

文章编号: 1000-8152(2006)01-0108-07

多输入多输出复杂时滞系统的预测函数控制及其鲁棒 D 稳定性条件

张彬, 张卫东

(上海交通大学自动化系, 上海 200240)

摘要: 针对多输入多输出被控过程同时存在状态滞后和控制输入滞后问题, 利用预测函数控制算法对预测模型没有特殊要求和在线计算量小的特点, 基于预测函数控制设计机理得到系统的控制律. 在标称情况下, 反馈控制律可表示为无记忆反馈和带记忆反馈的叠加形式. 在假设不含时滞标称系统解析的条件下, 应用最大模定理和矩阵谱半径性质, 给出存在状态滞后和控制输入滞后结构参数摄动不确定系统鲁棒 D 稳定的充分条件. 数值实验和仿真实验验证了所给方法的有效性.

关键词: 多重时滞; 鲁棒 D 稳定; 预测函数控制; 结构参数摄动

中图分类号: TP273 **文献标识码:** A

Predictive functional control and robust D-stability condition for MIMO systems with multiple time-delay

ZHANG Bin, ZHANG Wei-dong

(Department of Automation, Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200240, China)

Abstract: By taking advantages of little online computation and loose requirement for the predictive model of the predictive functional control algorithm, a predictive algorithm is proposed for multi-input and multi-output systems with state delays and input delays. In the nominal case, a state feedback control law is obtained in the form of the sum of the memoryless and memory state feedback. Under the assumption that the linear delay-free nominal system is analytic, by utilizing the maximum modulus principle and spectral radius of matrices, a sufficient condition is given to guarantee D-stability of the system while there exist structure parameter perturbations. The numerical example and simulations are provided to prove the efficiency of the presented method.

Key words: multiple time delays; robust D-stable; predictive functional control; structure parameter perturbations

1 引言 (Introduction)

被控过程存在时滞比较普遍, 通常时滞可表述为两类: 1) 控制输入时滞; 2) 状态时滞. Smith 预估器可有效处理控制输入时滞, 通过把未经纯滞后的过程输出提前反馈给 PID 控制, 其实质是对输出做了预测. 但 Smith 预估器对外界干扰和过程模型比较敏感, 当滞后时间发生时变后其控制效果不是很理想. 传统的模型算法控制、广义预测控制、动态矩阵控制等预测控制算法虽然能对存在控制输入滞后的对象给出很好的控制结果, 但它们所依赖的输入输出模型的局限性, 使得这样的模型很难反映出状态变量之间的多重滞后, 限制了它们的应用范围. 最近许多学者研究了状态滞后过程的镇定和控

制^[1-5]. 文献[3]基于 Lyapunov 稳定性理论, 针对带有状态时滞不确定连续线性系统利用矩阵不等式方法讨论了鲁棒指数镇定问题, 这种方法的特点是控制律基于无记忆状态反馈控制给定, 最后的问题归结为求解线性矩阵不等式, 然而它不能处理过程含有控制输入滞后的问题. Xu 等^[1]在假设线性离散标称奇异系统为有理、因果且特征值位于某一给定圆域的前提下, 提出针对存在单重状态滞后的离散奇异摄动系统同样有理、因果且特征值位于给定圆域内的充分条件, 即奇异系统的鲁棒 D 稳定性问题. Chen 等^[6]在给出和文献[1]同样的假设下, 运用最大模定理和矩阵谱半径性质, 提出存在多重状态滞后参数不确定奇异系统鲁棒 D 稳定的充分条

收稿日期: 2004-11-10; 收修改稿日期: 2005-04-27.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(60274032); 高校博士点基金资助项目(20030248040).

件. 以上文献只分析了过程存在状态滞后和参数不确定存在时的鲁棒镇定问题, 并没有涉及到具体的控制问题. 实际工业中状态滞后和控制输入滞后的同时存在增加了控制系统的设计难度, 且使得分析扰动系统的鲁棒稳定性非常困难.

本文首先给出复杂时滞系统的状态空间描述, 将多重状态滞后和控制输入滞后规划为系统的增广状态变量, 利用预测函数控制(PFC)在线计算量小的特点, 基于 PFC 设计机理得到控制律. 在标称情况下, 将反馈控制律归结为无记忆反馈和带记忆反馈的叠加形式. 在假设不含时滞离散标称系统解析的条件下, 应用最大模定理和矩阵谱半径性质给出存在状态滞后和控制输入滞后系统在结构参数扰动后保持 D 稳定的充分条件. 仿真算例验证了所给方法的有效性.

