第 22 卷第 4 期
2005 年 8 月

控制理论与应用
Control Theory & Applications

Vol.22 No.4
Aug. 2005

文章编号: 1000-8152(2005)04-0641-04

基于 Kalman 滤波的自回归滑动平均信号信息融合 Wiener 滤波器

邓自立, 高 媛
(黑龙江大学 自动化系,黑龙江 哈尔滨 150080)

摘要: 应用 Kalman 滤波方法,在按矩阵加权线性最小方差最优信息融合规则下,提出了带白色观测噪声的多通道 ARMA 信号的多传感器信息融合 Wiener 滤波器. 它可统一处理信息融合滤波、平滑和预报问题. 为了计算最优加权阵,提出了计算局部滤波误差互协方差阵的公式. 同单传感器情形相比,可提高估计精度. 一个带三传感器的目标跟踪系统的仿真例子说明了其有效性.

关键词: 多通道 ARMA 信号; 多传感器信息融合; 按矩阵加权最优融合规则; Wiener 滤波器; Kalman 滤波方法

中图分类号: O211 **文献标识码**: A

Kalman filtering-based information fusion Wiener filter of autoregressive moving average signals

DENG Zi-li, GAO Yuan
(Department of Automation, Heilongjiang University, Harbin Heilongjiang 150080, China)

Abstract: By using the Kalman filtering method and the linear minimum variance optimal fusion rule weighted by matrices, a multisensor information fusion Wiener filter is presented for the multichannel autoregressive moving average (ARMA) signals with white observation noise. It can handle the information fusion filtering, smoothing and prediction problems in a unified framework. In order to compute the optimal weighting matrices, the formula of computing the cross-covariance matrices among local filtering errors, is presented. Compared with the single sensor case, the estimation accuracy is improved. A simulation example for a target tracking system with three-sensor shows its effectiveness.

Key words: multichannel AMAR signal; multisensor information fusion; optimal fusion rule weighted by matrices; Wiener filter; Kalman filtering method

1 引言(Introduction)

多传感器信息融合滤波问题广泛出现在高技术领域,特别是军事领域,例如在目标跟踪、精确打击、GPS 定位、C^3I(指挥,控制,通信和情报)系统中有广泛的应用[1]. 国内外关于信息融合状态估计已有许多报道[2,3], 但关于信息融合信号估计报道甚少[4,5]. 文献[5]用现代时间序列分析方法[6]提出多传感器单通道 ARMA 信号信息融合 Wiener 滤波器. 本文则用 Kalman 滤波方法,在线性最小方差意义下的按矩阵加权最优融合规则下[2],提出了统一的多通道 ARMA 信号的多传感器信息融合 Wiener 滤波器、平滑器和预报器.

2 问题阐述(Problem formulation)

考虑带白色观测噪声的多传感器多通道 ARMA 信号 $s(t)$,

$$A(q^{-1})s(t) = C(q^{-1})w(t), \tag{1}$$

$$y_i(t) = s(t) + v_i(t),\ i = 1,2,\cdots,L. \tag{2}$$

其中: $y_i(t) \in \mathbb{R}^m$ 为第 i 传感器输出,待估 ARMA 信号 $s(t) \in \mathbb{R}^m$,观测噪声 $v_i(t) \in \mathbb{R}^m$, L 为传感器个数, q^{-1} 为单位滞后算子, $w(t) \in \mathbb{R}^r$ 和 $v_i(t)$ 是零均值、方差阵各为 Q_w 和 Q_{vi} 的相互独立白噪声,

$$\mathrm{E}\left\{\begin{bmatrix} w(t) \\ v_i(t)\end{bmatrix}\begin{bmatrix} w^{\mathrm{T}}(j) & v_i^{\mathrm{T}}(j)\end{bmatrix}\right\} = \begin{bmatrix} Q_w & 0 \\ 0 & Q_{vi}\end{bmatrix}\delta^{tj}, \tag{3}$$

收稿日期: 2003-12-23; 收修改稿日期: 2004-12-31.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(60374026); 黑龙江大学自动控制重点实验室资助项目(04-01).

