

离散时间系统间接自适应调节的稳定性分析

阮荣耀¹, 龚妙昆¹, 杨昌利^{1,2}

(1. 华东师范大学 数学系, 上海 200062; 2. 华东师范大学 信息科学技术学院, 上海 200062)

摘要: 研究一类离散时间一阶线性系统的自适应调节器, 采用不同的估计器分别结合修改的“必然等价”控制律, 克服了当系统增益的估计值为零时可能丧失稳定性(或能控性)的困难, 并指出 Middleton and Kokotovic 的有关论文[1]的一些实质性错误. 对所设计的闭环系统的状态方程组获得显式解或相平面轨道的显式表达式, 完全描述了这些自适应调节系统的非线性性质, 并对某些情况下所估计的模型可能丧失稳定性的问题进行了分析, 还探讨了这些结果对于具有未知控制方向和模型参数的离散时间高阶线性系统的间接自适应调节的意义.

关键词: 离散时间系统; 间接自适应调节; 稳定性分析; 状态的有界性

中图分类号: O231, TP13 **文献标识码:** A

Stability analysis of indirect adaptive regulation for simple discrete-time systems

RUAN Rong-yao¹, GONG Miao-kun¹, YANG Chang-li^{1,2}

(1. Department of Mathematics, East China Normal University, Shanghai 200062, China;

2. School of Information Science and Technology, East China Normal University, Shanghai 200062, China)

Abstract: Examining adaptive regulators for a class of first-order linear discrete-time systems, with different estimators, and the modified certainty-equivalence control law, we overcome the difficulty of a loss of stability (or controllability) as the estimate of the plant gain is zero and point out a few substantive mistakes of the results from Middleton and Kokotovic's paper [1] on the corresponding continuous-time plants. We obtain the explicit expression for the phase-plane trajectories or the explicit solutions completely describing the nonlinear behavior of the designed adaptive regulating systems and analyze some problems of these adaptive regulating systems, due to a loss of stability of the estimated model. Implications of these results for the indirect adaptive regulating case of higher order linear discrete-time systems, with the unknown control direction and model parameters, are discussed.

Key words: discrete-time systems; indirect adaptive regulation; stability analysis; boundedness properties

1 引言 (Introduction)

考虑离散时间线性系统

$$A(z)y(t) = KB(z)u(t),$$

其中: $u(t)$ 和 $y(t)$ 分别为系统的输入和输出, K 是系统的增益参数, z 表示前移差分算子. 首一的 n 次多项式 $A(z)$ 和 m 次多项式 $B(z)$ 是互质的, $n \geq m$, 且 $B(z)$ 是稳定的(即 $B(z) \neq 0, \forall |z| \geq 1$).

假定系统增益 K 的符号(即所谓控制方向^[2,3])是未知的. 然而, 不论是直接自适应控制还是间接自适应控制, 通常都需要假定控制方向是已知的(见文献[4]第3节中的假定3.6). 在间接自适应控制问题中, 控制方向未知造成的困难是模型的参数估计值

可能对应于不稳定的系统(或在极点配置情况下是不能控的), 这种间接自适应控制问题是一个至今尚未完全解决的问题. 虽然早已有克服这一困难的某些“措施”, 包括修改参数估计量使模型总是稳定的(参看文献[5,6]); 参数搜索使得当估计模型丧失稳定性时, 选择一个适当的稳定模型(见文献[7,8]), 以及采用附加某种探测信号的激励技术, 强迫参数收敛到它们的真值, 从而保持其稳定性(见文献[9,10]); 但是还存在更基本的问题未解决, 那就是不管在怎么样的情况下, 附加某一个“措施”是否确实必要? 附加什么样的“措施”是可行的和有效的?

特别值得研究的是当系统的增益(包括它的符

号)未知时,可能出现丧失稳定性的情况.在这种情况下,当系统增益的估计值为零时,就失去了能控性.用不同的估计算法如何结合修改的“必然等价”控制律处理增益估计穿过零的问题?它们中的各个信号是否会变成无界?所使用的估计算法和控制律能否构成稳定的自适应调节系统?

