

文章编号: 1000-8152(2006)01-0093-06

## 四轮全方位移动机器人的建模和最优控制

熊蓉<sup>1</sup>, 张翻<sup>1</sup>, 褚健<sup>1</sup>, 何臻峰<sup>2</sup>, 吴永海<sup>3</sup>

(1. 浙江大学 工业控制技术国家重点实验室, 浙江 杭州 310027; 2. 浙江大学 计算机学院, 浙江 杭州 310027;

3. 浙江大学 机械与能源学院, 浙江 杭州 310027)

**摘要:** 本文研究实时动态环境中四轮全方位移动机器人的运动控制和轨迹规划. 通过对机器人运动学和动力学特性的分析, 给出了四轮全方位移动机器人的控制模型, 并根据方程特性对其进行了合理的简化, 使得计算量有效减少. 同时采用 Bang-Bang 控制规划出时间最优的机器人运动轨迹. 通过轨迹规划和控制模型的结合达到了实时控制的效果. 实验证明了模型的正确性和算法的有效性.

**关键词:** 全方位移动机器人; 运动控制; 轨迹规划

**中图分类号:** TP24      **文献标识码:** A

### Modeling and optimal control of omni-directional mobile robots

XIONG Rong<sup>1</sup>, ZHANG He<sup>1</sup>, CHU Jian<sup>1</sup>, HE Zhen-feng<sup>2</sup>, WU Yong-hai<sup>3</sup>

(1. National Laboratory of Industrial Control Technology, Zhejiang University, Hangzhou Zhejiang 310027, China;

2. College of Computer Science, Zhejiang University, Hangzhou Zhejiang 310027, China;

3. College of Mechanical and Energy Engineering, Zhejiang University, Hangzhou Zhejiang 310027, China)

**Abstract:** This paper focuses on the motion control and path planning of an omni-directional mobile robot. By analyzing the kinematic and dynamic characteristics of the robot, its motion control model is provided. The model is rationally simplified based on the model equation to reduce the computation cost. The optimal trajectory is generated by using Bang-Bang control. The real-time control effect is realized by combining the trajectory planning and control modeling. Experiment demonstrates the effectiveness of the proposed method.

**Key words:** omni-directional mobile robot; motion control; path planning

### 1 引言 (Introduction)

近年来, 移动机器人的应用领域和应用范围正逐渐拓宽, 对机器人移动的快速性和机动性要求也日益增强. 全方位移动机器人由于具有平面运动的全部三个自由度, 前后、左右和自转, 理论上可以在任何角度以任何速度在机器人所处平面上运动, 因此其移动的快速性和机动性要优于自由度少于3个的非全方位移动机器人<sup>[1]</sup>, 并能够在狭窄有限的空间中工作<sup>[2]</sup>.

目前, 比较成熟的全方位移动机器人轨迹规划方法多是针对相对静态的环境<sup>[3,4]</sup>. 本文研究实时动态环境下四轮全方位移动机器人的运动建模和轨迹规划算法, 通过对机器人运动学和动力学模型的分析, 提出了控制模型, 并通过简化有效减小了计算

量; 同时, 利用最优控制相关理论提出了时间最优的轨迹生成算法; 最后, 通过在实际 RoboCup F180 小型足球机器人比赛中的应用验证了算法的有效性和实时性.

### 2 全方位移动机器人建模 (Modeling of the omni-directional mobile robot)

本文所述全方位移动机器人如图1所示, 它采用4个全方位轮(如图2所示). 这种全方位轮能够有效避免普通轮子不能侧滑带来的非完整性约束. 每个全方位轮由带码盘的直流无刷电机驱动, 因此各电机的电压是机器人运动的控制量. 机器人在二维平面上的位姿为状态量.

本节通过构建机器人的运动学模型和动力学模型来建立控制量和状态量的关系方程.