$\delta_{tt}=1,\delta_{tj}=0(t\neq j)$, $A(q^{-1})$ 和 $C(q^{-1})$ 为多项式矩阵.

$$A(q^{-1})=I_m+A_1q^{-1}+\cdots+A_{n_a}q^{-n_a},\quad C(q^{-1})=C_1q^{-1}+\cdots+C_{n_c}q^{-n_c},\tag{4}$$

且设 $n_a\geqslant n_c$, $(A(q^{-1}),C(q^{-1}))$ 左素. 问题是基于观测 $(y_i(t+N),y_i(t+N-1),\cdots)$ 求信号 $s(t)$ 的最优局部 Wiener 滤波器 $\hat{s}_i(t|t+N)$, $i=1,2,\cdots,L$, 并求它们的最优融合 Wiener 滤波器 $\hat{s}_0(t|t+N)$, 对 $N=0,N>0,N<0$ 分别称其为滤波器、平滑器和预报器.

3 局部最优 Wiener 滤波器(Local optimal Wiener filters)

第 i 传感器子系统有状态空间模型

$$x(t+1)=\Phi x(t)+\Gamma w(t),\tag{5}$$

$$y_i(t)=Hx(t)+v_i(t),\ i=1,2,\cdots,L.\tag{6}$$

其中: $s(t)=Hx(t)$, $H=[I_m\ \ 0\ \ \cdots\ \ 0]$, $C_i=0(i>n_a)$, 且

$$\Phi=\begin{bmatrix}-A_1 & \\ \vdots & I_{m(n_a-1)} \\ -A_{n_a} & 0\ \cdots\ 0\end{bmatrix},\ \Gamma=\begin{bmatrix}C_1\\ \vdots\\ C_{n_a}\end{bmatrix}.\tag{7}$$

引理 1[6] 第 i 传感器子系统式(5)和式(6)有稳态 Kalman 预报器

$$\hat{x}_i(t+1|t)=\Psi_{pi}\hat{x}_i(t|t-1)+K_{pi}y_i(t),\tag{8}$$

$$y_i(t)=H\hat{x}_i(t|t-1)+\varepsilon_i(t).\tag{9}$$

其中 $\varepsilon_i(t)$ 是 $y_i(t)$ 的新息过程, 且有 ARMA 新息模型

$$\Lambda_i(q^{-1})y_i(t)=\Psi_i(q^{-1})\varepsilon_i(t),\tag{10}$$

$$\Lambda_i(q^{-1})=\Psi_i(q^{-1})I_m-H\mathrm{adj}(I_n-q^{-1}\Psi_{pi})K_{pi}q^{-1},\tag{11}$$

$$\Psi_i(q^{-1})=\det(I_n-q^{-1}\Psi_{pi}),\tag{12}$$

$$\Psi_{pi}=\Phi-K_{pi}H,\ K_{pi}=\Phi K_i,\tag{13}$$

$$K_i=\Sigma_iH^{\mathrm{T}}Q_{\varepsilon i}^{-1},\ Q_{\varepsilon i}=H\Sigma_iH^{\mathrm{T}}+Q_{vi}.\tag{14}$$

Σ_i 是如下 Riccati 方程的唯一正定解:

$$\Sigma_i=\Phi[\Sigma_i-\Sigma_iH^{\mathrm{T}}(H\Sigma_iH^{\mathrm{T}}+Q_{vi})^{-1}H\Sigma_i]\Phi^{\mathrm{T}}+\Gamma Q_w\Gamma^{\mathrm{T}},\tag{15}$$

它可由迭代法求解[6]. 稳态 Kalman 滤波器和平滑器为

$$\hat{x}_i(t|t+N)=\hat{x}_i(t|t-1)+\sum_{j=0}^{N}M_j^{(i)}\varepsilon_i(i+j),\ N\geqslant 0,\tag{16}$$

$$M_j^{(i)}=\Sigma_i\Psi_{pi}^{\mathrm{T}j}H^{\mathrm{T}}Q_{\varepsilon i}^{-1}.\tag{17}$$

