

输入向量控制细胞神经网络全局指数稳定

曾志刚^{1,2}, 廖晓昕³, 汪增福²

(1. 武汉理工大学 自动化学院, 湖北 武汉 430070; 2. 中国科学技术大学 自动化系, 安徽 合肥 230026;

3. 华中科技大学 控制科学与工程系, 湖北 武汉 430074)

摘要: 利用输入向量来控制细胞神经网络的稳定性. 所得结果表明, 当输入向量的绝对值大于某个仅仅只与细胞神经网络的物理参数有关的值时, 不附加其它任何条件, 细胞神经网络是全局指数稳定的. 也讨论了输入向量的部分分量的绝对值大于某个仅仅只与细胞神经网络的物理参数有关的值时, 细胞神经网络的全局指数稳定性, 所得结论推广和改进了一些已有文献的相应结果.

关键词: 输入向量; 神经网络; 指数稳定; 吸引区域

中图分类号: TP13

文献标识码: A

Global exponential stability of cellular neural networks
with input vectorZENG Zhi-gang^{1,2}, LIAO Xiao-xin³, WANG Zeng-fu²

(1. School of Automation, Wuhan University of Technology, Wuhan Hubei 430070, China;

2. Department of Automation, University of Science and Technology of China, Hefei Anhui 230026, China;

3. Department of Control Science and Engineering, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan Hubei 430074, China)

Abstract: Stability of cellular neural networks is studied by using input vector. A threshold, which is only relevant with the parameters of the networks, is identified. If absolute value of input vector is greater than the threshold, the cellular neural network is globally exponentially stable without any other confinement for the parameters of the networks. If a part of input vector is greater than the threshold, a sufficient criterion of stability of the cellular neural networks has also been obtained. The results presented in this paper are the improvement and extension of the existing ones.

Key words: input vector; neural network; exponential stability; attractive domain

1 引言 (Introduction)

自从 L. O. Chua 等^[1,2]首次提出细胞神经网络理论与应用以来, 细胞神经网络得到了广泛的研究, 并成功用于信号处理、图像处理和解非线性代数方程等等. 这些应用依赖于神经网络平衡点的存在性与稳定性^[3,4]. 同时由于在信号放大器的设计中, 时延不可避免, 时延扰动可能引起系统不稳定或振动^[5]. 近年来, 时滞细胞神经网络以及它们的各种各样的推广形式的稳定性的研究引起了广泛的重视^[6]. 利用构造 Lyapunov 泛函, 结合不等式分析技巧, 有许多国内外专家得到很多很好的结果^[7-13], 给出了具有时滞的细胞神经网络 (DCNNs) 稳定性的一些充分条件.

另一方面, 在大规模电路的设计实践中, 外部输

入扰动是经常需要考虑的问题. 本文利用输入向量来控制时滞细胞神经网络的稳定性. 所得结论推广和改进了一些已有文献的相应结果.

具有界变时滞的细胞神经网络 (DCNNs) 的动力学行为可描述为, 对 $i = 1, 2, \dots, n$,

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = -c_i x_i(t) + \sum_{j=1}^n a_{ij} f(x_j(t)) + \sum_{j=1}^n b_{ij} f(x_j(t - \tau_{ij}(t))) + I_i, \quad (1)$$

这里 a_{ij} 和 b_{ij} 是细胞神经元之间的常数连接权, c_i 是正常数, $\tau_{ij}(t)$ 是满足 $0 \leq \tau_{ij}(t) \leq \tau$ (常数) 的有界变时滞, $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$. $I = (I_1, I_2, \dots, I_n)^T$ 是常数输入向量, f 是细胞神经激励函数

$$f(u) = (|u+1| - |u-1|)/2.$$

因为 $f(u)$ 是有界连续函数, DCNNs(1) 的平衡点的存在性可由 Schauder 不动点定理得到. 令

$$X^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)^T$$

是 DCNNs(1) 的一个平衡点, 再令

$$y_i(t) = x_i(t) - x_i^*,$$

$$g(y_i(t)) = f(y_i(t) + x_i^*) - f(x_i^*). \quad (2)$$

则 DCNNs(1) 等价于

$$\begin{aligned} \frac{dy_i(t)}{dt} = & -c_i y_i(t) + \sum_{j=1}^n a_{ij} g(y_j(t)) + \\ & \sum_{j=1}^n b_{ij} g(y_j(t - \tau_{ij}(t))). \end{aligned} \quad (3)$$

令 $C([t_0 - \tau, t_0], \mathbb{R}^n)$ 是映区间 $[t_0 - \tau, t_0]$ 到 $\mathbb{R}^n$ 的所有连续函数的集合, 这里 t_0 为神经网络的初始时刻. 对 $\forall \phi \in C([t_0 - \tau, t_0], \mathbb{R}^n)$, 记 $x(t, t_0, \phi)$ (或 $y(t, t_0, \phi)$) 是 DCNNs(1) (或 DCNNs(3)) 的具有初始条件 (t_0, ϕ) 的一个状态; 即当 $\theta \in [t_0 - \tau, t_0]$, $x(\theta, t_0, \phi) = \phi(\theta)$ (或 $y(\theta, t_0, \phi) = \phi(\theta)$). 也简记 $x(t)$ (或 $y(t)$) 是 DCNNs(1) (或 DCNNs(3)) 的状态.