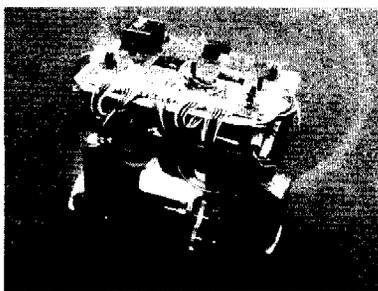


图1 四轮全方位移动机器人

Fig. 1 Omni-directional wheeled robot



图2 万向轮

Fig. 2 Omni-directional wheel

2.1 机器人的运动学模型 (Kinematic model of the robot)

通过建立运动学模型可获得机器人各轮转速和机器人质心位姿的关系。

本文定义机器人小车4个轮子的排布如图3所示,1,4在前,2,3在后。坐标系  $\Sigma_R$  以小车质心为原点,以小车对称轴为  $x$  轴。在坐标系  $\Sigma_R$  中,记各轮轴心位置向量为  $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3, \vec{P}_4$ ,  $\vec{T}_i$  为  $\vec{P}_i$  的垂直向量,各轮运动方向(均取逆时针方向)为  $\vec{D}_i$ 。目前通常的设计是使  $\vec{T}_i$  和  $\vec{D}_i$  重合。本文把  $\vec{T}_i, \vec{D}_i$  设计成不同的角度,以利于控制方程的简化。设  $\vec{D}_i$  与  $x$  轴的夹角为  $\varphi_i$ ,  $\vec{T}_i$  与  $x$  轴的夹角为  $\gamma_i$ ,则  $\vec{T}_i, \vec{D}_i$  可以表示为

$$\begin{aligned} \vec{D}_i &= (\cos \varphi_i, \sin \varphi_i)^T, \\ \vec{T}_i &= (\cos \gamma_i, \sin \gamma_i)^T. \end{aligned} \quad (1)$$

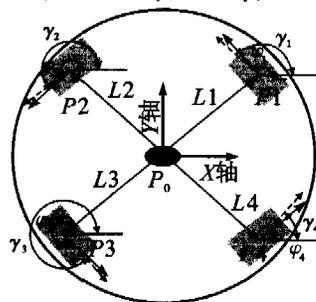


图3 车轮排布

Fig. 3 Placement of wheel

根据对称性,有

$$\varphi_1 + \varphi_4 = \pi, \varphi_2 + \varphi_3 = \pi, \quad (2)$$

$$\gamma_1 + \gamma_4 = \pi, \gamma_2 + \gamma_3 = \pi.$$

机器人每个轮子的切向速度是可控的,记为  $[v_{q1}, v_{q2}, v_{q3}, v_{q4}]^T$ 。机器人质心在二维平面上的运动用  $\vec{V} = [v_x, v_y, v_\theta]^T$  表示。

机器人整体速度是平动和转动的合成,下面分别予以分析。

1) 平动情况。

以轮1为例,如图4所示。坐标系  $\Sigma_{w1}$  以轮1中心点为原点,以坐标系  $\Sigma_R$  的  $x$  轴为  $x$  轴。在  $\Sigma_{w1}$  下,机器人质心速度为  $\vec{V}'$ ,  $\vec{V}'$  在  $x, y$  轴上的分速度为  $v'_x, v'_y$ ,

$$(v'_x, v'_y)^T = R(\theta)(v_x, v_y)^T,$$

其中  $R(\theta)$  为旋转矩阵,  $\theta$  为机器人质心在世界坐标下的姿态。

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

每个轮子速度可分解为可控的切向速度  $v_{qi}$  和不可控的法向从动轮速度  $v_{fi}$ 。由于机器人是刚体运动,有

$$\vec{V}' = \vec{v}'_x + \vec{v}'_y = \vec{v}'_{qi} + \vec{v}'_{fi}. \quad (3)$$

可得

$$\begin{aligned} v_{qi} &= |\vec{V}'| \cos(\varphi - \omega) = \\ &|\vec{V}'| (\cos \varphi \cos \omega + \sin \varphi \sin \omega) = \\ &v'_x \cos \varphi_i + v'_y \sin \varphi_i = \\ &(\cos \varphi_i, \sin \varphi_i) + (v'_x, v'_y)^T = \\ &(\cos \varphi_i, \sin \varphi_i) R(\theta)(v_x, v_y)^T = \\ &(\cos(\varphi_i + \theta), \sin(\varphi_i + \theta))(v_x, v_y)^T. \end{aligned} \quad (4)$$