引理 2 第 i 子系统式(1),(2)有局部稳态最优 Wiener 滤波器 $\hat{s}_i(t|t+N)$ 为

$$\Psi_i(q^{-1})\hat{s}_i(t|t+N)=K_N^{(i)}(q^{-1})y_i(t+N).\tag{18}$$

其中定义

$$K_N^{(i)}(q^{-1})=H[\mathrm{adj}(I-q^{-1}\Psi_{pi})K_{pi}q^{-1-N}+M_N^{(i)}(q^{-1})\Lambda_i(q^{-1})],\ N\geqslant 0,\tag{19}$$

$$M_N^{(i)}(q^{-1})=\sum_{j=0}^{N}M_j^{(i)}q^{j-N},\ N\geqslant 0,\tag{20}$$

$$K_N^{(i)}(q^{-1})=H\Phi^{-N-1}\mathrm{adj}(I-q^{-1}\Psi_{pi})K_{pi},\ N\leqslant -1,\tag{21}$$

第 i 传感器子系统有估值误差 $\tilde{s}_i(t|t+N)=s(t)-\hat{s}_i(t+N)$ 方差阵 $P_{si}(N)=\mathrm{E}[\tilde{s}_i(t|t+N)\tilde{s}_i^{\mathrm{T}}(t|t+N)]$ 为

$$P_{si}(N)=H\Sigma_i(N)H^{\mathrm{T}}.\tag{22}$$

其中 $\Sigma_i(N)$ 由下式计算:

$$\Sigma_i(N)=\Sigma_i-\sum_{j=0}^{N}M_j^{(i)}Q_{\varepsilon i}M_j^{(i)\mathrm{T}},\ N\geqslant 0,\tag{23}$$

$$\Sigma_i(N)=\Phi^{-N-1}\Sigma_i(\Phi^{\mathrm{T}})^{-N-1}+\sum_{j=2}^{-N}\Phi^{-N-j}\Gamma Q_w\Gamma^{\mathrm{T}}(\Phi^{\mathrm{T}})^{-N-j},\ N<0,\tag{24}$$

$$\Sigma_i(-1)=\Sigma_i.\tag{25}$$

证 因为 $s(t)=Hx(t)$, 故有 $\hat{s}(t|t+N)=H\hat{x}(t|t+N)$, 且有式(22). 应用文献[7]的 Wiener 状态估值器得式(18)~(21), 而式(23)和式(24)的证明见文献[6]. 证毕.

定理 1 多传感器系统式(1),(2)估值误差 $\tilde{s}_i(t|t+N)$ 的协方差 $P_{sij}(N)=\mathrm{E}[\tilde{s}_i(t|t+N)\tilde{s}_j^{\mathrm{T}}(t|t+N)](i\neq j)$ 为

$$P_{sij}(N)=HP_{ij}(N)H^{\mathrm{T}}.\tag{26}$$

其中估值误差 $\tilde{x}(t|t+N)=x(t)-\hat{x}_i(t|t+N)$ 的协方差 $P_{ij}(N)=\mathrm{E}[\tilde{x}_i(t|t+N)\tilde{x}_j^{\mathrm{T}}(t|t+N)]$, 当 $N\geqslant 0$ 时为

$$P_{ij}(N)=\Sigma_{ij}-\sum_{r=0}^{N}M_r^{(i)}H\Psi_{pi}^{r}\Sigma_{ij}-\sum_{r=0}^{N}\Sigma_{ij}\Psi_{pj}^{r\mathrm{T}}H^{\mathrm{T}}M_r^{(j)\mathrm{T}}+\sum_{r=0}^{N}\sum_{s=0}^{N}M_r^{(i)}e_{ij}(r,s)M_s^{(j)\mathrm{T}}.\tag{27}$$

其中 $e_{ij}(r,s)=\mathrm{E}[\varepsilon_i(t+r)\varepsilon_j^{\mathrm{T}}(t+s)]$ 为

$$e_{ij}(r,s)=$$

$$H\Psi_{pi}^{r}\Sigma_{ij}\Psi_{pj}^{sT}H^{T}+\sum_{k=1}^{\min(r,s)}H\Psi_{pi}^{r-k}\Gamma Q_{w}\Gamma^{T}\Psi_{pj}^{(s-k)T}H^{T}. \tag{28}$$

其中当 $\min(r,s)=0$ 时应置上式的第 2 项为零.

