分系统的解关于部分变量指数稳定的一次近似.利用齐次线性系统的Cauchy矩阵解、截断Cauchy矩阵解和Gronwall-Bellman不等式，得到了线性系统的解部分指数稳定确保原非线性系统的解局部部分指数稳定的充分条件，其中一些结果可以保证部分变量有不同的指数收敛率.最后给出了一些实例说明了所用方法的有效性.

关键词：非线性时变系统；部分指数稳定；Cauchy矩阵解；截断Cauchy矩阵解；Gronwall-Bellman不等式；一次近似

中图分类号：O175　　　**文献标识码**：A

First order approximation of partial exponential stability of nonlinear time-varying systems

JIAN Ji-gui[1], LIAO Xiao-xin[2]

(1.College of Science, China Three Gorges University, Yichang Hubei 443002, China;
2.Department of Control Science and Engineering, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan Hubei 430074, China)

Abstract: The first order approximation of the partial exponential stability of nonlinear time-varying systems is investigated by linearization approach of nonlinear systems. Based on Cauchy matrices solutions and its interceptive Cauchy matrices solutions of homogeneous linear systems, as well as the Gronwall-Bellman inequality, some sufficient conditions of partial exponential stability are obtained for the systems and some of these results are proved to be able to guarantee different exponential convergence for partial solutions of the systems. Finally, two numerical examples are presented to verify the effectiveness of proposed approach.

Key words: nonlinear time-varying systems; partial exponential stability; Cauchy matrices solution; interceptive Cauchy matrices solution; Gronwall-Bellman inequality; approximation of 1st degree

1　引言(Introduction)

在控制理论与系统理论中，对系统的稳定性及部分稳定性研究非常重要，关于这方面的研究已有许多成果[1~11].由于一般所作的Lyapunov函数及其导函数往往与部分向量(部分变量所构成的向量)范数的K类函数不具有同级增势[11]，因此关于全体变量指数稳定的Lyapunov函数法极难平移到去讨论部分变量的指数稳定性，从而导致对于Lyapunov意义下的部分指数稳定性的结果极少.近年已有一些文献[1,3~5,8~10]出现了有关部分变量的指数稳定性的一些结果.本文借助齐次线性系统的Cauchy矩阵解和截断Cauchy矩阵解以及Gronwall-Bellman不等式，讨论了一类非线性时变系统的解关于部分变量指数稳定的一次近似，对于时变线性系统的微小扰动，通过时变线性系统的部分指数稳定性，得到了扰动系统局部部分指数稳定的充分条件，其中一些结果可以保证部分变量有不同的指数收敛行为.最后通过算例验证了结果的有效性.

2　系统的描述与定义(Description of systems and definitions)

考虑非线性系统

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=A(t)x+f(t,x). \tag{1}$$

其对应的齐次线性系统为

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=A(t)x. \tag{2}$$

其中$x=(x_1,x_2,\cdots,x_m,x_{m+1},\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^n$.

记

收稿日期：2003-12-11；收修改稿日期：2004-09-24.
基金项目：国家自然科学基金资助项目(60274007,60474011)；高等学校博士点基金资助项目(20010487005).

$y = (x_1, x_2, \cdots, x_m)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^m$,

$z = (x_{m+1}, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{n-m}$,

$I = [0, +\infty)$,

$\Omega_H = \{x \mid \|y\| \leqslant H, \|z\| < +\infty,\ x \in \mathbb{R}^n\}$,

$\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2},\ A(t) \in C[I, \mathbb{R}^{n\times n}]$,

$f(t,0) = 0,\ f \in C[I \times \Omega_H, \mathbb{R}^n]$,

保证系统(1)的 Cauchy 问题的解存在唯一. 并记 $|A(t)| = (|a_{ij}(t)|)_{n\times n}$, $|x(t)| = (|x_1|, \cdots, |x_n|)^{\mathrm{T}}$, $|f(t,x)| = (|f_1(t,x)|, \cdots, |f_n(t,x)|)^{\mathrm{T}}$, 对于矩阵 $A(t) = (a_{ij}(t))_{m\times n}$ 和 $B(t) = (b_{ij}(t))_{m\times n}$, $A(t) \leqslant B(t)$(当 $n = 1$ 时为 $m \times 1$ 列向量)是指当 $t \geqslant t_0$ 时有 $a_{ij}(t) \leqslant b_{ij}(t)(i = 1, \cdots, m; j = 1, \cdots, n)$.