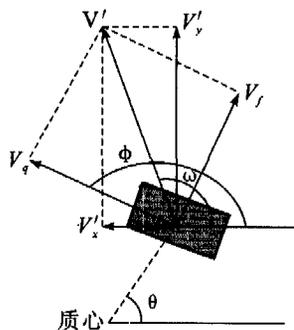


图4 运动学分析

Fig. 4 Analysis of the motion

2) 转动情况。

由于机器人轮轴的切线方向不垂直于机器人质心与轮子的连线,所以有

$$v_y = v_\theta L \cos(\gamma - \varphi). \quad (5)$$

3) 综合平动和转动情况

4 个轮子都满足(4) (5)两式,将平动和转动结合,建立机器人运动学模型如下:

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi_1 + \theta) & \sin(\varphi_1 + \theta) & l_1 \cos(\varphi_1 - \gamma_1) \\ \cos(\varphi_2 + \theta) & \sin(\varphi_2 + \theta) & l_2 \cos(\varphi_2 - \gamma_2) \\ \cos(\varphi_3 + \theta) & \sin(\varphi_3 + \theta) & l_3 \cos(\varphi_3 - \gamma_3) \\ \cos(\varphi_4 + \theta) & \sin(\varphi_4 + \theta) & l_4 \cos(\varphi_4 - \gamma_4) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_\theta \end{pmatrix} =$$

$$J(\theta) (\dot{x} \ \dot{y} \ \dot{\theta})^T. \quad (6)$$

### 2.2 机器人的动力学模型 (Dynamic model of the robot)

建立动力学模型的意义是找到控制量和机器人各轮运动的关系,即各个电机的电压  $U_i$  和机器人各轮轮速、加速度的关系。

由直流电动机的相关理论<sup>[5]</sup>可得机器人动力学模型为:

$$\bar{f} = \bar{\lambda} U + \bar{\sigma} v, \quad (7)$$

其中,  $\bar{f}$  为轮子稳定运行时产生的对地的力,  $U$  为电机电压,  $v$  为轮速,  $\bar{\lambda}$ ,  $\bar{\sigma}$  的计算公式参见文献[5]。

设  $f_i$  为各轮所受摩擦力,摩擦力是加速度和角加速度的函数,即

$$f_i = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & J \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ \ddot{\theta} \end{pmatrix}. \quad (8)$$

由牛顿第二定律有

$$f_i = \bar{f}. \quad (9)$$

联立式(7)(8)(9)得:

$$\sum_{i=1}^4 (\bar{\lambda} U_i - \bar{\sigma} v_i) R(\theta) D_i = ma, \quad (10)$$

$$\sum_{i=1}^4 l_i \cos(\varphi_i - \gamma_i) (\bar{\lambda} U_i - \bar{\sigma} v_i) = J\ddot{\theta}. \quad (11)$$

其中  $a$  为机器人整车加速度;  $J$  为转动惯量;  $m$  为机器人质量。

### 2.3 机器人的控制方程 (Control equation of the robot)

根据上述机器人运动学和动力学模型,可建立控制量和状态量的关系方程,即机器人各个电机的电压  $U_i$  和机器人质心位姿  $(x, y, \theta)^T$  的关系,从而实现通过控制电压  $U_i$  调整机器人位姿。

联立式(6)(10)(11)得控制方程:

$$\begin{pmatrix} m\ddot{x} \\ m\ddot{y} \\ J\ddot{\theta} \end{pmatrix} = \bar{\lambda} J^T(\theta) \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{pmatrix} + \bar{\sigma} J^T(\theta) J(\theta) \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = \bar{\lambda} J^T(\theta) \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{pmatrix} + \bar{\sigma} Q(\theta) \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}. \quad (12)$$