2 预测函数控制器设计 (Predictive functional controller design)

2.1 模型预测输出及结构化的控制变量 (Model predictive output and structured manipulated variables)

考虑复杂滞后系统的状态空间描述

$$\begin{cases} X(k+1) = \\ (A + \Delta A)X(k) + \sum_{i=1}^{p_a} (A_i + \Delta A_i)X(k-i) + \\ (B + \Delta B)U(k) + \sum_{i=1}^{p_b} (B_i + \Delta B_i)U(k-i), \\ Y(k) = CX(k), \quad X(0) = X_0. \end{cases} \quad (1)$$

式中 $X \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ 为可测状态变量, $U \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ 为控制输入, $Y \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ 为系统输出, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 为已知的系统矩阵、输入矩阵、输出矩阵. $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n} (i = 1, 2, \dots, p_a)$ 为状态滞后项的系数, p_a 为最大状态滞后或称为状态滞后的重数, $B_i \in \mathbb{R}^{n \times m} (i = 1, 2, \dots, p_b)$ 为输入滞后项的系数, p_b 为最大输入滞后, $\Delta A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\Delta A_i \in \mathbb{R}^{n \times n} (i = 1, 2, \dots, p_a)$, $\Delta B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $\Delta B_i \in \mathbb{R}^{n \times m} (i = 1, 2, \dots, p_b)$ 分别表示时不变系统矩阵结构参数和输入矩阵的结构参数扰动且有界

$$|\Delta A| \leq \bar{A}, \quad |\Delta A_i| \leq \bar{A}_i, \quad |\Delta B| \leq \bar{B}, \quad |\Delta B_i| \leq \bar{B}_i. \quad (2)$$

其中 $|\Delta|$ 表示矩阵 Δ 的模矩阵, $\bar{A}, \bar{A}_i (i = 1, 2, \dots, p_a)$, $\bar{B}, \bar{B}_i (i = 1, 2, \dots, p_b)$, 为已知常数矩阵, 分别表示系统的结构信息.

本文假设不含时滞标称系统 $X(k+1) = AX(k)$

解析.

控制器一般根据标称系统来设计, 则式(1)改写为

$$\begin{cases} X(k+1) = AX(k) + \sum_{i=1}^{p_a} A_i X(k-i) + \\ BU(k) + \sum_{i=1}^{p_b} B_i U(k-i), \\ Y(k) = CX(k). \end{cases} \quad (3)$$

将式(3)改写为增广矩阵形式

$$\begin{cases} \tilde{X}(k+1) = \tilde{A}\tilde{X}(k) + \tilde{B}U(k), \\ Y(k) = \tilde{C}\tilde{X}(k). \end{cases} \quad (4)$$

式中

$$\tilde{X}(k) = [X^T(k), X^T(k-1), X^T(k-2), \dots, X^T(k-p_a), U^T(k-1), U^T(k-2), \dots, U^T(k-p_b)]^T,$$

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A & A_1 & \dots & A_{p_a-1} & A_{p_a} & B_1 & B_2 & \dots & B_{p_b-1} & B_{p_b} \\ I & 0 & & & & & & & & 0 \\ 0 & I & & & & & & & & 0 \\ & & \ddots & & & & & & & \\ & & & \ddots & & & & & & \\ & & & & I & & & & & \\ \vdots & & & & & 0 & 0 & 0 & & \vdots \\ & & & & & & 0 & I & 0 & \\ & & & & & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & & & & & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & & & & & & & & & & 0 & I & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} B \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ I \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{C} = [\tilde{C}_1^T \dots \tilde{C}_i^T \dots \tilde{C}_m^T]^T = [C \ 0 \ \dots \ 0]. \quad (5)$$

上式中 I 为适当维数的单位阵. 利用式(4)设计预测控制器, 则在预测时域内 $[H_1, \dots, H_j, \dots, H_p]$ ($H_i = [H_{i1}, \dots, H_{im}]^T$, $H_j = [H_{j1}, \dots, H_{jm}]^T$, $H_p = [H_{p1}, \dots, H_{pm}]^T$) 的 $k + H_{ji}$ 时刻系统第 i 个预测输出为

$$\hat{Y}_i(k + H_{ji}) = \tilde{C}_i \tilde{A}^{H_{ji}} \tilde{X}(k) + \sum_{j=1}^{H_{ji}} \tilde{C}_i \tilde{A}^{H_{ji}-j} \tilde{B}U(k + H_{ji} - j) \quad (i = 1, \dots, m). \quad (6)$$

PFC 是一类新型的预测控制算法^[9-11], 其特点在于将输入结构化, 认为每一时刻的控制输入 $u_i(k+h)$ 是若干事先选定的基函数 u_{iBj} 的线性组合, 即:

$$u_i(k+h) = \sum_{j=1}^{n_B} \mu_{ij}(k) u_{iBj}(h) = u_{iB}(h) \mu_i^T(k), \quad (h = 0, 1, \dots, H_{ji} - 1). \quad (7)$$

式中 $u_{iB}(h) = [u_{iB1}(h) \dots u_{iBj}(h) \dots u_{iBn_B}(h)]$, $\mu_i(k) = [\mu_{i1}(k) \dots \mu_{ij}(k) \dots \mu_{in_B}(k)]$, $u_i(k+h)$ 是 k

+h时刻系统的第*i*个控制量, $h = 1, 2, \dots, H_{ji}$ 为拟合点,其作用是使得这些点上的实际过程输出趋向于参考轨迹, $u_{iB_j}(h)$ 是第*k*个采样周期第*j*个基函数的取值, n_B 为基函数个数, $\mu_{ij}(k)$ 是权系数可通过优化计算得到. PFC 中基函数的选择依赖于设定值和对象本身的性质,通常可取为阶跃、斜坡、指数函数等.