对于连续时间线性系统, Middleton and Kokotovic 在论文[1]中用几个简单的例子回答了上述基本问题,可惜他们的回答是不正确的.例如该文的控制律(3.1)(指文献[1]第III节中的 $u(t) = -2y(t)/\hat{b}(t)$),若在 $b > 0$ 的情况下,选 $\hat{b}(0) < 0$;或在 $b < 0$ 情况下,选 $\hat{b}(0) > 0$,则自适应系统的初始控制 $u(y(0), \hat{b}(0))$ 是正反馈.若不及时纠正,则后继状态就不可能一直“保持有界”.又如,该文的结论:“当 $\hat{b}(t) \rightarrow 0$ 时,反馈控制 $u(y(t), \hat{b}(t))$ 会无界地增长”也是错误的(因为当 $\hat{b}(t) \rightarrow 0$ 的过程中,虽然 $y(t) \neq 0$,但它会跟随着 $\hat{b}(t)$ 趋向零而同时趋向于零,所以 $u(y(t), \hat{b}(t))$ 未必无界.如果 $u(y(t), \hat{b}(t))$ 真的在无界地增长,那就无法可靠地保证该自适应调节系统状态的有界性,这反而否定了文献[1]本身的主要结论.再如,该文在求出相平面轨道的显式表达式(3.8)的过程中有一个不稳定的极-零点对消,由方程(3.7)确定的一簇积分曲线(见文献[1]的 Fig.2)不是由式(3.2)和(3.3)所构成的非线性系统的相位图象(此系统的相平面轨线在 $\hat{b}(t) = 0$ 处是没有定义的),因此不能由满足方程(3.7)的 η 的有界性推断出满足方程组(3.2)和(3.3)的 y 的有界性.由此可见,文献[1]关于状态有界性的论证完全是错误的.尽管如此, Middleton and Kokotovic 的论文^[1]所做的工作还是有一定意义的,特别是它指出了 $\hat{b}(t)$ 具有不变的符号(见文献[1]的式(3.5)),是一个表征相平面上有关轨线性质的一个重要结论.如果能选取 $\text{sgn}(\hat{b}(0)) = \text{sgn}(b)$ (这意味着要求已知系统增益 b 的符号),那么有界性的结论还是正确的.不过,在这种情况下不存在系统增益估计值 $\hat{b}(t)$ 能否穿过零的问题.这篇文章正是在 Middleton and Kokotovic 的论文^[1]的启发之下,对离散时间线性系统的情况也依据几个简单的例子回答了上述基本问题.在所有的例子中,都考虑相同的一阶不稳定系统,已知其极点在 z 平面的单位圆外,即 $z = 2$,而系统增益的值和符号都是未知的.使用非规范化梯度、规范化梯度和最小二乘3种参数估计算法分别结合修改的“必然等价”极点配置控制律,

设计出3种自适应调节系统.我们通过求出显式解或相平面轨道的显式表达式而进行稳定性分析,并讨论了受控状态的瞬态性能以及有界性和渐近稳定性.

2 自适应系统的构成 (Formation of adaptive regulating systems)

2.1 控制系统的模型 (Plant model)

考虑离散时间一阶线性系统

$$y(t+1) = 2y(t) + bu(t), \quad b \neq 0, \quad t = 0, 1, 2, \dots \quad (1)$$

其中: $y(t)$ 和 $u(t)$ 分别为系统的输出和输入, b 是一个未知的非零常数参数.这是一个不稳定的系统,其极点在 z 平面的单位圆外,即 $z = 2$.这里仅仅假定 $b \neq 0$,不需要假定已知 $|b|$ 的下界 ϵ ,因而删除了文献[1]的假定 $|b| \geq \epsilon$;但仍假定 b 的符号是未知的,这是极困难的情形.

注1 在文献[1]的参数估计式(2.6)~(2.9)中并没有使用假定 $|b| \geq \epsilon$,仅仅在该文所采用的控制律(2.17)和(2.18)中使用这个假定.本文不采用类似于该文式(2.17)和(2.18)的控制律,因此不需要已知 $|b|$ 的下界.

2.2 参数的估计算法 (Parameter estimation algorithms)

设 $b(t)$ 表示未知参数 b 在时刻 t 的估计值,则自适应调节的一步向前预报误差 $e(t+1/t)$ (下面简写成 $e(t)$) 为

$$e(t) = y(t+1) - 2y(t) - b(t)u(t) = (b - b(t))u(t). \quad (2)$$

在这种情况下,回归 $\phi(t)$ 是标量(这个记号也适用于向量的情况),即

$$\phi(t) = u(t). \quad (3)$$

分析3种离散时间的标准参数估计算法,它们中的每一种估计值的增量(即差分) $b(t+1) - b(t)$ 都是回归量、预报误差和估计量增益的一个函数,其中估计量增益不是固定的 a (在前两种情况下)就是变化的 $P(t)$ (在最后一种情况下).

I) 非规范化梯度

$$b(t+1) = b(t) + a\phi(t)e(t) = b(t) + a(b - b(t))u^2(t); \quad (4)$$

II) 规范化梯度

$$b(t+1) = b(t) + \frac{a\phi(t)e(t)}{1 + \phi^T(t)\phi(t)} = b(t) + \frac{a(b - b(t))u^2(t)}{1 + u^2(t)}; \quad (5)$$

III) 最小二乘

$$P(t+1) = P(t) - \frac{P(t)\phi(t)\phi^T(t)P(t)}{1 + \phi^T(t)P(t)\phi(t)} = \frac{P(t)}{1 + P(t)u^2(t)}, \quad (6)$$

$$b(t+1) = b(t) + P(t+1)\phi(t)e(t) = b(t) + P(t+1)(b - b(t))u^2(t). \quad (7)$$

上述3种参数估计算法的输出初值 $y(0)$ 和估计初值 $b(0)$ 都可以任意选取. 由于 $|y(t)|$ 的调节目标是零, 因此 $|y(0)|$ 的取值应该小一点, 但也不能太小, 否则难于满足参数辨识的持续激励条件. 由于 b 的数值和符号都是未知的, 因此允许 $b(0)$ 在正、负实数中任意选择. 不失一般性, 可以规定 a 和 $P(0)$ 都是大于1的正数.

