第 23 卷第 1 期
2006 年 2 月

控制理论与应用
Control Theory & Applications

Vol. 23 No. 1
Feb. 2006

文章编号：1000-8152(2006)01-0135-04

自由终端随机最优调节器的注记

张维海

（山东轻工业学院 电子信息与控制工程学院，山东 济南 250100；山东科技大学 信息与电气工程学院，山东 青岛 266510）

摘要：本文讨论了无限时间自由终端随机最优调节器问题和其相应的广义代数 Riccati 方程解之间的关系. 具体而言，本文证明了无限时间自由终端随机最优调节器对应着广义代数 Riccati 方程的最小非负解，该最小解的核空间等于随机系统的精确不能观子空间. 另外本文指出了以往文献中关于广义代数 Riccati 方程最大解存在性的一个证明错误，并对错误进行了分析.

关键词：广义代数 Riccati 方程；非负最小解；调节器问题；能稳性；精确能观性

中图分类号：TP13　　**文献标识码**：A

Note on free endpoint stochastic optimal regulator

ZHANG Wei-hai

(College of Electronic Information and Control Engineering, Shandong Institute of Light Industry, Jinan Shandong 250100, China;
College of Information and Electrical Engineering, Shandong University of Science and Technology,
Qingdao Shandong 266510, China)

Abstract: This paper discusses the relation between the infinite horizon free endpoint regulator of stochastic systems and the solution of the corresponding generalized algebraic Riccati equation. It is shown that an infinite horizon optimal regulator with free endpoint corresponds to a minimal nonnegative solution of the generalized algebraic Riccati equation. Moreover, the kernel space of this minimal solution equals to the exact unobservable subspace of the stochastic systems. In addition, an error in earlier literature in proving the existence of a maximal solution of the generalized algebraic Riccati equation is pointed out and analyzed.

Key words: generalized algebraic Riccati equation; nonnegative minimal solution; regulator problem; stabilization; exact observability

1 引言(Introduction)

我们注意到最近几年随机线性二次 (LQ) 最优控制问题得到了众多学者的关注，已经成为控制理论界的热点问题之一. 见文献 [1~6,8,9]. 特别是关于 Ito 系统的随机 LQ 优化发现了许多与确定性系统具有本质差别的现象，例如当消费函数中的控制权因子和状态权因子不定号时，随机 Ito 系统的 LQ 优化问题仍可适定[9]，这一发现直接引发了大量的后续研究，并在数理金融学方面得到应用和经济学解释. 文献[2]对无限时间不定随机 LQ 最优控制问题及其相应的广义代数 Riccati 方程 (GARE) 的最大解之间的关系进行了深入的讨论. 文献[3]进一步证明了 GARE 的最大解必定是一个强解. 本文我们将根据闭环系统的终端状态的性质定义两类优化问题：零终端和自由终端随机 LQ 最优调节器问题. 讨论了两类优化问题的差异以及与其对应的 GARE 解之间的关系，澄清了文献[1]的定理 1 在证明过程中的一些错误. 为使问题简便，本文限于讨论正则随机 LQ 最优控制(权因子定号).

全文使用下列记号：$A>0\,(A\geqslant 0)$：A 是正定(半正定)对称矩阵；A'：向量或矩阵 A 的转置；$\mathrm{Ker}\,A$：方阵 A 的核空间.

2 问题陈述(Problem statement)

考虑下列随机 Ito 控制系统(时间变量 t 省略)

$$\begin{cases}\mathrm{d}x=(Ax+Bu)\mathrm{d}t+(Cx+Du)\mathrm{d}W,\\ x(t_0)=x_0,\ x_0\in\mathbb{R}^n.\end{cases}\tag{1}$$

其中 $x(t)\in\mathbb{R}^n$ 是系统的状态，$u(t)\in\mathbb{R}^m$ 是控制输入，A,B,C,D 是适当维数的实常数矩阵，$W(t)$ 是定

收稿日期：2004-07-28；收修改稿日期：2005-06-24.
基金项目：国家自然科学基金资助项目(60474013)；山东省优秀中青年科学家基金资助项目(2004BS01010).