在 PFC 的框架下,未来控制量表示为

$$U(k+h) = u_B(h)\mu(k), \quad (8)$$

其中

$$U(k+h) = [u_1(k+h) \dots u_i(k+h) \dots u_m(k+h)]^T,$$

$$u_B(h) = \begin{bmatrix} u_{1B}(h) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & u_{iB}(h) & \\ 0 & \dots & 0 & u_{mB}(h) \end{bmatrix}, \mu(k) = \begin{bmatrix} \mu_1^T(k) \\ \vdots \\ \mu_i^T(k) \\ \vdots \\ \mu_m^T(k) \end{bmatrix},$$

将式(8)代入式(6),则式(6)转换为

$$\hat{Y}_i(k+H_{ji}) = \tilde{C}_i \tilde{A}^{H_{ji}} \tilde{X}(k) + \tilde{Y}_{Bi}(k+H_{ji})\mu(k), \quad (9)$$

其中 $\tilde{Y}_{Bi}(k+H_{ji})$ 为第*i*个过程对应基函数 $u_B(H_{ji}-j)$ 的输出,有

$$\tilde{Y}_{Bi}(k+H_{ji}) = \sum_{j=1}^{H_{ji}} \tilde{C}_i \tilde{A}^{H_{ji}-j} \tilde{B} u_B(H_{ji}-j). \quad (10)$$

2.2 最优化计算 (Optimal calculation)

PFC 的优化算法中最常用的方法是在优化点上将参考轨迹和预测过程输出的预测误差的平方和最小化,其指标为

$$\min J = \sum_{j=1}^p D(H_j) |_k^T D(H_j) |_k, \quad (11)$$

式中 $[H_1, H_p]$ 为预测时域, $D(H_j) |_k = [d(k+H_{j1}) \dots d(k+H_{jm})]^T$, $d(k+H_{ji}) = Y_{refi}(k+H_{ji}) - \hat{Y}_i(k+H_{ji}) - e_i(k+H_{ji})$, $Y_{refi}(k+H_{ji})$ 是第*i*个过程输出的参考轨迹,通常选用一阶指数形式的参考轨迹

$$Y_{refi}(k+H_{ji}) = W_i(k+H_{ji}) - \alpha_i^{H_{ji}}(W_i(k) - Y_i(k)). \quad (12)$$

其中 $Y_i(k)$ 是第*i*个过程输出, T_s 是采样时间, $\alpha_i = \exp(-T_s/T_{refi})$, T_{refi} 是过程输出 $Y_i(k)$ 的响应时间, W_i 为第*i*个过程输出设定值, $e_i(k+H_{ji})$ 是预测误差,误差校正可用各种预测方法,如可取未来预测误差为

$$e_i(k+H_{ji}) = e_i(k) = Y_i(k) - \hat{Y}_i(k). \quad (13)$$

$$\text{其中 } \hat{Y}_i(k) = \tilde{C}_i \tilde{A}^{H_{ji}} \tilde{X}(k-H_{ji}) + \sum_{j=1}^{H_{ji}} \tilde{C}_i \tilde{A}^{H_{ji}-j} \tilde{B} U(k-j).$$

将式(9)(10)(12)(13)代入式(11),只有加权系数 $\mu(k)$ 为未知量. 记

$$\tilde{Y}_B(H_j) |_k = [\tilde{Y}_{B1}^T(k+H_{j1}) \dots \tilde{Y}_{Bi}^T(k+H_{ji}) \dots \tilde{Y}_{Bm}^T(k+H_{jm})]^T,$$

$$\tilde{C}\tilde{A}^{H_j} = [(\tilde{C}_1 \tilde{A}^{H_{j1}})^T \dots (\tilde{C}_i \tilde{A}^{H_{ji}})^T \dots (\tilde{C}_m \tilde{A}^{H_{jm}})^T]^T,$$

$$\bar{Y} = [\tilde{Y}_B^T(H_1) |_k \dots \tilde{Y}_B^T(H_j) |_k \dots \tilde{Y}_B^T(H_p) |_k]^T,$$

$$Y_{ref}(H_j) |_k = [Y_{ref1}(k+H_{j1}) \dots Y_{refi}(k+H_{ji}) \dots Y_{refm}(k+H_{jm})]^T,$$

$$r(H_j) |_k = Y_{ref}(H_j) |_k - e(H_j) |_k - \tilde{C}\tilde{A}^{H_j} \tilde{X}(k),$$

$$\psi = [r^T(H_1) |_k \dots r^T(H_j) |_k \dots r^T(H_p) |_k]^T,$$

$$e(H_j) |_k = [e_1(k) \dots e_i(k) \dots e_m(k)]^T,$$

$$E(k) = [e^T(H_1) |_k \dots e^T(H_j) |_k \dots e^T(H_p) |_k]^T.$$

令

$$\frac{\partial J}{\partial \mu(k)} = 0, \quad (14)$$

得

$$2\bar{Y}^T \bar{Y} \mu(k) - 2\bar{Y}^T \psi = 0. \quad (15)$$

由此知

$$\mu(k) = (\bar{Y}^T \bar{Y})^{-1} \bar{Y}^T \psi = (\bar{Y}^T \bar{Y})^{-1} \bar{Y}^T [Y_R(k) - E(k) - S\tilde{X}(k)], \quad (16)$$

