

参数不确定广义大系统的保性能分散控制

史国栋^{1,2}, 沃松林², 邹云¹

(1. 南京理工大学 自动化系, 江苏 南京 210094; 2. 常州信息职业技术学院 基础部, 江苏 常州 213164)

摘要: 对一类范数有界时不变参数不确定的连续广义大系统和一个二次型性能指标, 研究了其保性能分散控制问题. 目的是设计一状态反馈分散控制器, 使得对所有容许的不确定性, 闭环系统不仅是鲁棒稳定的, 而且性能指标有一上界. 应用线性矩阵不等式方法, 给出了一个用线性矩阵不等式表达的保性能分散控制器存在的充分条件; 在此条件可解时, 给出了保性能分散控制律的表达式. 最后, 举例说明了该方法的应用.

关键词: 不确定系统; 线性矩阵不等式; 分散控制; 保性能控制

中图分类号: TP273

文献标识码: A

Guaranteed cost decentralized control for singular large-scale systems with parameter uncertainty

SHI Guo-dong^{1,2}, WO Song-lin², ZOU Yun¹

(1. Department of Automation, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing Jiangsu 210094, China;

2. Department of Basic Courses, Changzhou College of Information Technology, Changzhou Jiangsu 213164, China)

Abstract: The problem of guaranteed cost decentralized control for continuous-time singular large-scale systems with a quadratic cost function is considered. The system under discussions is subject to norm bounded time-invariant parameter uncertainty in all the matrices of model. The aim is to design a state feedback decentralized controller such that the closed-loop system is not only robustly stable but also guarantees an adequate level of performance for all admissible uncertainties. A sufficient condition for the existence of guaranteed cost decentralized controllers is also given in terms of linear matrix inequalities (LMIs) via linear matrix inequality approach. When this condition is feasible, the desired state feedback decentralized controller gain matrices can then be obtained. An illustrative example is also proposed to demonstrate the effectiveness of the proposed approach.

Key words: uncertain systems; linear matrix inequality(LMI); decentralized control; guaranteed cost control

1 引言(Introduction)

具有范数有界的不确定系统的鲁棒镇定问题已得到了广泛的研究, 取得了许多有意义的结果. 但是, 对一个实际系统仅具有稳定性是不够的, 还需要考虑其他的一些性能. 不确定系统的保性能控制(guaranteed cost control)最初由 Chang 等^[1]于 1972 年提出, 其基本思想是对参数不确定的系统, 设计一个控制器, 不仅使闭环系统鲁棒稳定, 而且使得闭环系统的性能指标具有一个确定的上界. 文献[1~6]讨论了不确定正常系统的保性能控制. 由于广义系统具有较广泛的实际背景, 它能更好地描述实际系统, 因此受到更多关注, 对于广义系统的鲁棒稳定性与镇定的研究, 已取得了一些较有意义的结果^[7~9]. 文

献[10]研究了不确定奇异时滞系统的保性能控制.

一般情况下, 由于系统元件的老化和灵敏度等内外因素的影响, 使得系统在很多方面都存在不确定因素, 这在大系统中表现尤为突出, 因而对不确定组合广义大系统的保性能控制问题研究的意义就更明显. 近年来, 不确定大系统鲁棒镇定控制的研究已经取得了不少结果^[11~16], 而对于不确定广义大系统的保性能控制, 据目前的资料来看, 还没有相关报道.

本文应用 Lyapunov 函数法和线性矩阵不等式(LMI)方法, 研究了一类具有数值界的参数时不变不确定关联广义大系统的保性能分散控制问题, 给出了控制器存在的一个充分条件和可保性能指标,

控制器可由线性矩阵不等式组求解,它可以利用 MATLAB 中的 LMI 工具箱很方便地得到系统的分散控制器,无需调整参数,因此求解方便、有效.最后给出的例子说明该方法的可行性.

2 问题的描述和准备 (Problem statement and preparation)

考虑由如下 N 个子系统组成的不确定广义大系统

$$E\dot{x}(t) = (A + \Delta A)x(t) + (B + \Delta B)u(t). \quad (1)$$

其中

$$E = \text{blockdiag}(E_1, E_2, \dots, E_N),$$

$$B = \text{blockdiag}(B_1, B_2, \dots, B_N),$$

$$A = (A_{ij}), \Delta A = (\Delta A_{ij}),$$

$$\Delta B = \text{blockdiag}(\Delta B_1, \Delta B_2, \dots, \Delta B_N),$$

$$E_i \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}, A_{ij}, \Delta A_{ij} \in \mathbb{R}^{n_i \times n_j}, i, j = 1, 2, \dots, N,$$

$$x_i \in \mathbb{R}^{n_i}, x^T = (x_1^T, x_2^T, \dots, x_N^T),$$

$$\sum_{i=1}^N n_i = n, \text{rank} E_i = r_i \leq n_i, \sum_{i=1}^N r_i = r < n,$$