显然, 基于最小二乘估计算法的自适应调节系统的状态空间是三维的, 为了使所考虑的例子可以进行相平面分析, 在进行分析之前, 先给出并证明最小二乘算法的一个性质, 在自适应调节系统的分析中(但不在实施中), 它有效地消除了3个状态分量中的一个.

引理 对系统(1), 最小二乘估计算法(6)和(7)具有如下性质:

$$P(t)\bar{b}(0) = P(0)\bar{b}(t), \quad \forall t \geq 0. \quad (8)$$

其中 $\bar{b}(t) = b - b(t)$.

证 由式(2)得 $e(t) = \bar{b}(t)u(t)$; 由式(6)得

$$P^{-1}(t) = P^{-1}(t-1) + u^2(t-1), \quad (9)$$

再由式(6), (7)和(9)推出

$$\begin{aligned} \bar{b}(t) &= \bar{b}(t-1)[1 - P(t)u^2(t-1)] = \\ &= \bar{b}(t-1)[1 + P(t-1)u^2(t-1)]^{-1}, \end{aligned}$$

即

$$\bar{b}(t)[1 + P(t-1)u^2(t-1)] = \bar{b}(t-1).$$

上式的两边同乘于 $P^{-1}(t-1)$ 就得到

$$\bar{b}(t)[P^{-1}(t-1) + u^2(t-1)] = P^{-1}(t-1)\bar{b}(t-1). \quad (10)$$

由式(9)和(10)立即推出

$$P^{-1}(t)\bar{b}(t) = P^{-1}(t-1)\bar{b}(t-1) = \dots = P^{-1}(0)\bar{b}(0),$$

即式(8)对所有 $t \geq 0$ 都成立.

2.3 控制律(Control law)

本文试图将自适应调节系统的闭环极点配置在 $z = 0$, 因而给出修改的“必然等价”控制律为

$$u(t) = \begin{cases} 2g(t)y(t)/|b(t)|, & b(t) \neq 0, \\ 1/K(t), & b(t) = 0. \end{cases} \quad (11)$$

其中 $g(t)$ 是由下式所定义的特殊符号函数:

$$g(t) = \begin{cases} -1, & t = 0 \text{ 或 } t \geq 1 \text{ 且 } |y(1)| \leq 2|y(0)|, \\ 1, & t \geq 1 \text{ 且 } |y(t)| > 2|y(0)|. \end{cases} \quad (12)$$

其中: $y(1)$ 是自适应调节系统在 $t = 1$ 时刻的输出, 而 $K(t)$ 是估计量增益 a 或 $P(t)$ 的函数. 对于第 I) 种估计, $K(t) \equiv \sqrt{a}$; 对于第 II) 种估计, $K(t) \equiv \sqrt{a-1}$; 对于第 III) 种估计, $K(t) = \sqrt{P(t+1)}$.

显然, 当 $b(t) = 0$ 时, 控制律(11)有一个奇点; 但这是可去奇点, 而且一旦在 $b(t) = 0$ 的情况下执行控制策略 $u(t) = 1/K(t)$ 后, 对3种自适应调节算法都能得到 $b(t+n) \equiv$ 系统增益 b 的真值 ($\forall n \geq 1$).

注2 虽然系统(1)的控制方向(即 b 的符号)是未知的, 但可以猜测 $\text{sgn}(b) = 1$. 如果猜测是正确的, 那么不论所选取的 $b(0)$ 是正的还是负的, 实施由式(11)确定的 $u(0)$ 的控制方向都是正确的(即负反馈), 其中 $g(0) = -1$, 由此和式(12)可以推算出 $g(t) = -1, \forall t \geq 1$. 因而在猜对的情况下, 由式(11)确定的控制律 $u(t)$ ($\forall t \geq 0$) 总是负反馈. 如果猜测是错误的, 那么原系统的增益 b 是负的. 在这种情况下, 所生成的自适应调节系统的初始控制 $u(0)$ 是正反馈, 这是一个错误的控制方向, 但这时能从式(12)推算出 $g(t) = 1, \forall t \geq 1$. 这样, 后继反馈控制 $u(y(t), b(t)), \forall t \geq 1$ 将立即被校正为负反馈. 因此, 不论是猜对还是猜错, 由式(11)确定的 $u(y(t), b(t)), \forall t \geq 1$ 的控制方向总是负反馈, 至多只是在 $t = 0$ 时可能发生控制方向上的错误, 而它绝不会持续影响后继的被控状态.

在下一节中, 将分析上面所描述的3种参数估计算法分别结合控制律(11)所生成的非线性系统. 这些分析的一个重要特点是: 求出非线性差分方程的显式解或其相平面轨道的显式表达式, 因此能够完全地描述自适应调节系统的非线性性质. 本文将详细分析第一种情况, 对于类似式样的其余两种调节器仅作简单的介绍.