其中

$$S = [(\tilde{C}\tilde{A}^{H_1})^T \dots (\tilde{C}\tilde{A}^{H_j})^T \dots (\tilde{C}\tilde{A}^{H_p})^T]^T,$$

$$Y_R(k) = [Y_{ref}^T(H_1) |_k \dots Y_{ref}^T(H_j) |_k \dots Y_{ref}^T(H_p) |_k]^T.$$

由于式(16)中 $(\bar{Y}^T \bar{Y})^{-1} \bar{Y}^T$ 和 S 可以预先离线计算,所以 PFC 算法的在线优化不会涉及大的计算量问题.

将式(16)代入式(8)得当前*k*时刻控制输入为

$$U(k) = u_B(0)\mu(k). \quad (17)$$

$u_B(0)$ 也是可以预先离线计算得到的已知量.

由式(16)知,加权系数 $\mu(k)$ 存在的条件是 $\bar{Y}^T \bar{Y}$ 可逆,因此在选择控制器参数时应保证此条件满足.

3 闭环控制系统的鲁棒稳定性分析 (Robust stability analysis of the closed loop control system)

定义 1 假设标称系统(3)的所有特征值都位于一给定域 Θ 内,若发生参数摄动后的系统(1)的特征值仍然在 Θ 内,则称该系统鲁棒 D 稳定.

定义 2 对于维数相同的矩阵 V 和 M ,若矩阵对应的每个元素 $V_{ij} \leq M_{ij}$, 则 $V \leq M$.

首先按标称系统(3) 选择合理的控制器参数得到稳定控制率. 由于设定值的引入不会影响所设计控制系统的稳定性, 所以在分析闭环控制系统鲁棒稳定之前令 $W = [W_1 \cdots W_i \cdots W_m]^T = [0]_{m \times 1}$. 此时控制律(17) 变为

$$U(k) = u_B(0)(\bar{Y}^T \bar{Y})^{-1} \bar{Y}^T \psi = -K\tilde{X}(k), \quad (18)$$

其中

$$K = u_B(0)(\bar{Y}^T \bar{Y})^{-1} \bar{Y}^T S_1,$$

$$S_1 = [(\tilde{C}\tilde{A}^{H_1} - \alpha^{H_1}\tilde{C})^T \cdots (\tilde{C}\tilde{A}^{H_J} - \alpha^{H_J}\tilde{C})^T \cdots$$

$$(\tilde{C}\tilde{A}^{H_p} - \alpha^{H_p}\tilde{C})^T]^T,$$

$$\alpha^{H_J} = \text{diag}[\alpha_1^{H_J} \cdots \alpha_i^{H_J} \cdots \alpha_m^{H_J}] \quad (J = 1, \cdots, p).$$

记 $K = [K_0, K_1, K_2, \cdots, K_{p_a}, K_{p_a+1}, \cdots, K_{p_a+p_b}]$, 其中

$K_i (i = 0, 1, \cdots, p_a + p_b)$ 是可以离散计算的已知量.

将式(18)展开得

$$U(k) = -K_0 X(k) - \sum_{i=1}^{p_a} K_i X(k-i) - \sum_{i=1}^{p_b} K_{p_a+i} U(k-i), \quad (19)$$

对上式两边做 z 变换得

$$U(z) = -K_0 X(z) - \sum_{i=1}^{p_a} K_i z^{-i} X(z) - \sum_{i=1}^{p_b} K_{p_a+i} z^{-i} U(z). \quad (20)$$

假设 $\det(I + \sum_{i=1}^{p_b} K_{p_a+i} z^{-i})$ 不等于零, 则有

$$U(z) = (I + \sum_{i=1}^{p_b} K_{p_a+i} z^{-i})^{-1} (-K_0 - \sum_{i=1}^{p_a} K_i z^{-i}) X(z). \quad (21)$$

由于如前假设已经得到稳定控制律, 则式(21) 式对于 $|z| \geq 1$ 解析.

在证明系统鲁棒稳定性之前, 先给出如下引理.

引理 1^[8] 对于给定矩阵 $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$, 如果 $\rho[Q] < 1$, 那么 $\det(1 \pm Q) \neq 0$. 其中 $\rho[\cdot]$ 表示矩阵 $[\cdot]$ 的谱半径, I 是和给定矩阵 Q 同维的单位阵.

引理 2^[12] (最大模定理) 若 $g(z)$ 在给定域 Ω 内解析且不为常数, 则 $|g(z)|$ 的最大值不在 Ω 内部取得.