定义 1　称系统(1)的平凡解关于 y 是指数稳定的,若 $\exists \lambda > 0$,对 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0, \forall t_0 \in I$,当 $\|x_0\| < \delta(\varepsilon)$ 时,有 $\|y(t, t_0, x_0)\| < \varepsilon \exp(-\lambda(t - t_0))$.

定义 2　称系统(1)的平凡解关于 $x_1, \cdots, x_m$ 是指数稳定的,若 $\exists \lambda_i > 0$,对 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0$, $\forall t_0 \in I$,当 $\|x_0\| < \delta(\varepsilon)$ 时,有 $|x_i| < \varepsilon \exp(-\lambda_i(t - t_0))(i = 1, \cdots, m)$.

注 1　定义 1 与定义 2 是不同的,后者 $x_1, \cdots, x_m$ 有不同的指数估计式,前者则不同.

引理 1[1]　若系统(2)的平凡解关于 y 指数稳定,则存在函数 $V(t,x) \in C^1[I \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}_+]$ 满足

1) $\|y\| \leqslant V(t,x) \leqslant M\|x\|$,常数 $M > 0$;

2) $|V(t,x) - V(t,\tilde{x})| \leqslant M\|x - \tilde{x}\|$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\forall \tilde{x} \in \mathbb{R}^n$;

3) $\left.\dfrac{\mathrm{d}V(t,x)}{\mathrm{d}t}\right|_{(2)} \leqslant -\alpha V(t,x)$,常数 $\alpha > 0$.

引理 2　若矩阵 $A(t) = (a_{ij}(t))_{n\times n} \geqslant 0$,且 $A(t)\int_{t_0}^{t} A(s)\mathrm{d}s \leqslant \int_{t_0}^{t} A(s)\mathrm{d}sA(t)$; 则方程组 $\dot{x} = A(t)x$ 的 Cauchy 矩阵解 $\Phi(t, t_0)$ 满足 $0 \leqslant \Phi(t, t_0) \leqslant \exp(\int_{t_0}^{t} A(s)\mathrm{d}s)$.

证　根据线性系统理论[12]有

$$\Phi(t, t_0) = E + \int_{t_0}^{t} A(t_1)\mathrm{d}t_1 + \int_{t_0}^{t} A(t_1)\mathrm{d}t_1 \int_{t_0}^{t_1} A(t_2)\mathrm{d}t_2 + \int_{t_0}^{t} A(t_1)\mathrm{d}t_1 \int_{t_0}^{t_1} A(t_2)\mathrm{d}t_2 \int_{t_0}^{t_2} A(t_3)\mathrm{d}t_3 + \cdots. \tag{3}$$

由条件得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t_1}\left[\frac{1}{2!}(\int_{t_0}^{t_1} A(t_2)\mathrm{d}t_2)^2\right] = \frac{1}{2}[A(t_1)\int_{t_0}^{t_1} A(t_2)\mathrm{d}t_2 + \int_{t_0}^{t_1} A(t_2)\mathrm{d}t_2 A(t_1)] \geqslant A(t_1)\int_{t_0}^{t_1} A(t_2)\mathrm{d}t_2. \tag{4}$$

将式(4)从 t_0 到 t 积分得

$$\frac{1}{2!}(\int_{t_0}^{t} A(t_2)\mathrm{d}t_2)^2 = \frac{1}{2!}(\int_{t_0}^{t} A(s)\mathrm{d}s)^2 \geqslant \int_{t_0}^{t} A(t_1)\mathrm{d}t_1 \int_{t_0}^{t_1} A(t_2)\mathrm{d}t_2. \tag{5}$$