义在概率空间(Ω,F,P)上的标准一维 Wiener 过程。记F_t是由W生成的自然滤波,即$F_t=\sigma(W(s):0\leqslant s\leqslant t)$. 所谓无限时间随机 LQ 最优控制问题即在约束(1)下优化下列积分二次指标:

$$V(t_0,\infty)=E\int_{t_0}^{\infty}(x'Qx+u'Ru)\,\mathrm{d}t\,,\qquad(2)$$

其中$Q\geqslant 0,R>0$分别称为状态权因子和控制权因子. 现在我们首先推广确定性系统的有关定义[7]至随机系统如下:

定义 1 在约束条件(1)下优化指标

$$V_1^*(t_0,\infty)=\inf_{u\in U_{\mathrm{ad}}^{\infty}\cap\{u:\lim\limits_{t\to\infty}E|x(t)|^2=0\}}E\int_{t_0}^{\infty}(x'Qx+u'Ru)\,\mathrm{d}t\qquad(3)$$

称之为零终端最优调节器问题. 在约束条件(1)下优化指标

$$V_2^*(t_0,\infty)=\inf_{u\in U_{\mathrm{ad}}^{\infty}}V(t_0,\infty,u(\cdot))=\inf_{u\in U_{\mathrm{ad}}^{\infty}}E\int_{t_0}^{\infty}(x'Qx+u'Ru)\,\mathrm{d}t\qquad(4)$$

称之为自由终端最优调节器问题. 若有$u_1^*\in U_{\mathrm{ad}}^{\infty}\cap\{u:\lim\limits_{t\to\infty}E|x(t)|^2=0\}$或$u_2^*\in U_{\mathrm{ad}}^{\infty}$使式(3)或(4)取最小值,则称$u_1^*$或$u_2^*$是相应调节器问题的一个最优控制. 这里$U_{\mathrm{ad}}^{\infty}$表示一切关于$F_t$可测适应的平方可积随机过程所形成的集合. 研究随机最优调节器问题的一个有效途径是研究下列的 GARE(见参考文献[1,2,6])

$$\begin{cases}PA+A'P+C'PC-(PB+C'PD)N^{-1}\cdot\\(B'P+D'PC)+Q=0\,,\\N=R+D'PD>0,Q\geqslant 0,R>0\,.\end{cases}\qquad(5)$$

定义 2 P称为是 GARE(5)的一个最大解,如果对于式(5)的任意实对称解$\tilde P$,有$\tilde P\leqslant P$. $P\geqslant 0$称为是式(5)的一个最小非负解,如果对于任何的$\tilde P\geqslant 0$,有$P\leqslant\tilde P$.

为了后面的研究,我们还需要下列定义.

定义 3 [1,2,6] 系统(1)或$(A,B;C,D)$称为是能稳的,如果存在定常反馈控制律$u=Kx$使闭环系统

$$\mathrm{d}x=(A+BK)x\mathrm{d}t+(C+DK)x\mathrm{d}W$$

是均方稳定的. 这里K是一个适当阶数的常数矩阵.

定义 4[8] 考虑下列带观测方程的随机系统

$$\begin{cases}\mathrm{d}x=Ax\mathrm{d}t+Cx\mathrm{d}W,x(t_0)=x_0\,,\\y=Qx\,.\end{cases}$$

初始状态$x_0\in\mathbb{R}^n$称为是精确不能观的,如果对任意的$T\geqslant t_0$其对应的观测方程满足

$$y(t,\omega)=0,\text{a.s.}\,,\quad\forall t\in[0,T]\,.$$

如果除了零初始状态外,不存在精确不能观的初始状态,则$[A,C|Q]$称为是精确能观的.

精确能观性的物理意义实际上是告诉我们这样一个事实:量测输出唯一决定系统的状态轨道. 这是和确定性系统的完全能观性一致的. 其次容易验证所有不能观的初始状态构成$\mathbb{R}^n$空间的一个子空间,简记为$N_0(A,C,Q)$. 熟知对零终端最优调节器问题和自由终端最优调节器问题有下列结论:

定理 1[2] 若$(A,B;C,D)$是能稳的,则对于零终端最优调节器问题,有

1) $V_1^*(t_0,\infty)=x_0'P_{\max}x_0$;

2) $P_{\max}$是 GARE(5) 的最大解,$P_{\max}\geqslant 0$.

定理 2[4,5] 若$(A,B;C,D)$是能稳的,则对于自由终端调节器问题,有

1) $V_2^*(t_0,\infty)=x_0'P_0x_0$;

2) $u_2^*(t)=-(R+D'P_0D)^{-1}\cdot(B'P_0+D'P_0C)x(t)$.