引理 3^[7] 对于任意常复数矩阵 $P, Q, O \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 且有 $|Q| \leq O$, 则

- 1) $|QP| \leq |Q||P| \leq O|P|$,
- 2) $|Q+P| \leq |Q|+|P| \leq O+|P|$,
- 3) $\rho[Q] \leq \rho[|Q|] \leq \rho[O]$,
- 4) $\rho[QP] \leq \rho[|Q||P|] \leq \rho[O|P|]$,

$$5) \rho[Q+P] \leq \rho[|Q|+|P|] \leq \rho[O+|P|].$$

定理 1 对于常复数矩阵 $P_1 \in \mathbb{R}^{m \times l}$, $Q_1, O_1 \in \mathbb{R}^{l \times m}$, 且 $|Q_1| \leq O_1$, 则

- 1) $|Q_1 P_1| \leq |Q_1||P_1| \leq O_1|P_1|$,
- 2) $|Q_1 + P_1| \leq |Q_1|+|P_1| \leq O_1+|P_1|$.

证 将矩阵 P_1, Q_1 分别补写为 $n \times n$ 维矩阵 $P_2,$

$$Q_2, \text{ 有 } P_2 = \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{n \times n}, \quad Q_2 = \begin{bmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{n \times n}.$$

由引理 3 知

$$|Q_2 P_2| = \left| \begin{bmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{n \times n} \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{n \times n} \right| = \begin{bmatrix} |Q_1 P_1| & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{n \times n} \leq \begin{bmatrix} |Q_1| & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{n \times n} \left| \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{n \times n} \right| = \begin{bmatrix} |Q_1| & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{n \times n} \begin{bmatrix} |P_1| & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{n \times n} = \begin{bmatrix} |Q_1||P_1| & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{n \times n}.$$

可得 $|Q_1 P_1| \leq |Q_1||P_1|$, 同理得证

$$|Q_1||P_1| \leq O_1|P_1|,$$

$$|Q_1 + P_1| \leq |Q_1| + |P_1| \leq O_1 + |P_1|.$$

定理 2 对于 $|z| \geq 1$, 若

$$\det[zI - A - \Delta A - \sum_{i=1}^{p_a} (A_i + \Delta A_i) z^{-i} - (B + \Delta B + \sum_{i=1}^{p_b} (B_i + \Delta B_i) z^{-i}) (I + \sum_{i=1}^{p_b} K_{p_a+i} z^{-i})^{-1} (-K_0 - \sum_{i=1}^{p_a} K_i z^{-i})] \neq 0. \quad (22)$$

则时滞摄动系统(1) 在控制律(19) 的作用下其所有特征根都位于单位圆内.

证 对不确定系统(1) 两边做 z 变换得

$$X(z)z = (A + \Delta A)X(z) + \sum_{i=1}^{p_a} (A_i + \Delta A_i) z^{-i} X(z) + (B + \Delta B)U(z) + \sum_{i=1}^{p_b} (B_i + \Delta B_i) z^{-i} U(z). \quad (23)$$

将(21) 代入上式, 闭环控制系统表述为

$$X(z)z = (A + \Delta A)X(z) + \sum_{i=1}^{p_a} (A_i + \Delta A_i) z^{-i} X(z) + (B + \Delta B + \sum_{i=1}^{p_b} (B_i + \Delta B_i) z^{-i}) \cdot (I + \sum_{i=1}^{p_b} K_{p_a+i} z^{-i})^{-1} (-K_0 - \sum_{i=1}^{p_a} K_i z^{-i}) X(z). \quad (24)$$

若式(22) 对于 $|z| \geq 1$ 成立, 则说明闭环摄动系统(24) 的特征根不在单位圆上或在单位圆外, 所以结

论得证.

由于本文设计的前提是假设无时滞系统 $X(k+1) = AX(k)$ 解析,可知

$$\det(zI - A) \neq 0 \text{ 对于 } |z| \geq 1. \quad (25)$$

于是可得如下定理.

定理3 假设无滞后标称系统 $X(k+1) = AX(k)$ 解析,且通过选择合适PFC参数使得控制律(19)存在,则不确定结构参数摄动时滞系统(1)在控制律(19)的作用下鲁棒D稳定的条件是下列不等式成立

$$\begin{aligned} & \rho \left[\bar{G} (|\bar{A}| + \sum_{i=1}^{p_a} (|A_i| + |\bar{A}_i|) + \right. \\ & \left. (|B| + |\bar{B}| + \sum_{i=1}^{p_b} (|B_i| + |\bar{B}_i|)) \right) \times \\ & \left. \bar{H} (|K_0| + \sum_{i=1}^{p_a} |K_i|) \right] < 1. \quad (26) \end{aligned}$$

其中 $\bar{G} = [\bar{G}_{ij}]_{n \times n} = [\max |G_{ij}(i\theta)|]_{n \times n}$, $G_{ij}(i\theta)$ 是 $(\exp(i\theta)I - A)^{-1}$ 的第 ij 个元素, $\bar{H} = [\bar{H}_{ij}]_{m \times m} = [\max |H_{ij}(i\theta)|]_{m \times m}$, $H_{ij}(i\theta)$ 是 $(I + \sum_{i=1}^{p_b} \frac{K_{p_a+i}}{\exp(i\theta)})^{-1}$ 的第 ij 个元素,并且 $i = \sqrt{-1}$, $\theta \in [0, 2\pi]$.