结合式(5)经计算得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t_1}\left[\frac{1}{3!}(\int_{t_0}^{t_1} A(t_2)\mathrm{d}t_2)^3\right] \geqslant \frac{1}{2}A(t_1)(\int_{t_0}^{t_1} A(t_2)\mathrm{d}t_2)^2 \geqslant A(t_1)\int_{t_0}^{t_1} A(t_2)\mathrm{d}t_2 \int_{t_0}^{t_2} A(t_3)\mathrm{d}t_3.$$

将上式从 t_0 到 t 积分得

$$\frac{1}{3!}(\int_{t_0}^{t} A(t_2)\mathrm{d}t_2)^3 = \frac{1}{3!}(\int_{t_0}^{t} A(s)\mathrm{d}s)^3 \geqslant \int_{t_0}^{t} A(t_1)\mathrm{d}t_1 \int_{t_0}^{t_1} A(t_2)\mathrm{d}t_2 \int_{t_0}^{t_2} A(t_3)\mathrm{d}t_3.$$

依次类推可得

$$\frac{1}{n!}(\int_{t_0}^{t} A(s)\mathrm{d}s)^n \geqslant \int_{t_0}^{t} A(t_1)\mathrm{d}t_1 \int_{t_0}^{t_1} A(t_2)\mathrm{d}t_2 \int_{t_0}^{t_2} A(t_3)\mathrm{d}t_3 \cdots \int_{t_0}^{t_{n-1}} A(t_n)\mathrm{d}t_n.$$

以上各式代入式(3)得到

$$0 \leqslant \Phi(t, t_0) \leqslant E + \int_{t_0}^{t} A(s)\mathrm{d}s + \frac{1}{2!}[\int_{t_0}^{t} A(s)\mathrm{d}s]^2 + \cdots + \frac{1}{n!}[\int_{t_0}^{t} A(s)\mathrm{d}s]^n + \cdots = \exp(\int_{t_0}^{t} A(s)\mathrm{d}s).$$

由引理 2 的推证过程不难得到如下结论:

推论 1　若系统(2)的系数矩阵 $A(t) = (a_{ij}(t))_{n\times n}$ 满足 $A(t)\int_{t_0}^{t} A(s)\mathrm{d}s = \int_{t_0}^{t} A(s)\mathrm{d}sA(t)$,则系统(2)的 Cauchy 矩阵解为 $K(t, t_0) = \exp(\int_{t_0}^{t} A(s)\mathrm{d}s)$.

记 $\beta(t) = \exp(\int_{t_0}^{t} |A(s)|\mathrm{d}s) = (\beta_1^{\mathrm{T}}(t), \cdots, \beta_n^{\mathrm{T}}(t))^{\mathrm{T}}$,其中 $\beta_i(t)$ 为矩阵 $\beta(t)$ 的第 i 个行向量.

3 主要结果(Main results)

定理 1 $\forall\varepsilon > 0, \exists\delta(\varepsilon) > 0$,当 $x \in D = \{x \mid \|x\| < \delta(\varepsilon)\}, t \in I$ 有 $\|f(t,x)\| < \varepsilon\|y\|$,则系统(2)的平凡解关于 y 指数稳定蕴涵系统(1)的平凡解关于 y 指数稳定.

证 记 $y_{(n)} = (x_1,\cdots,{}_m,0,\cdots,0)^{\mathrm T} = (y^{\mathrm T},0^{\mathrm T})^{\mathrm T} \in \mathbb{R}^n$, $y_{(n)_1} = (y^{\mathrm T},0^{\mathrm T})^{\mathrm T} \in \mathbb{R}^n$ 与 $y_{(n)_2} = (y^{\mathrm T},0^{\mathrm T})^{\mathrm T} \in \mathbb{R}^n$ 分别代表系统(1)和(2)的部分解,$K(t,t_0)$ 为系统(2)的 Canchy 矩阵解. $E_m = \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, I_m 为 $m\times m$ 阶单位矩阵, $K_m(t,t_0) = E_mK(t,t_0)$ 为 $K(t,t_0)$ 的截断矩阵,则系统(1)的解及部分解分别为

$$x(t) = K(t,t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^{t} K(t,s)f(s,x(s,t_0,x_0))\mathrm{d}s,$$

$$y_{(n)_1} = K_m(t,t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^{t} K_m(t,s)f(s,x(s,t_0,x_0))\mathrm{d}s. \quad (6)$$