其中  $Q(\theta) = J^T(\theta) J(\theta)$ 。

### 3 全方位移动机器人控制方程简化 (Simplification of the control equation of the robot)

控制方程(12)中

$$Q(\theta) = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{pmatrix}. \quad (13)$$

$$\begin{cases} q_{11} = \sum_{i=1}^4 \cos^2(\varphi_i + \theta), \\ q_{22} = \sum_{i=1}^4 \sin^2(\varphi_i + \theta), \\ q_{12} = q_{21} = \sum_{i=1}^4 \cos(\varphi_i + \theta) \sin(\varphi_i + \theta), \\ q_{13} = q_{31} = \sum_{i=1}^4 l_i \cos(\varphi_i - \gamma_i) \cos(\varphi_i + \theta), \\ q_{23} = q_{32} = \sum_{i=1}^4 l_i \cos(\varphi_i - \gamma_i) \sin(\varphi_i + \theta), \\ q_{33} = \sum_{i=1}^4 l_i^2 \cos^2(\varphi_i - \gamma_i). \end{cases} \quad (14)$$

机器人轮子排布确定以后,可以确定  $\varphi_i, \gamma_i$ 。可以看

到除了  $q_{33}$ ,  $Q(\theta)$  各项都是  $\theta$  的函数;  $Q(\theta) \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}$  是  $x, y, \dot{\theta}$  互相耦合的函数,无法单独通过控制方程得到

$x, y, \theta$ , 且解耦计算量很大,因此需对其进行简化,使控制方程成为与  $\theta$  无关的对角阵或常数阵。

现将式(2)代入  $Q(\theta)$ , 可以看出:

· 当  $\cos^2 \varphi_1 + \cos^2 \varphi_2 - 1 = 0$  时,  $q_{11}, q_{12}, q_{22}$  是与  $\theta$  无关的常数。

· 当  $l_1 \cos(\varphi_1 - \gamma_1) \sin \varphi_1 + l_2 \cos(\varphi_2 - \gamma_2) \sin \varphi_2 = 0$  时,  $q_{13}, q_{23}$  是与  $\theta$  无关的常数。

即满足下面两个条件时可使  $Q(\theta)$  得到简化:

$$1) \varphi_2 = \varphi_1 + \frac{\pi}{2}, \text{物理意义为 } D_1 \perp D_2, D_3 \perp D_4.$$

$$2) \frac{l_1 \cos \phi_1}{l_2 \cos \phi_2} = \tan \varphi_1, \text{ 其中 } \phi_i = \varphi_i - \gamma_i.$$

由于满足这两个条件的解有多个,我们结合机械安装的对称性和尺寸要求,取下面一组可行解.

$$L1 = L2, \varphi_1 = 135, \varphi_2 = 225, \\ \varphi_3 = 45, \varphi_4 = 315, \gamma_1 = 145.$$

可得

$$Q(\theta) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4l^2 \cos 10^\circ \end{pmatrix}$$

对控制方程进行归一化.令

$$T = \frac{m}{2\sigma}, \Gamma = \frac{\lambda m U_{\max}}{4\sigma^2}, \Theta = \frac{\lambda m^2 L U_{\max}}{4J\sigma^2},$$

并记

$$\bar{t} = \frac{t}{T}, \bar{x} = \frac{x}{\Gamma}, \\ \bar{y} = \frac{y}{\Gamma}, \bar{\theta} = \frac{\theta}{\Theta}, \overline{U_i(t)} = \frac{U_i(t)}{U_{\max}},$$

则控制方程简化为

$$\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{\theta} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \\ \frac{2mL^2}{J}\theta \end{pmatrix} = q(\theta, t), \quad (15)$$

其中

$$q(\theta, t) = p(\theta)U(t), \\ p(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta + \varphi_1) & \cos(\theta + \varphi_2) & \cos(\theta + \varphi_3) & \cos(\theta + \varphi_4) \\ \sin(\theta + \varphi_1) & \sin(\theta + \varphi_2) & \sin(\theta + \varphi_3) & \sin(\theta + \varphi_4) \\ \cos 10^\circ & \cos 10^\circ & \cos 10^\circ & \cos 10^\circ \end{pmatrix}. \quad (16)$$

#### 4 控制模型约束空间的确定 (Constrain the boundaries of the control)

通过前面的归一化,  $U_i(t)$  已经被规整到  $[-1, 1]$ . 本节确定控制模型的约束空间, 即  $q(\theta, t)$  的值域, 找到控制模型的约束空间, 为第5节进行时间最优的轨迹规划作准备.