证 如果对于 $|z| \geq 1$

$$\begin{aligned} & \det[I - (zI - A)^{-1} \times \\ & (\Delta A + \sum_{i=1}^{p_a} (A_i + \Delta A_i)z^{-i} + \\ & (B + \Delta B + \sum_{i=1}^{p_b} (B_i + \Delta B_i)z^{-i}) \times \\ & (I + \sum_{i=1}^{p_b} K_{p_a+i}z^{-i})^{-1} (-K_0 - \sum_{i=1}^{p_a} K_i z^{-i}))] \neq 0. \quad (27) \end{aligned}$$

则由(25)(27)知

$$\begin{aligned} & \det[zI - A - \Delta A - \sum_{i=1}^{p_a} (A_i + \Delta A_i)z^{-i} - \\ & (B + \Delta B + \sum_{i=1}^{p_b} (B_i + \Delta B_i)z^{-i}) \times \\ & (I + \sum_{i=1}^{p_b} K_{p_a+i}z^{-i})^{-1} (-K_0 - \sum_{i=1}^{p_a} K_i z^{-i})] = \\ & \det[zI - A - (\Delta A + \sum_{i=1}^{p_a} (A_i + \Delta A_i)z^{-i} + \\ & (B + \Delta B + \sum_{i=1}^{p_b} (B_i + \Delta B_i)z^{-i}) \times \\ & (I + \sum_{i=1}^{p_b} K_{p_a+i}z^{-i})^{-1} (-K_0 - \sum_{i=1}^{p_a} K_i z^{-i})] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \det(zI - A) \times \\ & \det[I - (zI - A)^{-1} \times \\ & (\Delta A + \sum_{i=1}^{p_a} (A_i + \Delta A_i)z^{-i} + \\ & (B + \Delta B + \sum_{i=1}^{p_b} (B_i + \Delta B_i)z^{-i}) \times \\ & (I + \sum_{i=1}^{p_b} K_{p_a+i}z^{-i})^{-1} (-K_0 - \sum_{i=1}^{p_a} K_i z^{-i}))] \neq 0. \end{aligned}$$

因此由定理2知时滞摄动系统(1)在反馈控制律(19)的作用下其特征根都位于单位圆内.

由此可知式(27)对于控制系统的D稳定性具有决定作用,所以接下来考察在式(26)的条件下式(27)是否成立.

由于式(27)中

$$\begin{aligned} & (zI - A)^{-1} (\Delta A + \sum_{i=1}^{p_a} (A_i + \Delta A_i)z^{-i} + \\ & (B + \Delta B + \sum_{i=1}^{p_b} (B_i + \Delta B_i)z^{-i}) \times \\ & (I + \sum_{i=1}^{p_b} K_{p_a+i}z^{-i})^{-1} (-K_0 - \sum_{i=1}^{p_a} K_i z^{-i})) \end{aligned}$$

的根除 $(zI - A)^{-1}$ 和 $(I + \sum_{i=1}^{p_b} K_{p_a+i}z^{-i})^{-1}$ 根外都在 $z = 0$,

而由题设 $(zI - A)^{-1}$ 和 $(I + \sum_{i=1}^{p_b} K_{p_a+i}z^{-i})^{-1}$ 在 $|z| \geq 1$ 解析,所以

$$\begin{aligned} & (zI - A)^{-1} (\Delta A + \sum_{i=1}^{p_a} (A_i + \Delta A_i)z^{-i} + \\ & (B + \Delta B + \sum_{i=1}^{p_b} (B_i + \Delta B_i)z^{-i}) \times \\ & (I + \sum_{i=1}^{p_b} K_{p_a+i}z^{-i})^{-1} (-K_0 - \sum_{i=1}^{p_a} K_i z^{-i})) \end{aligned}$$

在 $|z| \geq 1$ 的有界域内解析且不为常值. 由最大模定理知,它的最大值将出现在 $|z| \geq 1$ 的边界上. 由于

$$\begin{aligned} & \rho \left[(zI - A)^{-1} \left(\Delta A + \sum_{i=1}^{p_a} \frac{A_i + \Delta A_i}{z^i} + \right. \right. \\ & \left. \left. (B + \Delta B + \sum_{i=1}^{p_b} \frac{B_i + \Delta B_i}{z^i}) \times \right. \right. \\ & \left. \left. (I + \sum_{i=1}^{p_b} \frac{K_{p_a+i}}{z^i})^{-1} \left(-K_0 - \sum_{i=1}^{p_a} \frac{K_i}{z^i} \right) \right) \right] \leq \\ & \rho \left[(zI - A)^{-1} \left(\Delta A + \sum_{i=1}^{p_a} \frac{A_i + \Delta A_i}{z^i} + \right. \right. \end{aligned}$$

$$\left(B + \Delta B + \sum_{i=1}^{p_b} \frac{B_i + \Delta B_i}{z^i} \right) \times \left(I + \sum_{i=1}^{p_a} \frac{K_{p_a+i}}{z^i} \right)^{-1} \left(-K_0 - \sum_{i=1}^{p_a} \frac{K_i}{z^i} \right) \Big| \Big| \quad (28)$$