3 状态和控制的有界性(Boundedness properties of the states and control)

3.1 基于非规范化梯度估计算法的自适应调节系统(Unnormalized-gradient-based adaptive regulating systems)

首先分析使用修改的“必然等价”控制律

$$u(t) = \begin{cases} 2g(t)y(t)/|b(t)|, & b(t) \neq 0, \\ 1/\sqrt{a}, & b(t) = 0 \end{cases} \quad (13)$$

和非规范化梯度算法而构成的自适应调节系统. 这个系统的状态向量由输出 $y(t)$ 和系统增益的估计 $b(t)$ 组成. 从式(13)可以看出, 在 $y(t) \neq 0$ 的情况

下, 当 $b(t) \rightarrow 0$ 时, 控制 $u(t)$ 的增益 $2g(t)/|b(t)|$ 似乎会逐渐变成无界. 因而就产生一个问题: 如此一个“无界的控制增益”是否会强迫自适应调节系统的状态 $(y(t), b(t))$ 和控制 $u(t)$ 无界地增长? 对这个自适应调节系统, 作者的回答是否定的. 即使在初始值 $b(0)$ 的符号选错的情况下, 当系统增益的估计 $b(t)$ 穿过零时, 其状态 $(y(t), b(t))$ 和控制 $u(t)$ 仍然是有界的, 且它们的瞬态过程显示出令人满意的特性.

为了便于进行分析和仿真, 下面假定 b 的实际值是

$$b = 1.5. \quad (14)$$

但对自适应调节器的设计者来说, b 的绝对值和符号都是未知的. 使用式(1) ~ (4), (13) 和(14), 当 $b(t) \neq 0$ 时, 能把非线性状态空间的差分方程组写成

$$y(t+1) = (2 + 3g(t)/|b(t)|)y(t), \quad (15)$$

$$b(t+1) = b(t) + 2a(3 - 2b(t))y^2(t)/b^2(t). \quad (16)$$

容易看出 $y(0) = 0$ 意味着 $y(t) = 0, \forall t \geq 0$. 这是式(15)和(16)的一个平衡流形, 而且平衡域

$$\{(y, b) | y = 0, b \in (b_1, b_2)\}$$

在 $|b(t)| \in (1, 3)$ 内是稳定的, 但在这一线段外 (即 $|b(t)| \leq 1$ 或 $|b(t)| \geq 3$) 是不稳定的. 一般说来, 对于不稳定状态的发展趋势有两种: 或者趋向某一平衡点 (即收敛) 或者远离所有平衡点 (即发散), 作者将证明这里不会产生发散的情况. 从式(16) 可看出, $b(0) = 1.5$ 意味着 $b(t) = 1.5, \forall t \geq 0$. 因此它是这一自适应调节系统的另一个不变流形. 在 $b(0) = 1.5$ 的情况下, 式(15)和(16)的显式解是

$$y(t) = \text{imp}(t)y(0), b(t) = 1.5, \forall t \geq 0. \quad (17)$$

其中 $\text{imp}(t)$ 是离散时间的单位脉冲函数, 即

$$\text{imp}(t) = \begin{cases} 1, & t = 0, \\ 0, & t \neq 0. \end{cases}$$

为了使得参数估计结果 $b(t)$ 具有单调性, 在 $y(t) \neq 0$ 的情况下, 对由式(16)算出的结果 $b(t+1)$ 作如下修正:

令

$$\begin{aligned} \Delta(t) &= b(t+1) - b(t), \\ \delta(t) &= \Delta(t)b^2(t)/(4ay^2(t)), \end{aligned} \quad (18)$$

则 $\text{sgn}(\Delta(t)) = \text{sgn}(\delta(t))$. 这样, 就可以修改 $b(t+1)$ 为

$$b(t+1) = b(t) + q\delta(t). \quad (19)$$

其中 q 是一个小于 1 的正数, 被称为修正因子. 从式(16), (18) 和(19) 能够推出: 修正后的差分 $b(t+1) - b(t)$ 具有不变的符号, 即

$$\begin{aligned} \text{sgn}\{b(t+1) - b(t)\} &= \\ \text{sgn}\{b - b(t)\} &= \text{sgn}\{b - b(0)\}, \forall t \geq 0. \end{aligned} \quad (20)$$

因此当 $b(0) > b$ 时, $b(t)$ 单调下降, 且 $b(t) \geq b, \forall t \geq 0$; 当 $b(0) < b$ 时, $b(t)$ 单调上升, 且 $b(t) \leq b, \forall t \geq 0$; 这意味着 $|b - b(t)|$ 总是单调递减的, 因而 $b(t)$ 必定收敛到某一常数 c , 而且总有 $|b(t)| \leq \max(|b(0)|, |c|)$, 可见 $b(t)$ 是有界的.