2 主要结果(Main results)

定理 1 令 $\Omega_{\lambda} = \{(x_1, x_2, \dots, x_n), |x_i - x_i^*| \leq$

$2 \sum_{j=1}^n (|a_{ij}| + |b_{ij}|)/c_i, i = 1, 2, \dots, n\}$, 则任一包含 Ω_{λ} 的开集 D 是细胞神经网络(1) 的指数吸引区域.

证 因为 $|g(y_i(t))| \leq 2$, 由式(2)(3) 知

$$\begin{aligned} \frac{dy_i(t)}{dt} \leq & -c_i y_i(t) + 2 \sum_{j=1}^n (|a_{ij}| + |b_{ij}|), \text{ 从而} \\ y_i(t) \leq & (y_i(t_0) - 2 \sum_{j=1}^n (|a_{ij}| + |b_{ij}|)/c_i) e^{-c_i(t-t_0)} + \\ & 2 \sum_{j=1}^n (|a_{ij}| + |b_{ij}|)/c_i. \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \text{同理} \frac{dy_i(t)}{dt} \geq & -c_i y_i(t) - 2 \sum_{j=1}^n (|a_{ij}| + |b_{ij}|), \text{ 从而} \\ y_i(t) \geq & (y_i(t_0) + 2 \sum_{j=1}^n (|a_{ij}| + |b_{ij}|)/c_i) e^{-c_i(t-t_0)} - \\ & 2 \sum_{j=1}^n (|a_{ij}| + |b_{ij}|)/c_i. \end{aligned} \quad (5)$$

记 $\Omega_{\lambda} = \{(y_1, y_2, \dots, y_n), |y_i| \leq 2 \sum_{j=1}^n (|a_{ij}| + |b_{ij}|)/c_i, i = 1, 2, \dots, n\}$ 则由式(4)(5) 知包含 Ω_{λ} 的开集是 DCNNs(3) 的指数吸引区域. 从而由式(2) 知任一包含 Ω_{λ} 的开集 D 是 DCNNs(1) 的指数吸引区域.

注 1 定理 1 表明当细胞神经网络的一个平衡点 X^* 已知时, 该细胞神经网络的其它平衡点 (如果存在) 一定在一个有界区域 Ω_{λ} 内.

定理 2 当 $|I_i| > c_i + 3 \sum_{j=1}^n (|a_{ij}| + |b_{ij}|)$, (i

$= 1, 2, \dots, n$) 时, 网络(1) 全局指数渐近稳定.

证 不妨设

$$I_i > c_i + 3 \sum_{j=1}^n (|a_{ij}| + |b_{ij}|), i = 1, 2, \dots, l;$$

$$I_k < -c_k - 3 \sum_{j=1}^n (|a_{kj}| + |b_{kj}|), k = l+1, \dots, n,$$

其中 $0 \leq l \leq n$. 设 $\bar{X}^* = (\bar{x}_1^*, \bar{x}_2^*, \dots, \bar{x}_n^*)^T$ 是 DCNNs(1) 的一个平衡点, 则对 $i \in \{1, 2, \dots, l\}$ 有

$$\begin{aligned} c_i \bar{x}_i^* = & \sum_{j=1}^n a_{ij} f(\bar{x}_j^*) + \sum_{j=1}^n b_{ij} f(\bar{x}_j^*) + I_i \geq \\ & - \sum_{j=1}^n (|a_{ij}| + |b_{ij}|) + I_i > \\ & c_i + 2 \sum_{j=1}^n (|a_{ij}| + |b_{ij}|). \end{aligned} \quad (6)$$

同理对 $k \in \{l+1, \dots, n\}$ 有

$$\begin{aligned} c_i \bar{x}_i^* = & \sum_{j=1}^n a_{ij} f(\bar{x}_j^*) + \sum_{j=1}^n b_{ij} f(\bar{x}_j^*) + I_i \leq \\ & \sum_{j=1}^n (|a_{ij}| + |b_{ij}|) + I_i < \\ & -c_k - 2 \sum_{j=1}^n (|a_{kj}| + |b_{kj}|). \end{aligned} \quad (7)$$