由于系统(2)的平凡解关于 y 指数稳定,根据文献[1]定理7.11.8,存在常数 $M \geqslant 1, \lambda > 0$,使得

$$\|K_m(t,t_0)\| \leqslant M\exp(-\lambda(t-t_0)),\ t \geqslant t_0. \quad (7)$$

取 $\varepsilon > 0$ 使 $M\varepsilon < \lambda$,并取 $\delta = \delta(\varepsilon) = \dfrac{\varepsilon}{M}$ 使 $\|x\| < \delta(\varepsilon)$ 时有 $\|f(t,x)\| < \varepsilon\|y\|$,则系统(2)的部分解满足

$$\|y_{(n)_2}\| \leqslant \|x(t_0)\|\cdot\|K_m(t,t_0)\| \leqslant M\|x(t_0)\|\exp(-\lambda(t-t_0)). \quad (8)$$

由式(6)~(8)得到系统(1)的部分解满足

$$\|y(t,t_0,x_0)\| = \|y_{(n)_1}\| \leqslant M\|x(t_0)\|\cdot\exp(-\lambda(t-t_0)) + \int_{t_0}^{t}\varepsilon M\exp(-\lambda(t-s))\cdot\|y(s)\|\mathrm{d}s,$$

即

$$\|y(t,t_0,x_0)\|\cdot\exp(\lambda t) \leqslant M\|x(t_0)\|\cdot\exp(\lambda t_0) + \int_{t_0}^{t}\varepsilon M\exp(\lambda s)\cdot\|y(s)\|\mathrm{d}s.$$

由 Gronwall-Bellman 不等式得

$$\|y(t,t_0,x_0)\|\cdot\exp(\lambda t) \leqslant M\|x(t_0)\|\cdot\exp(\lambda t_0)\cdot\exp(M\varepsilon(t-t_0)),$$

亦即

$$\|y(t,t_0,x_0)\| \leqslant M\|x(t_0)\|\cdot\exp(-(\lambda - M\varepsilon)(t-t_0)),$$

从而当 $\|x(t_0)\| < \dfrac{\varepsilon}{M}$ 时,定理1的结论成立.

推论 2 若 $\lim\limits_{\|x\|\to 0}\dfrac{\|f(t,x)\|}{\|y\|} \xlongequal{\text{关于}t\text{一致}} 0$,且存在常数 $M > 0$ 及 $\lambda > 0$ 使得系统(2)的截断 Cauchy 矩阵解当 $t \geqslant t_0$ 时满足 $\|K_m(t,t_0)\| \leqslant M\exp(-\lambda(t-t_0))$;则系统(1)的平凡解关于 y 指数稳定.

推论 3 若存在常数 $\eta > 0$ 及 $\lambda_i > 0 (i = 1,\cdots,m)$,当 $t \geqslant t_0$ 时满足

$$\|\tilde\beta_i(t)\| \leqslant \eta\exp(-\lambda_i(t-t_0))\ (i = 1,\cdots,m),$$

且

$$\lim_{\|x\|\to 0}\frac{\|f(t,x)\|}{|y|} \xlongequal{\text{关于}t\text{一致}} 0(i = 1,\cdots,m).$$

其中 $\tilde\beta_i(t)$ 为 $K_m(t,t_0)$ 的第 i 个行向量,则系统(1)的平凡解关于 $x_1,\cdots,x_m$ 指数稳定.

定理 2 若系统(2)的平凡解关于 y 指数稳定,且在 $t \in I, \|x\| \leqslant h$ 时,由引理1确定的函数 $V(t,x)$ 还满足

$$\|f(t,x)\| < \beta V(t,x).$$

其中 β 为常数($0 < M\beta < \alpha$).则系统(1)的平凡解关于 y 指数稳定.