既然 b 是常数, 总可以选取充分大的 $b(0)$ 使得 $b(0) > b$, 因而根据上述论证必有 $c \geq b$. 另一方面, 还可以选取 $b(0)$ 使得 $b(0) < b$, 这样又能推出 $c \leq b$, 综合两方面的结论就得到

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} b(t) = c = b. \quad (21)$$

在假定(14)成立的情况下, 不论 $b(0)$ 的符号是正的还是负的, 经过一段有限长的时间 T (若 $b(0) > 0$, 则 $T = 0$) 的递推估计后总有

$$\text{sgn}(b(t)) = 1, \forall t \geq T.$$

因而差分方程(15)可以简写为

$$y(t+1) = (2 - 3/b(t))y(t), \forall t \geq T. \quad (22)$$

将式(22)平方, 并除以 $b(t+1) - b(t)$, 就可由式(16)的变形推出

$$\begin{aligned} y^2(t+1)/[b(t+1) - b(t)] &= \\ [1.5 - b(t)]/a, \forall t \geq T. \end{aligned}$$

上式两边同乘以 $[b(t+1) - b(t)]$, 并把式(16)的变形代入右边就得到

$$\begin{aligned} y^2(t+1) &= (2 - 3/b(t))^2 y^2(t) = \\ y^2(T) \prod_{i=0}^t (2 - 3/b(i))^2, \forall t \geq T. \end{aligned} \quad (23)$$

其中

$$y^2(T) = y^2(0) \prod_{i=0}^{T-1} (2 - 3/|b(i)|)^2 \quad (24)$$

是有限的. 暂时假定 $b(0) \in (1, 3)$, 由式(20) 不难推出 $b(t) \in (1, 3), \forall t \geq 0$, 则 $(2 - 3/b(t))^2 < 1 (\forall t \geq 0)$, 因而由式(23) 直接看出 $y^2(t)$ 是严格单调递减的, 即

$$y^2(0) > y^2(1) > y^2(2) > \dots > y^2(t) > \dots.$$

这就是证明了 $y^2(t)$ 的有界性, 且

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y^2(t) = 0.$$

由式(23)和(24), 获得了相平面轨道的显式表达式

$$y(t) = y(0) \prod_{i=0}^{T-1} (2 - 3/|b(i)|) \prod_{i=T}^t (2 - 3/b(i)). \quad (25)$$

显然,它是有界的,而且 $|y(t)|$ 单调递减地收敛到零,从而有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0. \tag{26}$$

定理 1 对于由式(1)~(4)和(13)组成的自适应调节系统,按 $b(0) = 1.5$ 和 $b(0) \neq 1.5$ 两种情况分别获得显式解(17)和相平面轨道的显式表达式(25).不论在哪一种情况下,状态 $(y(t), b(t))$ 和控制 $u(y(t), b(t))$ 都是有界的,而且这个自适应调节系统是渐近稳定的,其状态 $(y(t), b(t))$ 稳定在初始状态 $(y(0), 1.5)$ 或快速地收敛到平衡点 $(0, 1.5)$.

证 上面已证明了:不论 $b(0)$ 取何值, $b(t)$ 总是有界的且单调收敛到 b 的真值.当 $b(0) \in (1, 3)$ 时, $y(t)$ 有界,且单调地收敛于零;对于 $b(0) \notin (1, 3)$ 的情况,不论是 $b(0) < 1$ 还是 $b(0) > 3$,由于式(21)总是成立的,因此必存在有限长度的时间 τ 使得

$$b(t) \in (1, 3), \forall t \geq \tau.$$

如果 $\tau \leq T$,那么这个定理的所有结论在初始条件 $b(0) \notin (1, 3)$ 下也成立.如果 $\tau > T$,可重置 $T = \tau$,或将式(22)~(25)中的 T 改为 τ ,那么上述结论仍然成立.

剩下的问题是要证明控制 $u(y(t), b(t))$ 的有界性.由于 $y(t)$ 是有界的,而 $u(y(t), 0) = 1/\sqrt{a} (\forall t \geq 0)$ 是有限的,因此只需证明:在 $b(t) \neq 0$ 的情况下,控制 $u(y(t), b(t))$ 的增益 $2g(t)/|b(t)|$ 是有界的,就完成了本定理的证明.

对于任意初值 $b(0)$,数列 $\{b(t) | t = 0, 1, 2, \dots\}$ 总是单调的,具有唯一的极限点 $b \neq 0$.所以 $b_{\inf} \triangleq \inf\{|b(t)| | b(t) \neq 0, t = 0, 1, 2, \dots\} > 0$,从而有 $1/|b(t)| \leq \max\{1/b_{\inf}, 1/\sqrt{a}\}$.这就证明了 $u(y(t), b(t))$ 的有界性.