$B_i, \Delta B_i$ 是具有适当维数的矩阵, A_{ij} 为第 j 个子系统对第 i 个子系统的关联作用矩阵; $\Delta A_{ij}, \Delta B_i$ 为不确定项,它是时不变的且有如下的数值界^[7]:

$$|\Delta A_{ij}| < D_{ij}, |\Delta B_i| < H_i, i, j = 1, 2, \dots, N. \quad (2)$$

其中: D_{ij}, H_i 为具有非负元素的实常数矩阵,分别与 $\Delta A_{ij}, \Delta B_i$ 具有相同维数;这里 $|\Delta| < \bar{\Delta}$ 的含义是 $|e_{ij}| \leq \bar{e}_{ij} (i, j = 1, 2, \dots, N)$, $e_{ij}, \bar{e}_{ij}$ 分别为矩阵 $\Delta, \bar{\Delta}$ 的第 (i, j) 个元素.

系统(1)的性能指标取为

$$J = \sum_{i=1}^N \int_0^{+\infty} [x_i^T(t) Q_i x_i(t) + u_i^T(t) R_i u_i(t)] dt. \quad (3)$$

其中 $Q_i > 0, R_i > 0$ 为给定的已知对称正定矩阵.

本文的目的是设计系统(1)的保性能分散控制器

$$u_i(t) = K_i x_i(t), K_i \in \mathbb{R}^{m_i \times n_i}. \quad (4)$$

为此,首先给出不确定广义大系统(1)的保性能分散控制器的定义:

定义 1 对于不确定广义大系统(1),如果存在控制器(4)和一个正数 J^* ,使得对满足式(2)的所有不确定性,闭环系统(5)都正则、无脉冲、稳定的且性能指标满足 $J \leq J^*$,则称不确定广义大系统(1)是可保性能分散控制的, J^* 为系统(1)的一个可

保性能,而控制器(4)称为广义大系统(1)的一个保性能分散控制器.

$$E\dot{x}(t) = [(A + BK) + (\Delta A + \Delta BK)]x(t), \quad (5)$$

这里 $K = \text{blockdiag}(K_1, K_2, \dots, K_N)$.

在以下的讨论中,引进一个两值函数 $\delta(\cdot)$,定义为

$$\delta(K) = \begin{cases} 0, & K = 0, \\ 1, & K \neq 0. \end{cases}$$

设 $R = (r_{ij})$ 为对称阵,记 $\text{diag}(R) = \text{diag}(r_{11}, r_{22}, \dots, r_{nn})$, I 均为适当维数的单位矩阵.

引理 1^[12] 若 $n \times m$ 阶矩阵 ΔA 满足 $|\Delta A| < D$, 则 $\Omega(D) \geq (\Delta A)(\Delta A)^T, \Gamma(D) \geq (\Delta A)^T(\Delta A)$. 式中

$$\Omega(D) = \begin{cases} \|DD^T\|I, & \|DD^T\|I < n\text{diag}(DD^T), \\ n\text{diag}(DD^T), & \text{其他}, \end{cases}$$

$$\Gamma(D) = \begin{cases} \|D^TD\|I, & \|D^TD\|I < m\text{diag}(D^TD), \\ m\text{diag}(D^TD), & \text{其他}. \end{cases}$$

这里 $\|H\|$ 为矩阵 H 的算子 2 范数.

引理 2 对于任意正数 $\varepsilon > 0$ 和适当维数的矩阵 H, F 有

$$H^TF + F^TH \leq \varepsilon H^TH + \frac{1}{\varepsilon} F^TF.$$

引理 3^[8] 设 $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}, A \geq B$, 则有 $C^TAC \geq C^TBC, \forall C \in \mathbb{R}^{n \times k}$ 成立.

对广义系统 $E\dot{x}(t) = Ax(t)$, 记 $\Phi \in \mathbb{R}^{n \times (n - \text{rank} E)}$ 为满足条件 $E\Phi = 0$ 和 $\text{rank} \Phi = n - \text{rank} E$ 的矩阵, 则有

引理 4^[9,10] 以下 4 个命题等价:

1) 广义系统 $E\dot{x}(t) = Ax(t)$ 正则、无脉冲(即 $\deg(\det(sE - A)) = \text{rank} E$) 且稳定;

2) 存在一个矩阵 P 使得 $EP^T = PE^T \geq 0$ 和 $AP^T + PA^T < 0$;

3) 存在矩阵 $X > 0, Y$ 满足 $A(EX + Y\Phi^T)^T + (EX + Y\Phi^T)A^T < 0$;

4) 存在矩阵 $X > 0, Y$ 满足 $(EX + Y\Phi^T)^{-1}A + A^T(EX + Y\Phi^T)^{-T} < 0$.