证 对函数 $V(t,x)$ 沿系统(1)的解求导并结合引理1的结果2),3)得

$$\left.\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}}\right|_{(1)} \leqslant -\alpha V(t,x) + \mathrm{grad}V\cdot f(t,x) \leqslant -\alpha V(t,x) + M\beta V(t,x).$$

则当 $t \in I, \|x\| \leqslant h$ 时有

$$V(t,x) \leqslant V(t_0,x_0)\exp(-(\alpha - M\beta)(t-t_0)).$$

结合引理1的结果1),对 $\forall\varepsilon > 0(\varepsilon < Mh)$,取 $\delta = \dfrac{\varepsilon}{M}$,当 $\|x_0\| < \delta$ 时 $V(t_0,x_0) < \varepsilon$,即

$$\|y(t,t_0,x_0)\| \leqslant \varepsilon\exp(-(\alpha - M\beta)(t-t_0)). \quad (9)$$

式(9)说明结论成立.

定理 3 对于系统(1),若存在常数 $\eta > 0, M > 0$ 及 $\lambda_i > 0(i = 1,\cdots,m)$,当 $t \geqslant t_0$ 时满足

1) $|A(t)|\cdot\int_{t_0}^{t}|A(s)|\mathrm{d}s \leqslant \int_{t_0}^{t}|A(s)|\mathrm{d}s\cdot|A(t)|$;

2) $\|\beta_i(t)\| \leqslant \eta\exp(-\lambda_i(t-t_0))\ (i = 1,\cdots,m)$;

3) $\left\|\int_{t_0}^{t}|f(s,x(s))|\mathrm{d}s\right\| \leqslant M\|x_0\|$.

则系统(1)的平凡解关于 $x_1,\cdots,x_m$ 是指数稳定的.

证 设 $x(t) = x(t,t_0,x_0)$ 为系统(1)过点(t_0,x_0)的一个解,则系统(1)的解当 $t \geqslant t_0$ 时可表为

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} [A(s)x(s) + f(s,x(s))]\mathrm{d}s,$$

即有

$$|x(t)| \leqslant |x_0| + \int_{t_0}^{t} [|A(s)|\,|x(s)| + |f(s,x(s))|]\mathrm{d}s.$$

记

$$Y(t) = |x_0| + \int_{t_0}^{t} [|A(s)|\,|x(s)| + |f(s,x(s))|]\mathrm{d}s,$$

并设 $\Phi(t,t_0)$ 为系统 $\dot{Y}(t) = |A(t)|Y(t)$ 的 Cauchy 矩阵解. 则有 $|x(t)| \leqslant Y(t), 0 \leqslant \Phi(t,s) \leqslant \Phi(t,t_0), t_0 \leqslant s \leqslant t$.

$$\frac{\mathrm{d}Y(t)}{\mathrm{d}t} = |A(t)|Y(t) + |A(t)|[|x(t)| - Y(t)] + |f(t,x(t))|,$$

$$Y(t) = \Phi(t,t_0)|x_0| + \int_{t_0}^{t} \Phi(t,s)[|A(s)|(|x(s)| - Y(s)) + |f(s,x(s))|]\mathrm{d}s \leqslant \Phi(t,t_0)[|x_0| + \int_{t_0}^{t} |f(s,x(s))|\mathrm{d}s].$$

由条件 1)并结合引理 2 有

$$|x(t)| \leqslant Y(t) \leqslant \beta(t)[|x_0| + \int_{t_0}^{t} |f(s,x(s))|\mathrm{d}s],$$

亦即

$$|x_i(t)| \leqslant \beta_i(t) \cdot (|x_0| + \int_{t_0}^{t} |f(s,x(s))|\mathrm{d}s) \leqslant \eta(1 + M)\|x_0\|\exp(-\lambda_i(t - t_0)),\ i = 1,\cdots,m.$$

故对 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $\delta = \dfrac{\varepsilon}{\eta(1 + M)}$, 当 $\|x_0\| < \delta$ 时有 $|x_i| \leqslant \varepsilon\exp(-\lambda_i(t - t_0))(i = 1,\cdots,m)$, 从而系统(1) 的平凡解关于 $x_1,\cdots,x_m$ 是指数稳定的.