由式(6)(7) 知对充分小的 $\varepsilon > 0$, $i \in \{1, 2, \dots, l\}$, $k \in \{l+1, \dots, n\}$ 有

$$\bar{x}_i^* \geq 1 + 2 \sum_{j=1}^n (|a_{ij}| + |b_{ij}|)/c_i + \varepsilon, \quad (8)$$

$$\bar{x}_k^* \leq -1 - 2 \sum_{j=1}^n (|a_{kj}| + |b_{kj}|)/c_k - \varepsilon. \quad (9)$$

又由定理 1 知存在仅依赖 $x(t_0)$ 和 ε 的 T_1 , 对所有 $h \in \{1, 2, \dots, n\}$, 当 $t > T_1$ 时,

$$|x_h(t) - x_h^*| \leq 2 \sum_{j=1}^n (|a_{hj}| + |b_{hj}|)/c_h + \varepsilon.$$

由式(8) 知对 $i \in \{1, 2, \dots, l\}$ 有 $x_i(t) \geq 1$, 由式(9) 知对 $k \in \{l+1, \dots, n\}$ 有 $x_k \leq -1$. 从而当 $t > T_1 + \tau$ 时, 对所有 $h \in \{1, 2, \dots, n\}$, 由式(2) 知

$$g(y_h(t)) = 0, g(y_h(t - \tau_{hj})) = 0. \quad (10)$$

故 DCNNs(3) 的零解在区域 $\{(y_1, y_2, \dots, y_n),$

$|y_i| \leq 2 \sum_{j=1}^n (|a_{ij}| + |b_{ij}|)/c_i + \varepsilon, i = 1, 2, \dots, n\}$ 内指数渐近稳定. 即存在 $T_2 > T_1$ 和常数 M 使得当 $t > T_2$ 时, $|y_i(t)| \leq M e^{-c_i(t-t_0)}$, $i = 1, \dots, n$. 从而 DCNNs(1) 全局指数渐近稳定.

注 2 由定理 2 看出只要输入向量 I_i 的绝对值足够大, 对网络的连接权系数 a_{ij} , b_{ij} 和 c_i 不要任何限制就可使细胞神经网络全局指数稳定, 而文献[4~13] 或多或少对细胞神经网络的连接权系数总有一些限制, 而减少这些限制是某些文献[6~13] 的努力方向.

定理 3 若存在正整数 m_1, m_2 , 使对 $0 < m_1 \leq$

$m_2 \leq n, i \in \{1, 2, \dots, m_1\}, j \in \{m_1 + 1, \dots, m_2\}, k \in \{m_2 + 1, \dots, n\}$ 有

$$|I_i| \leq c_i + 3 \sum_{h=1}^n (|a_{ih}| + |b_{ih}|), \quad (11)$$

$$I_j > c_j + 3 \sum_{h=1}^n (|a_{jh}| + |b_{jh}|), \quad (12)$$

$$I_k < -c_k + 3 \sum_{h=1}^n (|a_{kh}| + |b_{kh}|), \quad (13)$$

且 $C_{m_1} = |A|_{m_1} - |B|_{m_1}$ 是一非奇异 M 矩阵, 则 DCNNs(1) 是全局指数稳定的, 这里 C_{m_1} 为矩阵 $C = \text{diag}(c_1, c_2, \dots, c_n)$ 的 $m_1 \times m_1$ 阶顺序主子式, 即 $C_{m_1} = \text{diag}(c_1, c_2, \dots, c_{m_1})$, $|A|_{m_1} = [\bar{a}_{ij}]_{m_1 \times m_1}$, $|B|_{m_1} = [b_{ij}]_{m_1 \times m_1}$ 而 $\bar{a}_{ij} = \begin{cases} \max\{0, a_{ij}\}, & i = j, \\ |a_{ij}|, & i \neq j. \end{cases}$

证 不妨设 $X^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)^T$ 是 DCNNs(1) 的一个平衡点. 类似式(10)的证明可知: 存在 T 当 $t > T$ 时 DCNNs(1) 等价于

$$\begin{cases} \frac{dy_i(t)}{dt} = -c_i y_i(t) + \sum_{j=1}^{m_1} a_{ij} g(y_j(t)) + \sum_{j=1}^{m_1} b_{ij} g(y_j(t - \tau_{ij}(t))), \\ i = 1, 2, \dots, m_1, \\ \frac{dy_k(t)}{dt} = -c_k y_k(t) + \sum_{j=1}^{m_1} a_{kj} g(y_j(t)) + \sum_{j=1}^{m_1} b_{kj} g(y_j(t - \tau_{kj}(t))), \\ k = m_1 + 1, \dots, n. \end{cases} \quad (14)$$

考虑系统(14)的前 m_1 个方程, 因为 $C_{m_1} = |A|_{m_1} - |B|_{m_1}$ 是一个非奇异 M 矩阵, 存在正常数 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{m_1}$ 使得对 $i \in \{1, 2, \dots, m_1\}$ 有

$$c_i \alpha_i > \sum_{j=1}^{m_1} \alpha_j \bar{a}_{ij} + \sum_{j=1}^{m_1} \alpha_j |b_{ij}|. \quad (15)$$

类似文献[6]之定理1的证明知系统(14)的前 m_1 个方程的零解是全局指数稳定的. 由常数变易法公式易知系统(14)的后 $n - m_1$ 个方程的零解也是全局指数稳定的, 从而定理得证.