3 保性能分散控制器设计 (Design for guaranteed cost decentralized controllers)

记: $((M)_{ij})$ 是一个 $n \times n$ 阶矩阵, 将其分成 $N \times N$ 块, 分法与 $A = (A_{ij})$ 分块对应, 每一块为一个 $n_i \times n_j$ 阶矩阵, 只在第 i 行第 j 列上的块为 M (是一个 $n_i \times n_j$ 阶矩阵), 其余各块均为对应阶的零矩

阵,即

$$((M)_{ij}) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{M} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \end{bmatrix}_{N \times N},$$

又记

$$\bar{\mathbf{A}} = \text{blockdiag}(\mathbf{A}_{11}, \mathbf{A}_{22}, \cdots, \mathbf{A}_{NN}), \mathbf{A}_K = \bar{\mathbf{A}} + \mathbf{BK},$$

于是有

$$\begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{A}}_i & (\mathbf{E}_i \mathbf{X}_i + \mathbf{Y}_i \Phi_i^T) \Gamma^{\frac{1}{2}}(\mathbf{D}_{ii}) & \mathbf{Z}_i \Gamma^{\frac{1}{2}}(\mathbf{H}_i) & (\mathbf{E}_i \mathbf{X}_i + \mathbf{Y}_i \Phi_i^T) & (\mathbf{E}_i \mathbf{X}_i + \mathbf{Y}_i \Phi_i^T) & \mathbf{Z}_i \\ \Gamma^{\frac{1}{2}}(\mathbf{D}_{ii})(\mathbf{E}_i \mathbf{X}_i + \mathbf{Y}_i \Phi_i^T)^T & -\alpha_i \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \Gamma^{\frac{1}{2}}(\mathbf{H}_i) \mathbf{Z}_i^T & \mathbf{0} & -\beta_i \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ (\mathbf{E}_i \mathbf{X}_i + \mathbf{Y}_i \Phi_i^T)^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{F}_i^{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ (\mathbf{E}_i \mathbf{X}_i + \mathbf{Y}_i \Phi_i^T)^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{Q}_i^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{Z}_i^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{R}_i^{-1} \end{pmatrix} < \mathbf{0} \quad (6)$$

成立,则不确定广义大系统(1)是可保性能分散控制的,且 $\mathbf{K}_i = \mathbf{Z}_i^T (\mathbf{E}_i \mathbf{X}_i + \mathbf{Y}_i \Phi_i^T)^{-T}$ 是系统(1)的一个保性能分散控制律,其保性能指标为

$$J^* = \sum_{i=1}^N \mathbf{x}_i^T(0) \mathbf{E}_i^T (\mathbf{E}_i \mathbf{X}_i + \mathbf{Y}_i \Phi_i^T)^{-T} \mathbf{x}_i(0).$$

其中

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{A}}_i &= (\mathbf{E}_i \mathbf{X}_i + \mathbf{Y}_i \Phi_i^T) \mathbf{A}_{ii}^T + \mathbf{A}_{ii} (\mathbf{E}_i \mathbf{X}_i + \mathbf{Y}_i \Phi_i^T)^T + \\ &\quad \mathbf{B}_i \mathbf{Z}_i^T + \mathbf{Z}_i \mathbf{B}_i^T + \left\{ \epsilon \sum_{j=1, j \neq i}^N [\mathbf{A}_{ij} \mathbf{A}_{ij}^T + \Omega(\mathbf{D}_{ij})] + \right. \\ &\quad \left. [\alpha_i \delta(\mathbf{D}_{ii}) + \beta_i \delta(\mathbf{H}_i)] \mathbf{I} \right\}, \\ \mathbf{F}_i &= \frac{1}{\epsilon} \sum_{j=1, j \neq i}^N [\delta(\mathbf{A}_{jj}) + \delta(\mathbf{D}_{jj})] \mathbf{I}, \quad i = 1, 2, \cdots, N. \end{aligned}$$

证 记

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{P}}_i &= (\mathbf{E}_i \mathbf{X}_i + \mathbf{Y}_i \Phi_i^T)^{-T}, \\ \tilde{\Phi} &= \text{blockdiag}(\Phi_1, \Phi_2, \cdots, \Phi_N), \\ \tilde{\mathbf{X}} &= \text{blockdiag}(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \cdots, \mathbf{X}_N), \\ \tilde{\mathbf{Y}} &= \text{blockdiag}(\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \cdots, \mathbf{Y}_N), \\ \tilde{\mathbf{P}} &= \text{blockdiag}(\tilde{\mathbf{P}}_1, \tilde{\mathbf{P}}_2, \cdots, \tilde{\mathbf{P}}_N) \end{aligned}$$

都为块对角矩阵.则有 $\tilde{\mathbf{X}} > \mathbf{0}$, $\mathbf{E}^T \tilde{\mathbf{P}} = \tilde{\mathbf{P}}^T \mathbf{E} \geq \mathbf{0}$, $\mathbf{E} \tilde{\Phi} = \mathbf{0}$ 和 $\text{rank} \tilde{\Phi} = n - r$.