$\Sigma_{ij}=\mathrm{E}[\tilde{x}_i(|t-1)\tilde{x}_j^{T}(t|t-1)]$ 满足 Lyapunov 方程

$$\Sigma_{ij}=\Psi_{pi}\Sigma_{ij}\Psi_{pj}^{T}+\Gamma Q_{w}\Gamma^{T},\ i\neq j. \tag{29}$$

它可用迭代法求解[6].

当 $N=-1$ 时有

$$P_{ij}(-1)=\Sigma_{ij}; \tag{30}$$

当 $N<-1$ 时有

$$P_{ij}(N)=$$

$$\Phi^{-N-1}\Sigma_{ij}\Phi^{(-N-1)T}+\sum_{k=2}^{-N}\Phi^{-N-k}\Gamma Q_{w}\Gamma^{T}\Phi^{(-N-k)T}. \tag{31}$$

证　将式(6)代入式(9)有关系

$$\varepsilon_i(t+k)=$$

$$H\tilde{x}_i(t+k|t+k-1)+v_i(t+k),\ i=1,2,\ k=r,s. \tag{32}$$

由关系[6]

$$\tilde{x}_i(t+1|t)=\Psi_{pi}\tilde{x}_i(t|t-1)+\Gamma w(t)-K_{pi}v_i(t), \tag{33}$$

由式(33)迭代有

$$\tilde{x}_i(t+k|t+k-1)=$$

$$\Psi_{pi}^{k}\tilde{x}_i(t|t-1)+$$

$$\sum_{j=1}^{k}\Psi_{pi}^{k-j}[\Gamma w(t+j-1)-K_{pi}v_i(t+j-1)]. \tag{34}$$

由式(16)有

$$\tilde{x}_i(t|t+N)=\tilde{x}_i(t|t-1)-\sum_{k=0}^{N}M_k^{(i)}\varepsilon_i(t+k). \tag{35}$$

将式(34)代入式(32)后,再将式(32)代入式(35),利用 $w(t)$ 和 $v_i(t)$ 的独立性,可得式(27)和(28).由式(33)引出式(29).式(30)即 Σ_{ij} 的定义.当 $N<-1$ 时,由式(5)迭代有关系

$$x(t)=\Phi^{-N-1}x(t+N+1)+$$

$$\sum_{k=2}^{-N}\Phi^{-N-k}\Gamma w(k+N+k-1). \tag{36}$$

由射影性质有

$$\hat{x}_i(t|t+N)=\Phi^{-N-1}\hat{x}_i(t+N+1|t+N),\ N<-1. \tag{37}$$

上两式引出

$$\tilde{x}_i(t|t+N)=\Phi^{-N-1}\tilde{x}_i(t+N+1|t+N)+$$

$$\sum_{k=2}^{-N}\Phi^{-N-k}\Gamma w(t+N+k-1). \tag{38}$$

这引出式(31).　证毕.

4　按矩阵加权线性最小方差最优融合 Wiener 滤波器(Linear minimum variance optimal fusion Wiener filter weighted by matrices)