3.2 基于规范化梯度估计算法的自适应调节系统 (Normalized-gradient-based adaptive regulating systems)

其次分析使用修改的“必然等价”控制律

$$u(t) = \begin{cases} 2g(t)y(t)/|b(t)|, & b(t) \neq 0, \\ 1/\sqrt{a-1}, & b(t) = 0 \end{cases} \tag{27}$$

和规范化梯度算法而构成的自适应系统.在这种情况下,仿照 3.1 节的做法,可能建立类似的非线性状态空间的差分方程组

$$y(t+1) = (2 - 3/b(t))y(t), \tag{28}$$

$$b(t+1) = b(t) + 2a(3 - 2b(t))y^2(t)/[b^2(t) + 4^2y^2(t)]. \tag{29}$$

当 $b(0) = 1.5$ 时,同样可求得 $y(t)$ 和 $b(t)$ 的显式解(17).当 $b(0) \neq 1.5$ 时,可由式(28)递推地求出

$$y^2(t+1) = (2 - 3/b(t))^2 y^2(t) = y^2(T) \prod_{i=T}^t (2 - 3/b(i))^2. \tag{30}$$

这同式(23)一样,而且其中 $y(T)$ 的表达式同式(24)一样,只是这里的 $b(i) (i = 1, 2, \dots, t)$ 是由式(29)递推确定的,而式(23)~(25)中的 $b(i)$ 是由式(16)确定的.因此相平面轨道的显式表达式也必然同式(25)一样.这样,得到类似于定理 1 的结论.

定理 2 对于由式(1)~(3), (5)和(27)组成的自适应调节系统,按 $b(0) = 1.5$ 和 $b(0) \neq 1.5$ 两种情况分别获得显式解(17)和相平面轨道的显式表达式(25),不论在哪一种情况下,状态 $(y(t), b(t))$ 和控制 $u(y(t), b(t))$ 都是有界的,而且这个自适应调节系统是渐近稳定的,其状态 $(y(t), b(t))$ 稳定在初始状态 $(y(0), 1.5)$ 或快速地收敛到平衡点 $(0, 1.5)$.

3.3 基于最小二乘算法的自适应调节系统 (Least-squares-based adaptive regulating systems)

最后分析使用修改的“必然等价”控制律

$$u(t) = \begin{cases} 2g(t)y(t)/b(t), & b(t) \neq 0, \\ 1/\sqrt{P(t+1)}, & b(t) = 0 \end{cases} \tag{31}$$

和最小二乘算法而构成的自适应调节系统.在这种情况下,若 $b(0) \neq 1.5$,则第 2 节中引理的结论式(8)可以改写为

$$P(t+1) = P(0)[1.5 - b(t+1)]/[1.5 - b(0)]. \tag{32}$$

使用式(1)~(3), (7), (14), (31)和(32),能把所构成的非线性状态空间的差分方程组写成

$$\begin{aligned} y(t+1) &= ((2 - 3/b(t))y(t), \\ b(t+1) &= b(t) + \frac{P(0)(2b(t) - 3)^2 y^2(t)}{(1.5 - b(0))b^2(t) + P(0)(6 - 4b(t))y^2(t)}. \end{aligned} \tag{33}$$

显然,同前面两小节一样, $y(t) = 0$ 和 $b(t) = 1.5$ 分别为自适应调节系统的平衡流形和不变流形,具有相同的稳定性.当 $b(0) = 1.5$ 时(这时不能使用式(34),而使用式(7)直接推出 $b(t) = 1.5, \forall t \geq 0$),可求得 $y(t)$ 和 $b(t)$ 的显式解(17),而当 $b(0) \neq$

1.5时可求出与式(25)一样的 $y(t+1)$ 表达式,只是式中的 $b(i)(i=1,2,\dots,t)$ 是由式(34)递推地给出(在这一小节中,不再使用式(16)或(29)).这样,又得到类似于定理1或定理2的结论.

定理3 对于由式(1)~(3),(6),(7)和(31)组成的自适应调节系统,按 $b(0) = 1.5$ 和 $b(0) \neq 1.5$ 两种情况分别获得显式解(17)和相平面轨道的显式表达式(25),不论在哪一种情况下,状态 $(y(t), b(t))$ 和控制 $u(y(t), b(t))$ 都是有界的,而且这个自适应调节系统是渐近稳定的,其状态 $(y(t), b(t))$ 稳定在初始状态 $(y(0), 1.5)$ 或快速地收敛到平衡点 $(0, 1.5)$.

4 自适应调节系统的仿真 (Simulations of adaptive regulating systems)

在第3节中,分析了自适应调节系统的渐近稳定性以及状态 $(y(t), b(t))$ 和控制 $u(y(t), b(t))$ 的有界性与收敛性,主要涉及到它们的极限性质.这一节给出两个仿真例子,将表征它们在有限时间区间上的特性.

例1 在假定(14)下,对系统(1)进行自适应调节的仿真.

首先使用自适应律(4)和控制律(13)对受控系统(1)(即对由式(15)和(16)组成的非线性状态方程组)进行仿真.选取 $a_1 = 90, a_2 = 104, y(0) = \pm 0.1, b(0) = \pm 4$;对两组不同的初始值 $\{a_1 = 90, y_1(0) = 0.1, b_1(0) = 4\}$ 和 $\{a_2 = 104, y_2(0) = -0.1, b_2(0) = -4\}$ 分别进行仿真,仿真结果见图1~3.