4 实例分析(Example analysis)

例 1 考察系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1 - 2x_2 + \exp(-t) \cdot x_3 + x_4 + (x_1^2 + x_2^2)\sin(x_3 + x_4), \\ \dot{x}_3 = x_4, \\ \dot{x}_4 = -2x_4 + \sin(x_1^2 + x_2^2)\exp(-\dfrac{x_4^2}{1 + x_3^2}). \end{cases} \tag{10}$$

当 $t \geqslant t_0 = 0$ 时, 容易求得系统(10)对应的齐次线性系统的 Cauchy 矩阵解为

$$K(t) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-t} + t\mathrm{e}^{-t} & t\mathrm{e}^{-t} & 0.5t^2\mathrm{e}^{-t} & -0.125\mathrm{e}^{-3t} + \mathrm{e}^{-2t} + 0.25t^2\mathrm{e}^{-t} + 0.75t\mathrm{e}^{-t} - 0.875\mathrm{e}^{-t} \\ -t\mathrm{e}^{-t} & \mathrm{e}^{-t} - t\mathrm{e}^{-t} & t\mathrm{e}^{-t} - 0.5t^2\mathrm{e}^{-t} & 0.375\mathrm{e}^{-3t} - 2\mathrm{e}^{-2t} - 0.25t^2\mathrm{e}^{-t} - 0.25t\mathrm{e}^{-t} + 1.625\mathrm{e}^{-t} \\ 0 & 0 & 1 & -0.5\mathrm{e}^{-2t} + 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{e}^{-2t} \end{pmatrix}.$$

易求得关于 x_1,x_2 的截断矩阵 $K_2(t)$ 满足

$$\|K_2(t)\| \leqslant 2\max\left\{3\exp(-\frac{1}{12}t), 5\exp(-\frac{7}{20}t)\right\} = 10\exp(-\frac{1}{12}t).$$

从而其齐次线性系统的零解关于 x_1,x_2 指数稳定, 又 $\|f(t,x)\| \leqslant \sqrt{2}(x_1^2 + x_2^2)$, 由定理 1 知原非线性系统(10) 的零解关于 x_1,x_2 指数稳定. 当取初值 $x_0 = (1, -0.5, 1.2, -1)^{\mathrm{T}}$ 时的结果分别如图 1 和图 2 所示.

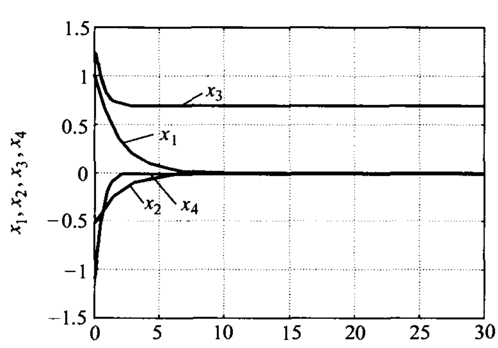

图 1 系统(10)对应的齐次线性系统的轨线走向图

Fig. 1 Trajectory curve of the corresponding homogeneous linear system of system(10)

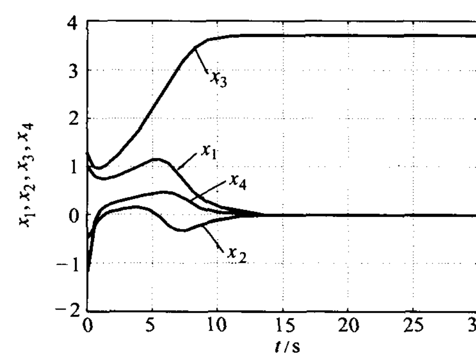

图 2 系统(10)的轨线走向图

Fig. 2 Trajectory curve of the system(10)

例 2 考察系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + x_2^2\sin x_1, \\ \dot{x}_2 = -2x_2. \end{cases} \tag{11}$$

由于系统(12)对应的齐次线性系统的 Cauchy 矩阵解为

$$K(t,t_0)=\begin{pmatrix}1 & 0.5(1-\exp(-2(t-t_0)))\\ 0 & \exp(-2(t-t_0))\end{pmatrix},$$

又

$$|\tilde{\beta}_2(t)|=\exp(-2(t-t_0)),\|f(t,x)\|\leqslant x_2^2,$$

由推论3知系统(11)的零解关于x_2指数稳定.取初值$x_0=(2,-2.5)^{\mathrm{T}}$,得到系统(11)的轨线走向如图3.