定理 2　多传感器系统式(1),(2)有按矩阵加权线性最小方差最优信息融合 Wiener 滤波器 $\hat{s}_0(t|t+N)$ 为

$$\hat{s}_0(t|t+N)=\sum_{i=1}^{L}A_i(N)\hat{s}_i(t|t+N). \tag{39}$$

其中最优加权阵 $A_i(N)$ 由下式给出:

$$[A_1(N),A_2(N),\cdots,A_L(N)]=$$

$$(e^{T}P_s^{-1}(N)e)^{-1}e^{T}P_s^{-1}(N). \tag{40}$$

其中: $e^{T}=[I_m,\cdots,I_m]$, $P_s(N)$ 是以 $P_{sij}(N)$ 为元素的 $Lm\times Lm$ 分块矩阵,

$$P_s(N)=(P_{sij}(N))_{Lm\times Lm}. \tag{41}$$

最优融合误差方差阵为

$$P_{s0}(N)=(e^{T}P_s^{-1}(N)e)^{-1}, \tag{42}$$

且有精度关系

$$\mathrm{tr}P_{s0}(N)\leqslant\mathrm{tr}P_{si}(N),\ i=1,\cdots,L. \tag{43}$$

证　由文献[2]给出的按矩阵加权线性最小方差融合公式得证.

5　仿真例子(Simulation example)

考虑多传感器两维跟踪系统

$$(I_2+A_1q^{-1})s(t)=C_1q^{-1}w(t), \tag{44}$$

$$y_i(t)=s(t)+v_i(t),\ i=1,2,3, \tag{45}$$

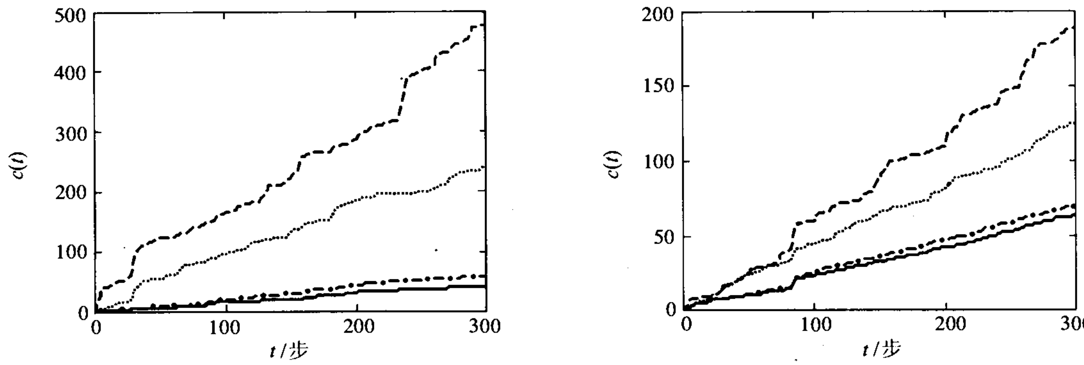
$$A_1=-\begin{bmatrix}1 & T_0\\ 0 & 1\end{bmatrix},\ C_1=\begin{bmatrix}0.5T_0^2\\ T_0\end{bmatrix}. \tag{46}$$

其中: $s(t)=[s_1(t),s_2(t)]^{T}$, $s_1(t)$, $s_2(t)$ 为运动目标在时刻 tT_0 处的位置和速度, T_0 为采样周期.设 $w(t)$ 和 $v_i(t)$ 是零均值、方差阵各为 $Q_w=\sigma_w^2$ 和 Q_{vi} 的相互独立白噪声.取 $N=1$,问题是求局部 Wiener 平滑器 $\hat{s}_i(t|t+1)$ 及最优融合跟踪平滑器 $\hat{s}_0(t|t+1)$. 仿真中取 $T_0=0.5$, $\sigma_w^2=1$, $Q_{v1}=\mathrm{diag}(1,2.25)$, $Q_{v2}=\mathrm{diag}(4,6.25)$, $Q_{v3}=\mathrm{diag}(9,16)$. 可求得

$$\begin{cases}\mathrm{tr}P_{s1}(1)=0.5270,\ \mathrm{tr}P_{s2}(1)=1.3869,\\ \mathrm{tr}P_{s3}(1)=2.620,\ \mathrm{tr}P_{s0}(1)=0.4688.\end{cases} \tag{47}$$

显然可看到 $\mathrm{tr}P_{s0}(1) < \mathrm{tr}P_{si}(1), i = 1,2,3$. 由此看到信息融合估计可提高估计精度. 它的理论根据是式(43).