其中$P_0\geqslant 0$是 GARE(5)的某个解.

定理 1 和 2 说明在$(A,B;C,D)$能稳的条件下, GARE(5)必定存在一个最大解和一个非负解. 其次从文献[5]的定理证明过程可以看出,P_0实际上是下列广义微分 Riccati 方程的极限解$(T\to\infty)$.

$$\begin{cases}\dot P+PA+A'P+C'PC-(PB+C'PD)N^{-1}\cdot\\(B'P+D'PC)+Q=0,\\N=R+D'PD>0,Q\geqslant 0,R>0,P(T)=0\,.\end{cases}$$

3 主要结论(Main results)

一般来讲,$V_1^*(t_0,\infty)\neq V_2^*(t_0,\infty)$而且即使$V_1^*(t_0,\infty)$存在,$u_1^*$也不一定存在,这只要看一个确定性系统的例子即可看出$(C=D=0)$. $(A,B;C,D)$能稳此时退化为(A,B)能稳.

例 1 考虑一维确定性系统

$$\mathrm{d}x=(ax+u)\mathrm{d}t,\quad x(0)=x_0\neq 0\,.$$

易见上述系统是能稳的. $a=0$时,由定理 1, 2,

$$V_1^*(0,\infty)=V_2^*(0,\infty)=\inf_{u\in U_{\mathrm{ad}}^{\infty}}\int_0^{\infty}u^2\mathrm{d}t=0;$$

$$u_2^*(t)=0,P_{\max}=P_0=0\,.$$

但是u_1^*不存在,因为此时的闭环系统不是稳定的. 其次若取$a=1$,则易见

$$V_1^*(0,\infty)=2x_0^2,u_1^*(t)=-2x(t);$$

$$V_2^*(0,\infty)=0,u_2^*(t)=0,\ P_{\max}=2,P_0=0\,.$$

最后若取$a=-1$,则易见

$$V_1^*(0,\infty)=V_2'(0,\infty)=0,$$

$$u_2^*=u_1^*=0,\ P_{\max}=P_0=0\,.$$

下面将证明定理 2 中的 P_0 实际上是 GARE (5)的最小非负解.

定理 3 若 $(A,B;C,D)$ 是能稳的，则

i)与自由终端最优调节器问题相对应的 P_0 是 GARE (5)的一个最小非负解；

ii) $N_0(A,C,Q) = \mathrm{Ker}\,P_0$.

证 设 $\tilde{P} \geqslant 0$ 是 GARE (5)的任意一个非负解，则通过配方法有

$$E\int_0^T (x'Qx + u'Ru)\,\mathrm{d}t = x_0'\tilde{P}x_0 - Ex'(T)\tilde{P}x(T) + E\int_0^T[(x'Qx + u'Ru)\,\mathrm{d}t + \mathrm{d}(x'(t)\tilde{P}(t))] = x_0'\tilde{P}x_0 - Ex'(T)\tilde{P}x(T) + E\int_0^T (u + \tilde{K}x)'(R + D'\tilde{P}D)(u + \tilde{K}x)\,\mathrm{d}t,$$

其中 $\tilde{K} = -(R + D'\tilde{P}D)^{-1}(B'\tilde{P} + D'\tilde{P}C)$. 令 $T \to \infty$，$u \hat{=} \tilde{u} = \tilde{K}x$，从上式可以得到

$$E\int_0^\infty (x'Qx + \tilde{u}'R\tilde{u})\,\mathrm{d}t = x_0'\tilde{P}x_0 - \lim_{T\to\infty} Ex'(T)\tilde{P}x(T). \tag{6}$$

式(6)蕴涵着 $\tilde{u} \in U_{\mathrm{ad}}^\infty$，根据最优性原理和定理2，

$$0 \leqslant V_2^*(t_0,\infty) = x_0'P_0x_0 \leqslant E\int_0^\infty (x'Qx + \tilde{u}'R\tilde{u})\,\mathrm{d}t = x_0'\tilde{P}x_0 - \lim_{T\to\infty} Ex'(T)\tilde{P}x(T) \leqslant x_0'\tilde{P}x_0. \tag{7}$$

由于 x_0 的任意性，从上式立即可得 $0 \leqslant P_0 \leqslant \tilde{P}$，即 P_0 是一个最小非负解. i) 得证.