由 Schur 补引理知道:式(6)成立等价于

$$\begin{aligned} &\tilde{\mathbf{P}}_i^{-T} [\mathbf{A}_{ii} + \mathbf{B}_i \mathbf{K}_i]^T + [\mathbf{A}_{ii} + \mathbf{B}_i \mathbf{K}_i] \tilde{\mathbf{P}}_i^{-1} + \\ &\left[\epsilon \sum_{j=1, j \neq i}^N (\mathbf{A}_{ij} \mathbf{A}_{ij}^T + \Omega(\mathbf{D}_{ij})) + (\delta(\mathbf{D}_{ii}) \alpha_i + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &((\mathbf{A}_{ij})_{ij}) = ((\mathbf{A}_{ij})_{ij})((\mathbf{I})_{jj}), \\ &((\Delta \mathbf{A}_{ij})_{ij}) = ((\Delta \mathbf{A}_{ij})_{ij})((\mathbf{I})_{jj}), \\ &(\mathbf{A} + \mathbf{BK}) + (\Delta \mathbf{A} + \Delta \mathbf{BK}) = \\ &\mathbf{A}_K + \sum_{i,j=1, i \neq j}^N [((\mathbf{A}_{ij})_{ij}) + ((\Delta \mathbf{A}_{ij})_{ij})] + \\ &\sum_{i=1}^N [((\Delta \mathbf{A}_{ii})_{ii}) + ((\Delta \mathbf{B}_i \mathbf{K}_i)_{ii})]. \end{aligned}$$

再记 $\Phi_i \in \mathbb{R}^{n_i \times (n_i - r_i)}$ 为满足条件 $\mathbf{E}_i \Phi_i = \mathbf{0}$ 和 $\text{rank} \Phi_i = n_i - r_i$ 的矩阵.

定理 1 对不确定组合广义大系统(1),如果存在正定矩阵 $\mathbf{X}_i \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}$, 矩阵 $\mathbf{Y}_i, \mathbf{Z}_i$ 和正数 $\alpha_i, \beta_i, \epsilon$ 使得下述线性矩阵不等式组(LMIs)

$$\begin{aligned} &\delta(\mathbf{H}_i) \beta_i \mathbf{I}] + \frac{1}{\epsilon} \sum_{j=1, j \neq i}^N [\delta(\mathbf{A}_{jj}) + \delta(\mathbf{D}_{jj})] \tilde{\mathbf{P}}_i^{-T} \tilde{\mathbf{P}}_i^{-1} + \\ &\alpha_i^{-1} \tilde{\mathbf{P}}_i^{-T} \Gamma(\mathbf{D}_{ii}) \tilde{\mathbf{P}}_i^{-1} + \beta_i^{-1} \tilde{\mathbf{P}}_i^{-T} \mathbf{K}_i^T \Gamma(\mathbf{H}_i) \mathbf{K}_i \tilde{\mathbf{P}}_i^{-1} + \\ &\tilde{\mathbf{P}}_i^{-T} \mathbf{Q}_i \tilde{\mathbf{P}}_i^{-1} + \tilde{\mathbf{P}}_i^{-T} \mathbf{K}_i^T \mathbf{R}_i \mathbf{K}_i \tilde{\mathbf{P}}_i^{-1} < \mathbf{0} \end{aligned} \quad (7)$$

成立.又因为:由引理 1~3 可推出

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^N [\tilde{\mathbf{P}}^T ((\Delta \mathbf{A}_{ii})_{ii}) + ((\Delta \mathbf{A}_{ii})_{ii})^T \tilde{\mathbf{P}}] \leq \\ &\sum_{i=1}^N ((\alpha_i \delta(\mathbf{D}_{ii}) \tilde{\mathbf{P}}_i^T \tilde{\mathbf{P}}_i + \alpha_i^{-1} \Gamma(\mathbf{D}_{ii}))_{ii}), \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^N [\tilde{\mathbf{P}}^T ((\Delta \mathbf{B}_i \mathbf{K}_i)_{ii}) + ((\Delta \mathbf{B}_i \mathbf{K}_i)_{ii})^T \tilde{\mathbf{P}}] \leq \\ &\sum_{i=1}^N ((\beta_i \delta(\mathbf{H}_i) \tilde{\mathbf{P}}_i^T \tilde{\mathbf{P}}_i + \beta_i^{-1} \mathbf{K}_i^T \Gamma(\mathbf{H}_i) \mathbf{K}_i)_{ii}), \end{aligned} \quad (9)$$