在图1中,对应于 $\{a_1 = 90, y_1(0) = 0.1, b_1(0) = 4\}$ 和 $\{a_2 = 104, y_2(0) = -0.1, b_2(0) = -4\}$ 的输出(即调节误差)分别记为 $e_1(t)$ 和 $e_2(t)$,其中 $e_1(t) - 0.04$ 表示曲线 $e_1(t)$ 向下平行移动0.04单位高度.仿真计算进行801步($t:0 \rightarrow 800$),但由于调节误差 $e_i(t)$ 和参数估计值 $b_i(t)(i=1,2)$ 很快就收敛了,因此只画出前60步的图像.图2中的 $b_1(t)$ 和 $b_2(t)$ 别为对应于上述两组初始值的系统增益 b 的估计值曲线.图3中的 $u_1(t)$ 和 $u_2(t)$ 分别表示对应于上述两组初始值的控制量.

对于使用自适应律(5)和控制律(27)对系统(1)(即式(28)和(29)组成的非线性状态方程组)以及使用自适应律(6),(7)和控制律(31)(即式(33)和(34)组成非线性状态方程组)也进行了自适应调节的仿真.仿真结果同基于非规范化梯度算法的自适应调节系统的仿真结果差不多,图象从略.

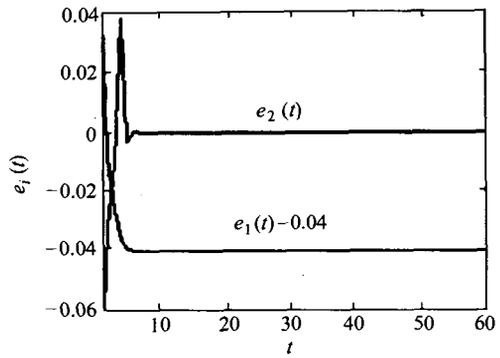


图1 自适应调节误差 $e_i(t)(i=1,2)$ 作为时间 t 的函数
Fig. 1 Adaptive regulating errors $e_i(t)(i=1,2)$ versus time t

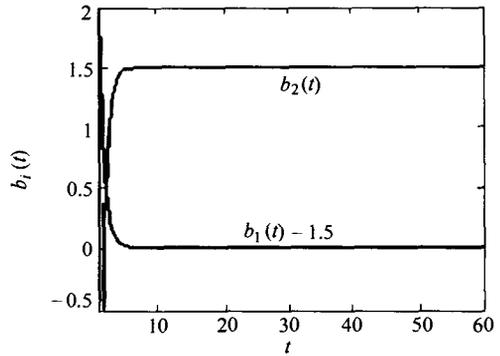


图2 系统增益 b 的UG-估计 $b_i(t)(i=1,2)$ 作为时间 t 的函数
Fig. 2 UG-estimates $b_i(t)(i=1,2)$ of the plant gain versus time t

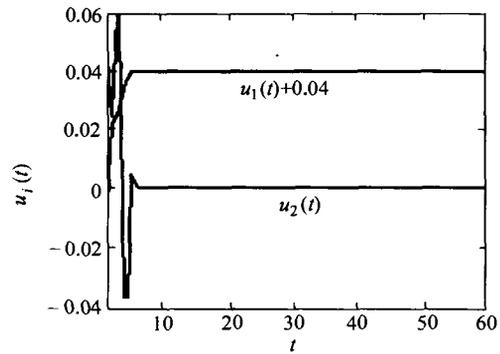


图3 系统的控制量 $u_i(t)(i=1,2)$ 作为时间 t 的函数
Fig. 3 Control quantities $u_i(t)(i=1,2)$ of the plant versus time t

例2 在假定 $b = -1.5$ 的条件下,对系统(1)进行自适应调节的仿真.

当然对于调节器的设计者来说, b 的绝对值和符号仍然都是未知的.这时非线性状态空间的差分方程(15)不变,而式(16)应改为

$$b(t+1) = (t) - 2a(3 + 2b(t))y^2(t)/b^2(t). \tag{35}$$

仍然使用自适应律(4)和控制律(13)对系统(1)(即对式(15)和(35)组成的非线性状态方程组)进行

仿真.估计 $b(t)$ 的增益 a 选为取 $a_1 = 104, a_2 = 90$; 但初值 $\{y(0), b(0)\}$ 的选取与例 1 完全相同, 仿真结果见图 4~6.