为证 ii)，首先注意到对任意的非零向量 $\xi \in \mathrm{Ker}\,P_0$，取 $x_0 = \xi$，则由定理 2 知

$$0 \leqslant V_2^*(0,\infty) = E\int_0^\infty (x^{*\prime}Qx^* + u_2^{*\prime}Ru_2^*)\,\mathrm{d}t = \xi'P_0\xi = 0. \tag{8}$$

其中 x^* 是对应的最优轨道. 从式(8) 可以看出对任意的 $T \geqslant 0$ 都有

$$u_2^*(t,\omega) = 0, y = Qx^* = 0, \text{a. s. } \forall t \in [0,T]. \tag{9}$$

式(8)说明 $\xi \in N_0(A,C,Q)$，即 $N_0(A,C,Q) \supset \mathrm{Ker}\,P_0$. 反之，对任意的非零向量 $\xi \in N_0(A,C,Q)$，类似上面的推导，根据不能观初始状态的定义和最优性原理我们有

$$0 \leqslant \xi'P_0\xi = V_2^*(0,\infty) \leqslant V(0,\infty)|_{u=0} = 0. \tag{10}$$

式(10)蕴涵着 $\xi \in \mathrm{Ker}\,P_0$，因此 $N_0(A,C,Q) \subset \mathrm{Ker}\,P_0$. 综合以上两步，我们有 $N_0(A,C,Q) = \mathrm{Ker}\,P_0$. ii) 得证.

从式(6) 和(7) 可以看出

推论 1 $\lim_{T\to\infty} Ex'(T)P_0x(T) = 0$，其中 $x(t)$ 是相应的闭环系统

$$\begin{cases}\mathrm{d}x = (A + BK_0)x\mathrm{d}t + (C + DK_0)x\mathrm{d}W, \\ x(t_0) = x_0, x_0 \in \mathbb{R}^n\end{cases}$$

的轨道，$K_0 = -(R + D'P_0D)^{-1}(B'P_0 + D'P_0C)$.

推论 2 若 $(A,B;C,D)$ 是能稳的，$[A,C|Q]$ 是精确能观的，则自由终端最优调节器和零终端最优调节器是等价的. 换句话说，此时我们有

$$V_1^*(t_0,\infty) = V_2^*(t_0,\infty), \quad u_1^* = u_2^*.$$

证 因为 $[A,C|Q]$ 是精确能观的，所以 $N_0(A,C,Q) = \{\vartheta\}$. 由定理2 和3 知 $P_0 > 0$. 再由文献[6]的定理2.2 和3.2 知 $P_{\max} = P_0 > 0$，这样由定理1 和2 可得本推论.

需要指出的是，文献[1]的定理1 虽然结论是正确的，但是证明存在错误. 事实上，文献[1]的定理1 的前半部分可以作为近期文献[2]的一个一般性结论的推论而得到. 文献[3]对定理 1 的后半部分给出了一个正确的证明. 文献[1]的问题在于用一种错误的方法证明了 P_0 是 GARE (5)的最大解. 下面我们详细分析一下文献[1]的证明错误之所在，相信对读者是有益的.

事实上，文献[1]的式 (2.3)即

$$\lim_{\varepsilon\to 0} P_0^\varepsilon = P_0 \tag{11}$$

是不成立的. 请看下面特殊的确定性系统的例子：

例 2 对于一维确定性系统

$$\mathrm{d}x = (x + u)\mathrm{d}t, \quad x(0) = 1$$

及相应的指标函数

$$V_2^*(0,\infty) = \inf_{u\in U_{\mathrm{ad}}^\infty}\int_0^\infty u^2\,\mathrm{d}t,$$

$$V_2^*(0,\infty,\varepsilon) = \inf_{u\in U_{\mathrm{ad}}^\infty}\int_0^\infty (\varepsilon^2x^2 + u^2)\,\mathrm{d}t, \ \varepsilon > 0,$$