仿真结果如图 1 和图 2 所示,它们分别为位置和速度的累积平滑误差平方曲线. 因累积融合平滑误差平方曲线在每个局部累积平滑误差平方曲线的下方,这说明了位置和速度的融合平滑估计精度高于相应的每个局部平滑估计精度.



(a) 位置 $s_1(t)$ 的累积平滑误差平方 $c(t)$ 曲线 (b) 速度 $s_2(t)$ 的累积平滑误差平方 $c(t)$ 曲线

------:传感器 1 的累积平滑误差平方曲线; ········:传感器 2 的累积平滑误差平方曲线

-----:传感器 3 的累积平滑误差平方曲线; ——:累积融合平滑误差平方曲线

图 1 累积平滑误差平方曲线

Fig. 1 Curves of accumulated smoothing error squares

6 结论(Conclusion)

本文应用 Kalman 滤波方法,基于稳态 Riccati 方程,提出了多传感器多通道 ARMA 信号按矩阵加权最优融合 Wiener 滤波器. 方法原理是: 由于信号是增广状态的一部分分量,基于局部 Wiener 状态滤波器[7]得到了信号局部 Wiener 滤波器,进而用按矩阵加权法[2]得到了融合 Wiener 信号滤波器. 本文方法不同于文献[5]的基于 ARMA 新息模型的现代时间序列分析方法,且得到了不同于文献[5]的结果. 解决最优融合问题的关键和难点是求最优加权阵. 应用在线性最小方差意义下按矩阵加权最优融合规则[2],这要求计算多传感器局部滤波误差互协方差阵. 本文提出了计算局部估计误差互协方差阵的公式. 理论和仿真例子证明了所提出的信息融合 Wiener 滤波器的精度高于每个局部滤波器的精度.

参考文献(References):

[1] 何友,王国宏,陆大金,等. 多传感器信息融合及其应用[M]. 北京:电子工业出版社,2000.
(HE You, WANG Guohong, LU Dajin, et al. *Multisensor Information Fusion and Its Applications* [M]. Beijing: Electronic Industry Press, 2000.)

[2] SUN Shuli, DENG Zili. Multi-sensor optimal information fusion Kalman filter [J]. *Automatica*, 2004, 40(6): 1017 - 1023.

[3] GAO J B, HARRIS C J. Some remarks on Kalman filters for the multisensor Fusion [J]. *Information Fusion*, 2002, 3(2): 191 - 201.

[4] SUN Shuli. Multi-sensor information fusion white noise filter weighted by scalars based on Kalman predictor [J]. *Automatica*, 2004, 40(8): 1447 - 1453.

[5] 高媛,白敬刚,邓自立. 多传感器单通道信息融合 Wiener 滤波器[J]. 科学技术与工程, 2004, 4(7): 522 - 525.
(GAO Yuan, BAI Jinggang, DENG Zili. Multisensor single channel information fusion Wiener fulter [J]. *Science Technology and Engineering*, 2004, 4(7): 522 - 525.)

[6] 邓自立. 自校正滤波理论及其应用——现代时间序列分析方法[M]. 哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社, 2003.
(DENG Zili. *Self-turning Filtering Theory and Its Applications, Modern Time Series Analysis Method* [M]. Harbin: Harbin Institute of Technology Press, 2000.)

[7] 邓自立,孙书利. 基于 Kalman 滤波的 Wiener 状态估值器[J]. 自动化学报, 2004, 30(1): 126 - 130.
(DENG Zili, SUN Shuli. Wiener state estimators based on Kalman filtering [J]. *Acta Automatica Sinica*, 2004, 30(1): 126 - 130.)

作者简介:

邓自立 (1938—),男,教授,研究方向为状态估计、信息融合、时间序列分析,E-mail: dzl@hlju.edu.cn;

高 媛 (1978—),女,教师,研究方向为信息融合状态估计,E-mail: gaoyuan@hlju.edu.cn.