式(16)可以改写为

$$p(\theta) = R_z(\theta) * p(0),$$

$$\text{其中 } R_z(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$p(0) = \begin{pmatrix} \cos(\frac{3}{4}\pi) & \cos(\frac{5}{4}\pi) & \cos(-\frac{\pi}{4}) & \cos(\frac{\pi}{4}) \\ \sin(\frac{3}{4}\pi) & \sin(\frac{5}{4}\pi) & \sin(-\frac{\pi}{4}) & \sin(\frac{\pi}{4}) \\ \cos 10^\circ & \cos 10^\circ & \cos 10^\circ & \cos 10^\circ \end{pmatrix}.$$

$\mu(t) = \{U(t) \mid |U_i(t)| \leq 1\}$  在空间上是一个4维立方体,  $p(0) * U(t)$  是  $3 \times 1$  矩阵, 各项分别代表在3维空间  $x, y, \theta$  的值, 其意义就是通过  $(U_1, U_2, U_3, U_4)^T$  中  $U_i$  的变化, 控制小车质心位姿  $(x, y, \theta)^T$ .

对于确定的  $\theta$ , 线性变换矩阵  $q(\theta)$  把4维立方体  $\mu(t)$  变换成一个倾斜的3维立方体  $p(\theta)U(t)$ .  $p(\theta)$  可以分解为绕  $z$  轴的旋转矩阵和一个与  $\theta$  无关的线性常数阵, 即  $p(\theta) = R_z(\theta) * p(0)$ . 图5为  $p(0) * U(t)$  的3维图, 其中  $\|U_i(t)\| \leq 1$ .

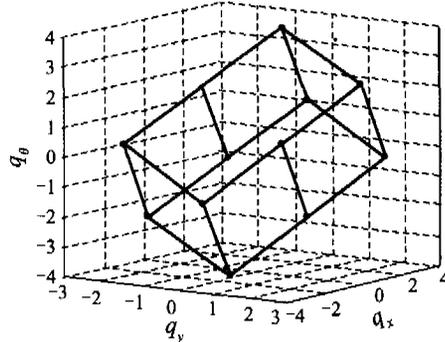


图5  $U'(t)$  3维图

Fig. 5 3D of  $U'(t)$

随着  $\theta$  在  $[0, 2\pi]$  取值的不同,  $p(0) * U(t)$  所构成的空间矩形在3维空间绕  $z$  轴旋转,  $q(\theta, t)$  得到不同的值. 对应于不同的  $\theta$ ,  $p(0) * U(t)$  有不同的姿态. 既然  $\theta$  使各个  $U$  耦合, 可以用与  $\theta$  无关的控制量集来代替  $\theta$ , 使对于任何  $\theta$ , 取得的约束空间都在  $p(0) * U(t)$  所能达到的值域里, 从而使问题大大简化. 这个待求控制量集的组合构成了约束空间.

定义

$$\vartheta(t) = \bigcap_{\theta \in [0, 2\pi]} P(\theta)\mu(t) = [q_x \quad q_y \quad q_\theta]^T,$$

$\vartheta(t)$  是有可能取到的  $P(\theta)\mu(t)$  集合的内接空间. 所有的  $q(t) \in \vartheta$  可以作为代替  $\theta$  的控制量, 所有满足  $\vartheta(t)$  的, 也一定满足  $q(\theta, t)$ .  $z$  轴与斜立方体的交点是所求内接图形的顶点, 在斜立方体上斜率最大的一条直线就是内接图形的母线. 得到旋转面的母线方程

$$\frac{q_\theta}{2\cos 10^\circ} \pm \frac{r_\theta}{\sqrt{2}} = 1 \quad (0 \leq r \leq 1), \quad (17)$$