由定理 2 和 3 可以得到

$$P_0 = 0, \quad P_0^\varepsilon = 1 + \sqrt{1+\varepsilon}.$$

显然 $\lim_{\varepsilon\to 0} P_0^\varepsilon = 2 \neq P_0 = 0$. 既然式 (11)是错误的，显然文献 [1]证式 (11)成立的证明过程也是错误的，这个错误产生于下面的误判. 即对于自由终端调节器问题，虽然根据最优性原理，对任何$\beta > 0$，总可以找到 $u_1 \in U_{\mathrm{ad}}^\infty$，使

$$V_2^*(t_0,\infty) \leqslant E\int_{t_0}^\infty (x_1'Qx_1 + u_1'Ru_1)\,\mathrm{d}t \leqslant V_2^*(t_0,\infty) + \frac{1}{2}\beta. \tag{12}$$

但是无法保证 x_1 平方可积，从而对无论多么小的

$\varepsilon > 0$, 下式并不总是成立

$$\varepsilon E\int_{t_0}^{\infty} x_1' x_1 \mathrm{d}t < \frac{1}{2}\beta. \tag{13}$$

请看下面的例子.

例 3 对于一维确定性系统 $\mathrm{d}x = u\mathrm{d}t, x(0) = 1$ 及其相应的指标函数

$$V_2^*(0,\infty) = \inf_{u\in U_{\mathrm{ad}}^{\infty}}\int_0^{\infty} u^2 \mathrm{d}t = 0,$$

容易看出对任何 $\beta > 0$,可以取 $u_1 = \mathrm{e}^{-nt}, n > \frac{1}{\beta}$,使式 (12) 成立,但是相应轨道的积分 $\int_0^{\infty} x_1' x_1 \mathrm{d}t = \infty$,所以式 (13) 不成立.

3 结束语(Concluding remarks)

上面我们对自由终端最优调节器以及相应的 GARE (5)的解之间的关系进行了讨论,并详细分析了文献[1]的定理 1 的证明错误. 通过几个例子澄清了一些观念上的错误. GARE (5) 的最大解 $P_{\max}$ 和非负最小解 P_0 有非常好的性质,并且与系统本身的稳定性和能观性关系密切,进一步的研究将另文讨论.

参考文献(References):

[1] 张维海. 矩阵代数 Riccati 方程的进一步研究[J]. 控制理论与应用,2000, 17(4):576 -578.
(ZHANG Weihai. A further study on a matrix algebraic Riccati equation[J]. *Control Theory & Applications*, 2000, 17(4): 576 -578.)

[2] AIT RAMI M, ZHOU X Y. Linear matrix inequalities, Riccati equations, and indefinite stochastic linear quadratic controls [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2000,45(6):1131 -1143.

[3] ZHANG W,CHEN B S. On stabilizability and exact observability of stochastic systems with their applications [J]. *Automatica*, 2004,40(1), 87 -94.

[4] 张维海. 无限时间随机 L-Q 最优控制所导致的代数 Riccati 方程的研究[D]. 杭州:浙江大学, 1998.
(ZHANG Weihai. *Study on algebraic Riccati equation arising from stochastic infinite horizon L-Q optimal control* [D]. Hangzhou: Zhejiang University, 1998.)

[5] ZHANG W, CHEN S. Stochastic infinite horizon linear quadratic optimal control [J]. *J of Zhejiang University*, 1998, 32(Suppl): 44 -48.

[6] 张维海. 广义代数 Riccati 方程和最优调节器的研究[J]. 控制理论与应用,2003, 20(4): 637 -640.
(ZHANG Weihai. Study on generalized algebraic Riccati equations and optimal regulators [J]. *Control Theory & Applications*, 2003, 20(4):637 -640.)

[7] MOLINARI B P. The time-invariant linear quadratic optimal control problem[J]. *Automatica*, 1977, 13(3), 347 -357.

[8] 刘雅增. 倒向随机微分方程和随机控制系统[D]. 济南:山东大学,1999.
(LIU Yazeng. *Backward stochastic differential equation and stochastic control systems* [D]. Jinan: Shandong University, 1999.)

[9] CHEN S, LI X, ZHOU X Y. Stochastic linear quadratic regulators with indefinite control weight costs [J]. *SIAM J Control Optim*, 1998, 36(5):1685 -1702.

作者简介:

张维海 (1965—),男,教授, 1998 年获浙江大学博士学位, 2001 年 5 月至 2003 年 7 月在台湾清华大学电机系做博士后研究,主要研究方向为信号处理,非线性随机控制及滤波器设计, E-mail: w_hzhang@163.com.