而

$$\begin{aligned} &\{(\mathbf{A} + \mathbf{BK}) + (\Delta \mathbf{A} + \Delta \mathbf{BK})\}^T (\mathbf{E} \mathbf{X} + \mathbf{Y} \Phi^T)^{-T} + \\ &(\mathbf{E} \mathbf{X} + \mathbf{Y} \Phi^T)^{-1} \{(\mathbf{A} + \mathbf{BK}) + (\Delta \mathbf{A} + \Delta \mathbf{BK})\} = \\ &\{(\mathbf{A} + \mathbf{BK}) + (\Delta \mathbf{A} + \Delta \mathbf{BK})\}^T \tilde{\mathbf{P}} + \\ &\tilde{\mathbf{P}}^T \{(\mathbf{A} + \mathbf{BK}) + (\Delta \mathbf{A} + \Delta \mathbf{BK})\} \leq \\ &\mathbf{A}_K^T \tilde{\mathbf{P}} + \tilde{\mathbf{P}}^T \mathbf{A}_K + \epsilon \tilde{\mathbf{P}}^T \sum_{i,j=1, i \neq j}^N [((\mathbf{A}_{ij} \mathbf{A}_{ij}^T)_{ii}) + \\ &((\Omega(\mathbf{D}_{ij}))_{ii})] \tilde{\mathbf{P}} + \frac{1}{\epsilon} \sum_{j=1, j \neq i}^N [\delta(\mathbf{A}_{jj}) + \delta(\mathbf{D}_{jj})] ((\mathbf{I})_{jj}) + \\ &\sum_{i=1}^N [((\alpha_i \delta(\mathbf{D}_{ii}) \tilde{\mathbf{P}}_i^T \tilde{\mathbf{P}}_i + \alpha_i^{-1} \Gamma(\mathbf{D}_{ii}))_{ii}) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& ((\beta_i \delta(H_i) \tilde{P}_i^T \tilde{P}_i + \beta_i^{-1} K_i^T \Gamma(H_i) K_i)_{ii}) = \\
& \sum_{i=1}^N ((A_{ii} + B_i K_i)^T \tilde{P}_i + \tilde{P}_i^T (A_{ii} + B_i K_i) + \\
& \tilde{P}_i^T [\epsilon \sum_{j=1, j \neq i}^N (A_{ij} A_{ij}^T + \Omega(D_{ij})) + (\delta(D_{ii}) \alpha_i + \\
& \delta(H_i) \beta_i) I] \tilde{P}_i + \frac{1}{\epsilon} \sum_{j=1, j \neq i}^N [\delta(A_{ji}) + \delta(D_{ji})] I + \\
& \alpha_i^{-1} \Gamma(D_{ii}) + \beta_i^{-1} K_i^T \Gamma(H_i) K_i)_{ii} < 0. \quad (10)
\end{aligned}$$

只要

$$\begin{aligned}
& [A_{ii} + B_i K_i]^T \tilde{P}_i + \tilde{P}_i^T [A_{ii} + B_i K_i] + \\
& \tilde{P}_i^T [\epsilon \sum_{j=1, j \neq i}^N (A_{ij} A_{ij}^T + \Omega(D_{ij})) + (\delta(D_{ii}) \alpha_i + \\
& \delta(H_i) \beta_i) I] \tilde{P}_i + \frac{1}{\epsilon} \sum_{j=1, j \neq i}^N [\delta(A_{ji}) + \delta(D_{ji})] I + \\
& \alpha_i^{-1} \Gamma(D_{ii}) + \beta_i^{-1} K_i^T \Gamma(H_i) K_i < 0. \quad (11)
\end{aligned}$$

由引理 1 可知, $\Gamma(D_{ii}), \Gamma(H_i)$ 均为正定或半正定矩阵, 可分解为 $\Gamma(D_{ii}) = \Gamma^{\frac{1}{2}}(D_{ii}) \Gamma^{\frac{1}{2}}(D_{ii})$, $\Gamma(H_i) = \Gamma^{\frac{1}{2}}(H_i) \Gamma^{\frac{1}{2}}(H_i)$; 对式(11) 两边分别左乘 $\tilde{P}_i^{-T}$ 和右乘 $\tilde{P}_i^{-1}$, 并令 $Z_i = \tilde{P}_i^{-T} K_i^T$, 由式(7)和引理 4 知: 在定理 1 的条件下不确定广义大系统(1)是正则、无脉冲且稳定的。

取 $V(x(t)) = x^T(t) E^T \tilde{P} x(t) \geq 0$, 则在定理 1 的条件下, 式(7)成立, 从而有

$$\begin{aligned}
& [A_{ii} + B_i K_i]^T \tilde{P}_i + \tilde{P}_i^T [A_{ii} + B_i K_i] + \\
& \tilde{P}_i^T [\epsilon \sum_{j=1, j \neq i}^N (A_{ij} A_{ij}^T + \Omega(D_{ij})) + \\
& (\delta(D_{ii}) \alpha_i + \delta(H_i) \beta_i) I] \tilde{P}_i + \\
& \frac{1}{\epsilon} \sum_{j=1, j \neq i}^N [\delta(A_{ji}) + \delta(D_{ji})] I + \alpha_i^{-1} \Gamma(D_{ii}) + \\
& \beta_i^{-1} K_i^T \Gamma(H_i) K_i + Q_i + K_i^T R_i K_i < 0 \quad (12)
\end{aligned}$$