其中

$$q_x^2 + q_y^2 \leq r_\theta^2. \quad (18)$$

旋转面如图6, 用  $\vartheta(t)$  代替  $q(\theta, t)$ , 从而得到约束空间, 即  $q(\theta, t) = p(\theta) * p(0) * U(t)$  的3维表示. 由(14)(15)得约束

$$|q_\theta| \leq (2 - \sqrt{2}) \cos 10^\circ, \quad (19)$$

$$q_x^2 + q_y^2 \leq 1. \quad (20)$$

因此解耦后机器人的控制模型为

$$\begin{cases} \dot{x} + \dot{x} = q_x(t), \\ \dot{y} + \dot{y} = q_y(t), \\ \ddot{\theta} + \frac{2mL^2}{J}\dot{\theta} = q_\theta(t). \end{cases} \quad (21)$$

边界条件:

$$\begin{cases} x(0) = x_0, x(t_f) = x_f, \dot{x}(0) = v_{x_0}, \dot{x}(t_f) = 0, \\ y(0) = y_0, y(t_f) = y_f, \dot{y}(0) = v_{y_0}, \dot{y}(t_f) = 0. \end{cases} \quad (22)$$

约束条件:

$$q_x^2 + q_y^2 \leq 1, t \in [0, t_f]. \quad (23)$$

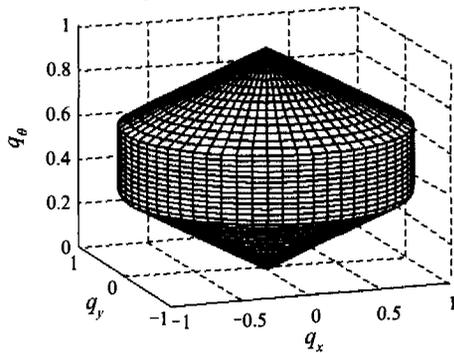


图 6 约束空间 3 维图  
Fig. 6 Constraint of boundaries in 3D

### 5 轨迹生成 (Trajectory generation)

本节结合控制模型,应用最优控制理论推导出时间最优的轨迹规划,将轨迹规划得到的机器人整体速度代入控制模型就可得到每帧机器人各轮的控制转速,实现位姿控制。

为简化计算,设机器人运动的末速度是零.在实时动态环境中,机器人的目标点是实时改变的,需要实时规划路径.因此末速度为零的假设符合实际应用的要求。

#### 5.1 时间最优 Bang-Bang 轨迹规划 (Bang-Bang trajectory)

由于全方位移动机器人可以同时平动和转动,因此在轨迹生成时可以分别予以考虑.下面以平动为例说明.根据最优控制理论,时间最优轨迹可以在下式成立的时候得到

$$q_x^2 + q_y^2 = 1, t \in [0, t_f]. \quad (24)$$

在时间  $t$  的可达集合中,任意点都能由一 Bang-Bang 控制在相同时间内驱使到达.若有最优控制存在,必定有一 Bang-Bang 控制为最优<sup>[6]</sup>.现已找到  $q_x, q_y, q_\theta$  的约束空间,关键是在这个约束下找到使控制方程达到最优的  $q$  值。

令:  $|q_w(t)| = \text{常数}$ ,  $w$  代表  $x, y, \theta$  中的任意一个.有

$$\dot{w} = Aw + Bu, \quad (25)$$

其中  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ .

目标泛函:

$$\min J = \min \int_{t_0}^{t_f} dt, \text{ sub. } \dot{w} = Aw + Bu.$$

边界条件:

$$w(0) = 0, \dot{w}(0) = v_0, w(t_f) = w_f, \dot{w}(t_f) = 0.$$

式(25)是  $w$  的二阶微分方程,  $u$  由正到负切换一次完成一个 Bang-Bang 控制。

令  $U = |u_{\max}|, u = +U$  时:

$$w(t) = e^{-t}(u_w - v_0) + u_w(t - 1) + v_0, 0 \leq t \leq t_1. \quad (26)$$

$u = -U$  时:

$$w(t) = u_w(t_f - t - e^{t_f-t} + 1) + w_f, t_1 < t \leq t_f, \quad (27)$$

$$v(t) = \begin{cases} (v_0 - u_w)e^{-t} + u_w, & 0 \leq t \leq t_1, \\ (e^{t_f-t} - 1)u_w, & t_1 < t \leq t_f. \end{cases} \quad (28)$$