而上式的最大值取值在 $|z| = 1$ 处, 令 $z = \exp(i\theta)$ ($\theta \in [0, 2\pi]$), 式(28) 变为

$$\rho \left[\left| \left(\exp(i\theta)I - A \right)^{-1} \left(\Delta A + \sum_{i=1}^{p_a} \frac{A_i + \Delta A_i}{\exp(i\theta)^i} + \left(B + \Delta B + \sum_{i=1}^{p_b} \frac{B_i + \Delta B_i}{\exp(i\theta)^i} \right) \times \left(I + \sum_{i=1}^{p_a} \frac{K_{p_a+i}}{\exp(i\theta)^i} \right)^{-1} \times \left(-K_0 - \sum_{i=1}^{p_a} \frac{K_i}{\exp(i\theta)^i} \right) \right| \right] \leq \rho \left[\left| G_y(i\theta) \right| \right] \left(\left| \Delta A \right| + \sum_{i=1}^{p_a} \frac{|A_i| + |\Delta A_i|}{|\exp(i\theta)|^i} + \left(|B| + |\Delta B| + \sum_{i=1}^{p_b} \frac{|B_i| + |\Delta B_i|}{|\exp(i\theta)|^i} \right) \times \left[|H_y(i\theta)| \right] \left(|K_0| + \sum_{i=1}^{p_a} \frac{|K_i|}{|\exp(i\theta)|^i} \right) \right) \leq \rho \left[\bar{G} \left(|\bar{A}| + \sum_{i=1}^{p_a} (|A_i| + |\bar{A}_i|) + (|B| + |\bar{B}| + \sum_{i=1}^{p_b} (|B_i| + |\bar{B}_i|)) \times \bar{H} \left(|K_0| + \sum_{i=1}^{p_a} |K_i| \right) \right) \right] < 1.$$

而上式成立等价于式(28) 小于 1, 所以由引理 1 和式(28) 知式(27) 成立, 即在定理的题设条件下摄动时滞系统(1) 在控制律(19) 的作用下保持 D 稳定. 所以结论得证.

PFC 的算法设计中, 控制器调节只有基函数、优化时域和期望响应时间 3 个参数可供选择. 而基函数的选择只依赖于对象本身和设定值的性质, 它的选择并不影响控制系统的稳定性和鲁棒性. 从状态反馈控制律(19) 知, K 只与优化时域 $[H_1, H_p]$ 和参考轨迹响应时间有关, 所以应合理选择 $[H_1, H_p]$ 和 T_{ref} 以便得到稳定控制律. 在不确定参数摄动存在的情况下, 由定理 3 给出的条件可判断此时摄动系统的 D 稳定性.

4 仿真实验 (Simulation)

考虑如下复杂滞后对象

$$\begin{cases} X(k+1) = (A + \Delta A)X(k) + (A_1 + \Delta A_1)X(k-1) + (A_3 + \Delta A_3)X(k-3) + (B + \Delta B)U(k) + (B_5 + \Delta B_5)U(k-5), \\ Y(k) = CX(k), \end{cases}$$

其中

$$A = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.8 & 0 \\ 0.2 & 0.2 & 0 \\ -0.4 & 0.4 & 0.1 \end{bmatrix}, A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0.1 & 0.1 \\ 0.03 & 0.05 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, B_5 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}^T, A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0.008 & 0.006 & -0.005 \\ 0.001 & -0.001 & 0.001 \end{bmatrix}, \Delta A = \begin{bmatrix} 0.04 & 0.04 & 0 \\ 0.01 & 0.02 & -0.05 \\ -0.02 & 0.02 & 0 \end{bmatrix}, \Delta B = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.1 \\ 0.1 \end{bmatrix}, \Delta B_5 = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0 \\ 0.1 \end{bmatrix},$$

$$\Delta A_1 = 0.1 \times A_1, \Delta A_3 = 0.1 \times A_3.$$

仿真中 $T_s = 0.1$, $T_{ref} = 0.2$, 预测时域 $[H_1, H_p] = [6, 10]$, 初始状态变量 $X(0) = [0 \ 0 \ 0]^T$, 取两个基函数 $u_{1B1}(t) = e^{-t/T_s}$, $u_{1B2}(t) = 1 - e^{-t/T_s}$. 在 $t = 2.5$ 时刻加入一幅值为 0.1 的输出干扰. 标称系统跟踪单位阶跃信号响应曲线如图 1 所示, 可见系统控制效果很好, 能有效消除外界干扰. 再考虑系统参数发生如算例中给出的摄动, 阶跃响应曲线如图 2 所示, 可见控制系统具有较好的鲁棒性能. 应用定理 3 来检验摄动系统的特征值, 有

$$\rho \left[\bar{G} \left(|\Delta A| + \sum_{i=1}^3 (|A_i| + |\Delta A_i|) + (|B| + |\Delta B| + \sum_{i=1}^5 (|B_i| + |\bar{B}_i|)) \times \bar{H} \left(|K_0| + \sum_{i=1}^3 |K_i| \right) \right) \right] = 0.9794 < 1.$$

其满足定理所要求的条件, 验证了所给方法的有效性.