成立. 考虑到式(10)知, $V(x(t))$ 沿着系统(5)的导数为

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} V(x(t)) = x^T(t) \{ [(A + BK) + (\Delta A + \Delta BK)]^T \tilde{P} + \\
& \tilde{P}^T [(A + BK)(\Delta A + \Delta BK)] \} x(t) \leq \\
& - \sum_{i=1}^N x_i^T(t) [Q_i + K_i^T R_i K_i] x_i(t).
\end{aligned}$$

不等式两边对 t 从 0 到 t 积分得

$$\begin{aligned}
& V(x(t)) - V(x(0)) \leq \\
& - \sum_{i=1}^N \int_0^t x_i^T(\tau) [Q_i + K_i^T R_i K_i] x_i(\tau) d\tau.
\end{aligned}$$

令 $t \rightarrow +\infty$ 知道

$$J = \sum_{i=1}^N \int_0^{+\infty} [x_i^T(t) Q_i x_i(t) + u_i^T(t) R_i u_i(t)] dt \leq$$

$$V(x(0)) = \sum_{i=1}^N x_i^T(0) E_i^T (E_i X_i + Y_i \Phi_i^T)^{-T} x_i(0),$$

所以不确定广义大系统(1)是可保性能分散控制的, 且 $K_i = Z_i^T (E_i X_i + Y_i \Phi_i^T)^{-T}$ 是系统(1)的一个分散控制律, 其保性能指标 $J^* = \sum_{i=1}^N x_i^T(0) E_i^T (E_i X_i + Y_i \Phi_i^T)^{-T} x_i(0)$.

注 1 定理 1 中所得到的闭环系统性能指标的界依赖于初始状态 $x_i(0)$, 而在实际系统中, 人们往往难以精确确定系统的初始状态 $x_i(0)$. 为了克服这个困难, 假定 $x_i(0)$ 满足 $E(x_i(0) x_i^T(0)) = I$, 这里 $E(\cdot)$ 表示随机变量 $\cdot$ 的期望, 此时, 闭环系统性能指标的期望值

$$\begin{aligned}
E(J^*) &= \sum_{i=1}^N E\{x_i^T(0) E_i^T (E_i X_i + Y_i \Phi_i^T)^{-T} x_i(0)\} \leq \\
&\sum_{i=1}^N \text{tr}[E_i^T (E_i X_i + Y_i \Phi_i^T)^{-T}], \\
\bar{J} &= \sum_{i=1}^N \text{tr}[E_i^T (E_i X_i + Y_i \Phi_i^T)^{-T}]
\end{aligned}$$

也可称为系统的保性能。

从定理 1 的证明和函数 $\delta(\cdot)$ 的定义可知道

定理 2 对不确定关联广义大系统(1), 如果存在正定矩阵 $X_i > 0$, 矩阵 Y_i, Z_i 和正数 $\alpha_i, \beta_i, \epsilon$ 使得下述线性矩阵不等式组(LMIs)

$$\begin{pmatrix}
\hat{A}_i & (E_i X_i + Y_i \Phi_i^T) \Gamma^{\frac{1}{2}}(D_{ii}) & Z_i \Gamma^{\frac{1}{2}}(H_i) & (E_i X_i + Y_i \Phi_i^T) & (E_i X_i + Y_i \Phi_i^T) & Z_i \\
\Gamma^{\frac{1}{2}}(D_{ii}) (E_i X_i + Y_i \Phi_i^T)^T & -\alpha_i I & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\Gamma^{\frac{1}{2}}(H_i) Z_i^T & 0 & -\beta_i I & 0 & 0 & 0 \\
(E_i X_i + Y_i \Phi_i^T)^T & 0 & 0 & -\hat{F}_i^{-1} & 0 & 0 \\
(E_i X_i + Y_i \Phi_i^T)^T & 0 & 0 & 0 & -Q_i^{-1} & 0 \\
Z_i^T & 0 & 0 & 0 & 0 & -R_i^{-1}
\end{pmatrix} < 0 \quad (13)$$

成立,则不确定广义大系统(1)是可保性能分散控制的,且 $K_i = Z_i^T(E_i X_i + Y_i \Phi_i^T)^{-T}$ 是系统(1)的一个保性能分散控制律,其保性能为 $\bar{J} = \sum_{i=1}^N \text{tr}[E_i^T(E_i X_i + Y_i \Phi_i^T)^{-T}]$. 其中

$$\begin{aligned} \hat{A}_i &= (E_i X_i + Y_i \Phi_i^T) A_{ii}^T + \\ &A_{ii}(E_i X_i + Y_i \Phi_i^T)^T + B_i Z_i^T + Z_i B_i^T + \\ &\left\{ \epsilon \sum_{j=1, j \neq i}^N [A_{ij} A_{ij}^T + \Omega(D_{ij})] + (\alpha_i + \beta_i) I \right\}, \\ \hat{F}_i &= \frac{2}{\epsilon} (N-1) I, \quad i = 1, 2, \dots, N. \end{aligned}$$

注 2 定理 2 给出了不确定广义大系统(1)完全由子系统决定的可保性能分散控制的充分条件及其保性能指标.