注3 定理3推广和改进了文献[6,9]的相应结论.

3 结论 (Conclusion)

本文利用输入向量来控制细胞神经网络的稳定性. 定理1给出了细胞神经网络每个平衡点的指数吸引区域的估计, 结论表明细胞神经网络若有多个平衡点, 则这些平衡点一定位于一个有界区域内, 这个有界区域的位置可由输入向量来控制. 由定理2的证明知对给定的输入向量, 我们还可以进一步估计某个平衡点的位置, 从而得到所有平衡点所在区

域的一个估计. 定理2表明, 当输入向量的绝对值大于某个仅仅只与细胞神经网络的物理参数有关的值时, 不附加其它任何条件, 细胞神经网络全局指数稳定. 定理3讨论了输入向量的部分分量的绝对值大于某个仅仅只与细胞神经网络的物理参数有关的值时, 细胞神经网络的全局指数稳定性, 所得结论推广和改进了某些已有文献的相应结果.

参考文献 (References):

- [1] CHUA L O, YANG L. Cellular neural networks: Theory [J]. *IEEE Trans on Circuits and Systems*, 1988, 35(10): 1257-1272.
- [2] CHUA L O, YANG L. Cellular neural networks: Applications [J]. *IEEE Trans on Circuits and Systems*, 1988, 35(10): 1273-1290.
- [3] 廖晓昕. 细胞神经的数学理论(I) [J]. 中国科学(A辑), 1994, 24(9): 902-910.
(LIAO Xiaoxin. Mathematical theory of cellular neural networks(I) [J]. *Science in China (Series A)*, 1994, 24(9): 902-910.)
- [4] 廖晓昕. 细胞神经的数学理论(II) [J]. 中国科学(A), 1994, 24(10): 1037-1046.
(LIAO Xiaoxin. Mathematical theory of cellular neural networks(II) [J]. *Science in China (Series A)*, 1994, 24(10): 1037-1046.)
- [5] LIAO X X, WANG J. Algebraic criteria for global exponential stability of cellular neural networks with multiple time delays [J]. *IEEE Trans on Circuits and Systems*, 2003, 50(2): 268-275.
- [6] ZENG Z G, WANG J, LIAO X X. Global exponential stability of a general class of recurrent neural networks with time-varying delays [J]. *IEEE Trans on Circuits and Systems I*, 2003, 50(10): 1353-1358.
- [7] CAO J. A set of stability criteria for delayed cellular neural networks [J]. *IEEE Trans on Circuits and Systems I*, 2001, 48(4): 494-498.
- [8] ARIK S. An analysis of global asymptotic stability of delayed cellular neural networks [J]. *IEEE Trans on Neural Networks*, 2002, 13(5): 1239-1242.
- [9] CAO J. On stability of delayed cellular neural networks [J]. *Physics Letters A*, 1999, 261(2): 303-308.
- [10] CAO J. Global stability conditions for delayed CNNs [J]. *IEEE Trans on Circuits and Systems I*, 2001, 48(11): 1330-1333.
- [11] LIAO T L, WANG F C. Global stability for cellular neural networks with time delay [J]. *IEEE Trans on Neural Networks*, 2000, 11(6): 1481-1484.
- [12] CAO J. New results concerning exponential stability and periodic solutions of delayed cellular neural networks [J]. *Physics Letters A*, 2003, 307(2-3): 136-147.
- [13] ZHANG Y, HENG P A, LEUNG K S. Convergence analysis of cellular neural networks with unbounded delay [J]. *IEEE Trans on Circuits and Systems I*, 2001, 48(6): 680-687.

作者简介:

曾志刚 (1971—) 男, 博士, 副教授, 研究方向为人工神经网络、动力系统稳定性, E-mail: zhigangzeng@mail.whut.edu.cn;

廖晓昕 (1938—) 男, 教授, 博士生导师, 研究领域: 神经网络, 非线性控制系统;

汪增福 (1960—) 男, 博士, 教授, 博士生导师, 主要研究方向包括立体视觉、人脸识别、声源定位与分离以及智能机器人等.