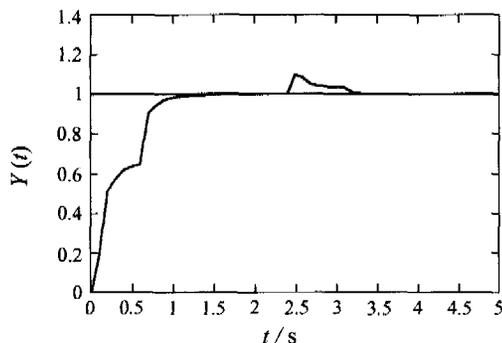


图 1 标称系统的阶跃响应曲线

Fig. 1 Step response of the nominal system

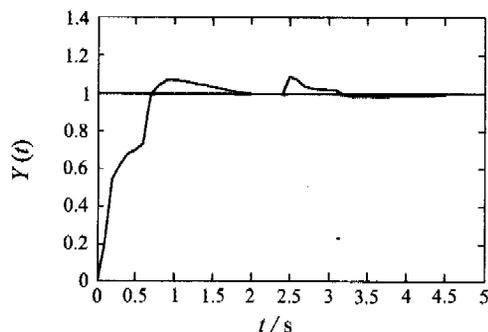


图2 扰动系统阶跃响应曲线

Fig. 2 Step response of the perturbed system

5 结论(Conclusion)

本文利用PFC算法在线计算量小、参数易于调节的特点,实现复杂滞后系统的预测控制.在假设离散标称不含时滞过程解析的条件下,应用最大模定理和矩阵谱半径的性质得到参数扰动系统鲁棒稳定的充分条件.仿真实验和数值实验同时验证了所给方法的有效性.

参考文献(References):

- [1] XU S Y, LAM J, ZHANG L Q. Robust D-stability analysis for uncertain discrete singular systems with state delay [J]. *IEEE Trans on Circuit and Systems I*, 2002, 49(4): 551-555.
- [2] XU S Y, CHEN T W. Robust H_{∞} control for uncertain discrete-time systems with time-varying delays via exponential output feedback controllers [J]. *Systems & Control*, 2004, 51(3-4): 171-183.
- [3] 姜偕富, 徐文立. 线性不确定时滞系统鲁棒指数镇定[J]. 清华大学学报, 2004, 44(7): 997-1000. (JIANG Xiefu, XU Wenli. Robust exponential stabilization for linearly uncertain time-delay systems [J]. *J of Tsinghua University*, 2004, 44(7): 997-1000.)
- [4] CHEN S H. Robust D-stability analysis for linear discrete-time singular systems with structured parameter uncertainties and delayed perturbations [J]. *Proc of Institution of Mechanical Engineers, Part I: J Systems and Control Engineering*, 2003, 217(1): 1-5.
- [5] JONG H K, EUN T J, HONG B P. Robust control for parameter uncertain delay systems in state and control input [J]. *Automatica*, 1996, 32(9): 1337-1339.
- [6] CHEN S H, CHOU J H. D-stability robustness for linear discrete uncertain singular systems with delayed perturbations [J]. *Int J Control*, 2004, 77(7): 685-692.
- [7] ORTEGA J M. *Numerical Analysis* [M]. New York: Academic Press, 1972.
- [8] CHEN K H. *Robust analysis and design of multi-loop control systems* [D]. Taiwan: National Tsing-Hua University, 1984.
- [9] RICHALET J. Industrial application of model based predictive control [J]. *Automatica*, 1993, 29(5): 1251-1270.
- [10] ERNST T E F H C. *First principle modeling and predictive functional control of enthalpic processes* [R]. France: Delft University of Technology, 1996.
- [11] ZHANG B, LI P, ZHANG W D. Predictive functional control of integrating process [J]. *J of Control Theory and Applications*, 2004, 2(2): 196-200.
- [12] 朱静航. 复变函数论[M]. 沈阳: 辽宁人民出版社, 1983. (ZHU Jinghang. *Function Theory of Complex Variables* [M]. Shenyang: Liaoning People's Press, 1983.)

作者简介:

张彬 (1977—),男,上海交通大学自动化系博士研究生,主要从事预测控制、鲁棒控制等研究,Email: zhangbin7701@sjtu.edu.cn;

张卫东 (1967—),男,上海交通大学自动化系教授,博士生导师,洪堡学者,主要从事过程鲁棒控制、现场总线、片上系统与数字图象处理等研究.