4 仿真示例(Illustrative example)

沿用前面的记号,考虑一个由两个子系统组成的不确定线性大系统(1),其不确定项具有数值界,其中

$$\begin{aligned} E_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_{11} = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}, \\ A_{12} &= \begin{pmatrix} 0.1 & -0.2 & 0.1 \\ -0.2 & 0.1 & -0.1 \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \\ E_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_{22} = \begin{pmatrix} 7 & -5 & 0.5 \\ -15 & 5 & -8 \\ -6 & -5 & 15 \end{pmatrix}, \\ A_{21} &= \begin{pmatrix} -0.5 & 0.5 \\ 0.5 & -0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -0.5 \\ 1.5 & 1 \end{pmatrix}, \\ D_{11} &= \begin{pmatrix} 0.02 & 0.03 \\ 0.05 & 0.02 \end{pmatrix}, \quad D_{12} = \begin{pmatrix} 0.05 & 0.02 & 0.01 \\ 0.02 & 0.05 & 0.03 \end{pmatrix}, \\ H_1 &= \begin{pmatrix} 0.01 \\ 0.02 \end{pmatrix}, \quad D_{22} = \begin{pmatrix} 0.05 & 0.01 & 0.02 \\ 0.01 & 0.02 & 0.01 \\ 0.02 & 0 & 0.04 \end{pmatrix}, \\ D_{21} &= \begin{pmatrix} 0.02 & 0 \\ 0.01 & 0.05 \\ 0.03 & 0.05 \end{pmatrix}, \quad H_2 = \begin{pmatrix} 0.02 & 0.01 \\ 0.01 & 0 \\ 0.01 & 0.03 \end{pmatrix}, \\ Q_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad Q_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ R_1 &= 1, \quad R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

选择 $\Phi_1 = [0, 1]^T$, $\Phi_2 = [-1, 1, 2]^T$, 应用 MATLAB LMI 控制工具包解式(13),可求得反馈增益为 $K = \text{diag}(K_1, K_2)$, 相应的保性能指标 $\bar{J} = 11.7603$.

其中

$$\begin{aligned} K_1 &= (-14.4064 \quad 1.9893), \\ K_2 &= \begin{pmatrix} -2.2889 & 0.2016 & -1.9686 \\ 0.7845 & -0.0197 & 0.9496 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

虽然待求解是一组 LMIs,且含有多个参数,但在 LMITOOL 环境下可一次求出,求解方便,无需预先调整参数,克服 Riccati 方程方法的不足.

5 结束语(Conclusion)

对一类参数不确定广义大系统和一个给定的二次型性能指标,在其不确定性具有数值界条件下,应用线性矩阵不等式(LMI)方法,给出了一个保性能分散鲁棒控制器存在的充分条件,其存在性依赖于相应的 LMIs 的解.该方法不需参数调整,便于应用.

参考文献(References):

- [1] CHANG S S L, PENG T K C. Adaptive guaranteed cost control of systems with uncertain parameter [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1972, 17(4): 474-483.
- [2] PETERSEN I R, McFARIANE D C. Optimal guaranteed cost control and filtering for uncertain linear systems [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1994, 39(9): 1971-1977.
- [3] 俞立, 王景成, 褚健. 不确定离散动态系统的保性能控制[J]. *自动化学报*, 1998, 24(3): 414-417.
(YU Li, WANG Jingcheng, CHU Jian. Guaranteed cost control for uncertain discrete-time linear systems [J]. *Acta Automatica Sinica*, 1998, 24(3): 414-417.)
- [4] YU L, CHU J. An LMI approach to guaranteed cost control of linear uncertain time-delay systems [J]. *Automatica*, 1999, 35(6): 1155-1159.
- [5] 俞立, 冯浩. 不确定离散时滞系统的保性能控制[J]. *自动化学报*, 2001, 27(3): 392-396.
(YU Li, FENG Hao. Guaranteed cost control of discrete-time uncertain time-delay systems [J]. *Acta Automatica Sinica*, 2001, 27(3): 392-396.)
- [6] XU Shengyuan, LAM J, YANG Chengwu, et al. An LMI approach to guaranteed cost control for uncertain linear neutral delay systems [J]. *Int J of Robust and Nonlinear Control*, 2003, 13(1): 35-53.
- [7] MASUBUCHI I, KAMITANE Y, OHARA A, et al. H_∞ control for descriptor systems: a matrix inequalities approach [J]. *Automatica*, 1997, 33(4): 669-673.
- [8] XU Shengyuan, Van DOOREN P, STEFAN R, et al. Robust stability and stabilization for singular systems with state and parameter uncertainty [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2002, 47(7): 1122-1128.
- [9] ISHIHARA J Y, TERRA M H. On the Lyapunov theorem for singular systems [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2002, 47(11): 1926-1930.