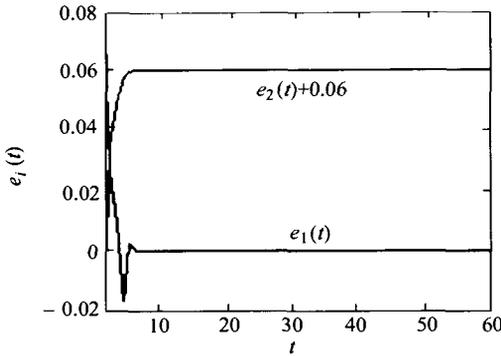


图 4 自适应调节误差 $e_i(t)$ ($i = 1, 2$) 作为时间 t 的函数

Fig. 4 Adaptive regulating errors $e_i(t)$ ($i = 1, 2$) versus time t

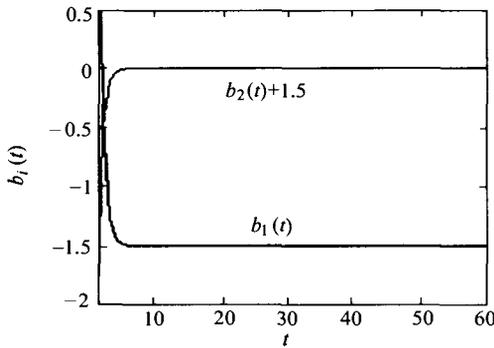


图 5 系统增益 b 的 UG-估计 $b_i(t)$ ($i = 1, 2$) 作为时间 t 的函数

Fig. 5 UG-estimates $b_i(t)$ ($i = 1, 2$) of the plant gain versus time t

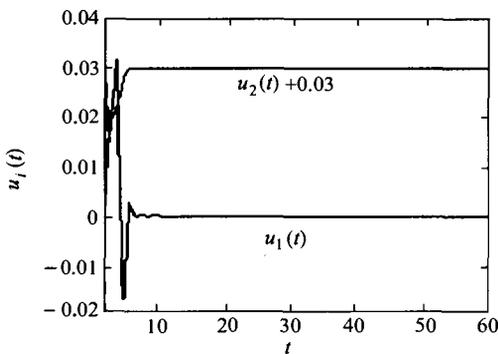


图 6 系统的控制量 $u_i(t)$ ($i = 1, 2$) 作为时间 t 的函数

Fig. 6 Control quantities $u_i(t)$ ($i = 1, 2$) of the plant versus time t

5 结束语 (Conclusion)

在系统增益的符号和数值都未知的情况下, 即使初始增益估计 $b(0)$ 的符号选错了, 3 种参数估计算法分别结合修改的“必然等价”控制律都能使估计 $b(t)$ 穿过零点而单调地收敛到 b 的真值, 从而保证了闭环系统的所有信号全局有界, 而且是渐近稳

定的.

对于具有多个未知参数(包括系统增益的符号也未知)的高阶系统, 作者认为也可以采用 2.2 节中的 3 种参数估计算法和 2.3 节的控制律, 把自适应调节系统的闭环极点全部配置在 $z = 0$, 差别仅仅在于简单极点与多重极点, 而参数估计的修正(即式(18)和(19))只需对系统增益 K 的估计值 $K(t)$ 实施就行了, 不必修正多项式 $A(\tau)$ 和 $B(\tau)$ 中的未知参数的估计结果. 作者猜想: 这样也许能够获得与一阶系统相类似的结果.

参考文献 (References):

- [1] MIDDLETON R H, KOKOTOVIC P V. Boundedness properties of simple, indirect adaptive-control systems [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1992, 37(12): 1989 - 1994.
- [2] XUDONG Y, DING Z. Robust tracking control of uncertain nonlinear systems with unknown control directions [J]. *Systems & Control Letters*, 2001, 42(1): 1 - 10.
- [3] KALOUST J, QU Z. Continuous robust control design for nonlinear uncertain systems without a priori knowledge of control direction [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1995, 40(2): 276 - 282.
- [4] ILANNOU P, SUN J. Theory and design of robust direct and indirect adaptive control [J]. *Int J Control*, 1988, 47(3): 755 - 813.
- [5] MIDDLETON R H, GOODWIN G C, MAYNE D Q, et al. Design issues in adaptive control [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1988, 33(1): 50 - 58.
- [6] SASTRY S S, BODSON M. *Adaptive Control: Stability, Convergence and Robustness* [M]. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1989.
- [7] de LARMINAT P. On the stabilizability condition in indirect adaptive control [J]. *Automatica*, 1984, 20(6): 793 - 796.
- [8] LOZANO-LEAL R, GOODWIN G C. A globally convergent adaptive pole placement algorithm without a persistency of excitation requirement [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1985, 30(8): 795 - 798.
- [9] ELLIOTT H, CRISTI R, DAS M. Global stability of adaptive pole placement algorithms [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1985, 30(4): 348 - 356.
- [10] ANDERSON B D O, JOHNSTONE R M. Global adaptive pole positioning [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1985, 30(1): 11 - 22.

作者简介:

阮荣耀 (1937—), 男, 教授, 主要研究非线性系统和不确定系统以及自适应控制和鲁棒控制, E-mail: ryruan@smmail.cn;

龚妙昆 (1959—), 男, 讲师, 主要研究数据挖掘与融合、系统辨识与适应控制和图象处理与系统仿真, E-mail: mkgong@math.ecnu.edu.cn;

杨昌利 (1963—), 女, 副教授, 主要研究非线性系统与不确定系统、自适应控制与鲁棒控制及信息管理系统与决策支持系统, E-mail: clyang@sist.ecnu.edu.cn.