由(26)(27)(28)可解得  $u$  的最优控制:

$$u_w = \text{sgn}(v_0 - \text{sgn}(D)(e^{|D|} - 1)), \quad (29)$$

$$t_{f\min} = t_1 + t_2 = 2\ln(1 + \sqrt{E}) - \frac{D}{u_w}. \quad (30)$$

其中  $t_2 = \ln(1 + \sqrt{E}), E = 1 + e^{D/u_w}(v_0/u_w - 1),$

$$D = v_0 - w_f.$$

由于平动要求  $x, y$  同时到点,即  $t_{fx} = t_{fy}$ ,因此 Bang-Bang 的轨迹规划要合成。

#### 5.2 Bang-Bang 轨迹平动合成 (Synchronization of the independent Bang-Bang)

对于一个最短时间的控制,应有比其次优的控制存在.  $t_{fx} \neq t_{fy}$  时,假设  $t_{fx} < t_{fy}$ ,对于  $x$  方向的规划应有  $\bar{t}_{fx} = t_{fy} > t_{fx}$  的规划存在。

$t_f$  是边界条件 ( $w(0), w(t_f), \dot{w}(0), \dot{w}(t_f)$ ) 和控制量  $u$  的函数.边界条件确定后,  $t_f$  只和  $u$  有关.所以要求  $t_{fx}(u_x) = t_{fy}(u_y)$ ,代入关系式  $q_x^2 + q_y^2 = 1$ ,得  $t_{fx}(u_x) = t_{fy}(\pm\sqrt{1 - u_x^2}), (t_{fx}, t_{fy} > 0, t_f$  是  $u$  的单调递减函数.证明见文献[7].

所以有唯一的  $t_{fx}, t_{fy}$  满足等式。

### 6 实验结果 (Result of experimentation)

本算法通过在 RoboCupF180 小型足球机器人比赛中的应用证实了算法的可行性和有效性.机器人系统参数为:

$$v_{\max} = 0.8 \text{ m/s}, a_{\max} = 2.8 \text{ m/s}^2,$$

$$a_{\max} = 2.8 \text{ m/s}^2, \dot{\theta}_{\max} = 10 \text{ rad/s}, \ddot{\theta}_{\max} = 20 \text{ rad/s}^2.$$

位于球场上方的摄像机每 30 ms 发送一次机器人位置信息给策略部分,由策略部分利用本算法计算出每个机器人各个轮子的转速.图 7,8 是应用算法实时规划的一段轨迹和机器人根据控制命令实际行走轨迹的比较,可以看到两者比较吻合,证明了所建控制模型的正确性.