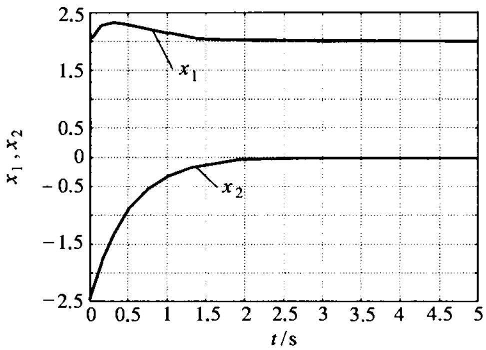

图3 系统(11)的轨线走向图

Fig. 3 Trajectory curve of system (11)

5 小结(Conclusion)

本文讨论了一类非线性时变系统的部分指数稳定性问题,通过非线性系统的线性化方法,利用齐次线性系统的Cauchy矩阵解、截断Cauchy矩阵解和Gronwall-Bellman不等式,得到了线性系统部分指数稳定确保原非线性系统局部部分指数稳定的充分条件,其中推论3和定理3给出了部分变量的不同的指数收敛行为,最后给出的实例说明了结果的有效性.在本文的结果中,尽管定理3的结论不如定理1及其推论容易验证,但作为讨论非线性系统部分变量的指数稳定性也不失为一种有效方法.

参考文献(References):

[1] 廖晓昕.稳定性的数学理论及应用[M].第二版.武汉:华中师范大学出版社,2001.
(LIAO Xiaoxin. *Mathematical theory and applications of stability* [M]. Second edition. Wuhan: Huazhong Normal University Press, 2001.)

[2] 徐道义,颜祥伟.关于部分变元渐近稳定性的几个基本定理[J].四川师范大学学报(自然科学版),1996,19(2):4-9.
(XU Daoyi, YAN Xiangwei. On some fundamental theorems in partial asymptotic stability theory [J]. *J of Sichuan Normal University (Natural Science)*, 1996, 19(2):4-9.)

[3] MICHEL A N, MOLCHANOV A P, SUN Y, Partial stability and boundedness of general dynamical systems on metric spaces [J]. *Nonlinear Analysis*, 2003, 52(4):1295-1316.

[4] CHELLLABOINA V, HADDAD W M. A unification between partial stability and stability theory for time-varying systems [J]. *IEEE Control Systems Magazine*, 2002, 22(6):66-75.

[5] VOROTNIKOV V I. Problems of stability with respect to part of the variables [J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 1999, 63(5):695-703.

[6] MICHEL A N, MOLCHANOV A P, SUN Y. Partial stability and boundedness of discontinuous dynamical systems[J]. *Nonlinear Studies*, 2002, 9(3):225-247.

[7] VOROTNIKOV V I. On the theory of partial stability [J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 1995, 59(4):525-531.

[8] XIAO Huimin, LIU Yongqing. Partial exponential stability of large-scale system [J]. *Mathematica Apllicata*, 1990, 3(2):65-70.

[9] 李君湘.离散大系统的部分稳定性[J].天津工业大学学报,2001,20(4):25-28.
(LI Junxiang. Partial stability of discrete large scale systems [J]. *J of Tianjin Polytechnic University*, 2001, 20(4):25-28.)

[10] VOROTNIKOV V I. *Partial Stability and Control* [M]. Boston: Birkhauser, 1998.

[11] 黄琳.稳定性理论[M].北京:北京大学出版社,1992.
(HUANG Lin. *Stability Theory* [M]. Beijing: Beijing University Press, 1992.)

[12] 郑大钟.线性系统理论[M].清华大学出版社,2001.
(ZHENG Dazhong. *Linear System Theory* [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2001.)

作者简介:

蹇继贵 (1965—),男,副教授,华中科技大学控制科学与工程系在读博士生,研究领域为动力系统的稳定性理论、非线性控制,E-mail:jianjigui@sohu.com;

廖晓昕 (1938—),男,教授,博士生导师,研究领域为非线性系统的稳定性、神经网络的数学理论及混沌同步控制等,E-mail:xiaoxinliao@163.net.