- [10] 冯俊娥,程兆林.不确定奇异时滞系统的保性能控制[J].控制与决策,2002,17(增刊):711-714.
(FENG June, CHENG Zhaolin. Guaranteed cost control of linear uncertain singular time-delay systems [J]. *Control and Decision*, 2002, 17(Suppl.):711-714.)
- [11] HOVD M, SKOGESTAD S. Control of symmetrically interconnected plants [J]. *Automatica*, 1994, 30(6):957-973.
- [12] 刘新宇,高立群,张文力.不确定线性组合系统的分散镇定和输出跟踪[J].信息与控制,1998,27(5):342-350.
(LIU Xinyu, GAO Liqun, ZHANG Wengli. Decentralized robust control for linear uncertain interconnected systems [J]. *Information and Control*, 1998, 27(5):342-350.)
- [13] XU S, LAM J, YANG C, et al. Verriest. An LMI approach to guaranteed cost control for uncertain linear neutral delay systems [J]. *Int J of Robust Nonlinear Control*, 2003, 13(1):35-53.
- [14] 谢永芳,桂卫华,刘晓颖,等.时变不确定关联系统的分散鲁棒控制器设计[J].控制理论与应用,1999,16(6):903-906.
(XIE Yongfang, GUI Weihua, LIU Xiaoying, et al. Decentralized robust stabilizing control design for interconnected time-varying uncertain systems [J]. *Control Theory & Applications*, 1999, 16(6):903-906.)
- [15] 俞立.一类线性离散时滞大系统的分散镇定[J].控制理论与应用,2000,17(1):125-127.
(YU Li. Decentralized stabilization of a class of large-scale linear discrete time-delay systems [J]. *Control Theory & Applications*, 2000, 17(1):125-127.)
- [16] JUN-JUH Y, TSAI J S H, KUNG F C. Robust stabilization of large scale systems with nonlinear uncertainties via decentralized state feedback [J]. *J of Franklin Institute*, 1998, 335B(5):951-961.

作者简介:

史国栋 (1956—),男,常州信息职业技术学院教授,1982年毕业于江苏大学获工学学士学位,现为南京理工大学自动化系控制理论与控制工程学科博士研究生,近期研究兴趣主要为广义大系统理论, E-mail:sgd@ccit.js.cn;

沃松林 (1964—),男,常州信息职业技术学院教授,1985年7月和1988年7月于四川大学数学系获理学学士和硕士学位,2005年1月于南京理工大学获控制科学与工程学科博士学位,近期研究兴趣主要为广义大系统理论和时滞广义系统, E-mail: wosonglin2000@yahoo.com.cn;

邹云 (1962—),男,教授,博士生导师,美国《数学评论》评论员,美国国家数学学会(AMS)会员,1983年于西北大学数学系计算数学专业获理学学士学位,1987年和1990年于南京理工大学动力工程学院分获控制理论与控制工程学科工学硕士和工学博士学位,1990年于南京理工大学任教至今,近期研究兴趣主要为奇异系统理论、应急控制与评估理论与应用以及电力系统自动化等, E-mail: zouyun@jlonline.com.

(上接第904页)

展会同期还举行“五大工业展 CEO 论坛”、中国液压气动密封件行业发展研讨会、第二届中德论坛——制造业的未来、第四届 MES(制造执行系统)开发与应用研讨会等 30 多场论坛和会议,构筑工业技术交流的完整平台。

费斯托(中国)有限公司裘华徕总经理表示:“今年的展会规模比往年大了很多,令人印象深刻的是展台布置的效果也提高了很多,对我们来说,这个展不仅是客户多,同时还是一个非常好的和同行交流学习的机会。”西门子(中国)有限公司执行副总裁何维克先生评价说:“今年展会的参展情况非常好,我们很高兴能见到很多高质量的客户。在参展过程中我感受到不仅仅是观众的数量,而且更重要的是质量也很好。他们受过高等教育,对自己感兴趣的业务领域很熟悉,并且非常愿意了解和学习我们提供的产品和系统。”

五大展会同时也吸引了许多政府高层人士参加。德国下萨克森州副州长希尔歇先生携高层德国制造行业领导专程访问了本次展会。德国汉诺威市市长司马梯格博士、中国机械工业联合会薛德林副会长在开幕式上致辞,强调了展会的重要性。中央电视台、凤凰卫视、上海电视台、第一财经、中国日报和许多专业媒体都对展会作了大量报道。

本次展会与中国物流与采购联合会、中国液压气动密封件工业协会、中国机械通用零部件工业协会、中国电器工业协会、中国轴承进出口联营公司等中方合作伙伴强强联手合作举办,并得到了国内外相关行业的权威工业协会的大力支持。作为展示当今工业的重要平台,五大工业展会的同时召开,实现了从机械零部件到主机的一站式采购,并为亚洲制造业发展提供最佳解决方案,创造开展国际贸易的最佳交流平台。2006年10月10~13日,动力传动展、亚洲物流展、亚洲能源展、工厂自动化展、过程自动化展和金属加工展六大工业展期待明年再次会聚上海新国际博览中心。

(汉诺威展览会(中国)有限公司新闻部)