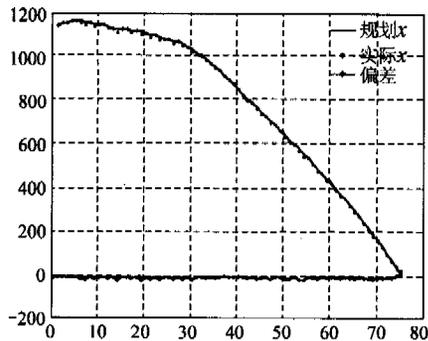


图 7  $x$  方向实时规划轨迹与实际轨迹比较

Fig. 7 Comparison of real-time trajectory with actual trajectory in  $x$ -axis

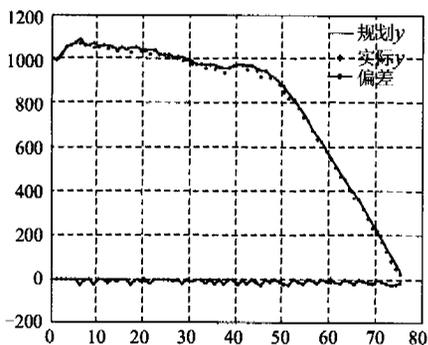


图 8  $y$  方向实时规划轨迹与实际轨迹比较

Fig. 8 Comparison of real-time trajectory with actual trajectory in  $y$ -axis

在实时规划时,可将规划数据和当前图象数据进行比较,如果角度误差在  $4^\circ$  以内、位置偏差在 30 mm 以内,则继续前一次所规划的路径,否则就重新规划.设定起始点和目标点距离为 2 m,初速度  $v_0 = 0.5$  m/s,表 1 中列出了 50 次测试中规划次数的统计.可以发现原先完成整个路径需要 100 次左右规划,应用本方法后规划次数可以有效减少.

表 1 规划效果表

规划次数/次	< 10	$10 < n < 20$	> 20
实验比率/%	18	54	28

## 7 结论 (Conclusion)

本文通过对机器人动力学和运动学模型的分析,提出了全方位移动机器人的控制模型,给出了时间最优的轨迹规划.本算法计算量小,能满足实时性的要

求.同时由于本算法可以规划出机器人到达目标点的一系列控制命令,对实现实时避碰有很大帮助.一般规划方法由于没有考虑机器人初速度的情况,每次规划得到的速度会有很大的跳变,影响了机器人运动的平滑性.而本算法考虑了初速度的影响,不但能使机器人准确到点,而且速度平滑,运动流畅.下一步,我们将结合预测控制来优化轨迹规划和控制.

## 参考文献 (References):

- [1] LUCA C, ALESSANDRO D L, STEFANO I. Trajectory tracking control of a four-wheel differentially driven mobile robot [C] // *International Conference on Robotics and Automation*. Detroit, MI, USA; IEEE, 1999: 2632 - 2638.
- [2] 赵冬斌,易建强,邓旭玥. 全方位移动机器人结构和运动分析[J]. 机器人, 2003, 25(5): 394 - 398.  
(ZHAO Dongbing, YI Jianqiang, DENG Xuyue. Structure and kinematic analysis of omni-directional mobile robots[J]. *Robot*, 2003, 25(5): 394 - 398.)
- [3] MOORE K L, FLANN N S. Hierarchical task decomposition approach to path planning and control for an omni-directional autonomous mobile robot [C] // *Proceedings of the International Symposium on Intelligent Control & Intelligent Systems and Semiotics*. Cambridge, MA; IEEE, 1999: 302 - 307.
- [4] JUNG M, SHIM H, KIM H, KIM J. The miniature omni-directional mobile robot OmniKitty-I (OK-I) [C] // *International Conference on Robotics and Automation*. Detroit, MI, USA; IEEE, Piscataway, NJ, USA, 1999: 2686 - 2691.
- [5] FITZGERALD A E, CHARLES, STEPHEN J, UMANS D. *Electric Machinery* [M]. Sixth Edition. Beijing: Tsinghua University Press, 2003.
- [6] 陈陈. 最优化方法与最优控制 [M]. 北京: 机械工业出版社, 1993.  
(CHEN Chen. *Optimal Method and Optimal Control* [M]. Beijing: China Machine Press, 1993.)
- [7] TAMAS K N, PRITAM, RAFFAELLO D'ANDREA. Real-time trajectory generation for omnidirectional vehicles [C] // *Proceedings of the American Control Conference*. Alaska, USA; IEEE, 2002, 1: 286 - 291.

## 作者简介:

熊 善 (1972—),女,副教授,浙江大学工业控制技术国家重点实验室,主要研究方向机器人、图象处理等, Email: rxiong@iipc.zju.edu.cn;

张 翮 (1978—),男,浙江大学先进控制研究所硕士研究生,主要研究方向为运动建模与控制;

褚 健 (1963—),男,教授,博士生导师,主要研究方向为时滞系统控制、非线性控制、鲁棒控制;

何臻峰 (1981—),男,浙江大学计算机学院硕士研究生,主要研究方向空间机器人;

吴永海 (1979—),男,浙江大学机械与能源学院博士研究生,研究方向足球机器人.