

## 实现 CPG 模型的细胞神经网络的分支分析方法

张益军<sup>1</sup>, 朱庆保<sup>2</sup>, 田恩刚<sup>1</sup>

(1. 东华大学 信息科学与技术学院, 上海 200051; 2. 南京师范大学 数学与计算机科学学院, 江苏 南京 210097)

**摘要:** 传统细胞神经网络(CNN)的输出函数是不光滑的, 难于研究其状态方程的分支情况. 本文提出了用双曲函数近似分段线性输出函数, 构成类似 CNN 系统. 首先利用 Poincaré-Bendixson 定理和数值计算方法证明了新细胞状态方程存在稳定的周期解, 然后通过局部分支理论计算出了使状态方程产生分支时偏置量的临界值, 最后得出了偏置量的改变会影响状态方程振荡周期的结论, 并通过仿真实验表明, 在新 CNN 中得到的结论可以应用到 CNN 原型系统中, 从而为通过 CNN 产生不同的 CPG 模式提供了理论依据.

**关键词:** 细胞神经网络; 周期解; 中枢模式发生器; 步态控制

**中图分类号:** TP242.6

**文献标识码:** A

## Method of bifurcation analysis of cellular neural network for CPG models

ZHANG Yi-jun<sup>1</sup>, ZHU Qing-bao<sup>2</sup>, TIAN En-gang<sup>1</sup>

(1. College of Information Science and Technology, Donghua University, Shanghai 200051, China;

2. School of Mathematics and Compute Science, Nanjing Normal University, Nanjing Jiangsu 210097, China)

**Abstract:** To analyze the bifurcation phenomena in cellular neural networks (CNN) state-equations, an analogy CNN is built in this paper with a sigmoid output-function instead of the traditional one. Firstly, through Poincaré-Bendixson theory and numerical calculation, it is proved that there exist periodic solutions of the new CNN. Secondly, an approach based on local bifurcation theory is introduced to find the critical parameter when periodic solutions vanish. Finally, a conclusion is drawn that a suitable periodic solution can be achieved by changing the value of the bias, and simulation experiments show that it is also valid in conventional CNN, which is an academic foundation to generate different patterns in central pattern generation (CPG) control strategy.

**Key words:** cellular neural networks; periodic solution; central pattern generator; locomotion control

### 1 引言(Introduction)

足式机器人运动控制策略的研究, 一直是机器人研发过程中的重点和难点. 现阶段, 对动物体中枢模式发生器(central pattern generation, CPG)的研究为其提供了新思路. 生物学家普遍认为, 几乎所有的动物体都是通过 CPG 产生节律模式来控制自身节律运动的. 工程中将 CPG 建模成一组相互耦合的非线性振荡器, 并在机器人步态控制中得到了应用. 利用两层细胞神经网络(cellular neural networks, CNN)实现 CPG 的控制策略, 现阶段也取得了较大的进展<sup>[1]</sup>. 但现有系统输出函数的不光滑性, 使其状态方程的分支、混沌等复杂的动态行为的研究变得非常困难. 作为一种研究的工具, 本文利用双曲

函数代替现有 CNN 中的分段线性输出函数, 构成类似 CNN 系统, 证明了系统存在稳定的周期解, 并分析了其产生分支的条件. 通过仿真实验得出对变形后的系统分析得到的结果同样适用于原型系统的结论. 此外, 本文研究了偏置量的改变与 CNN 产生不同模式的关系, 因而, 本文所做的工作为这一领域的研究, 特别是为 CPG 产生不同节律控制模式, 提供了一种新的理论工具或新思路、新方法.

### 2 用于 CPG 控制的两层细胞神经网络 (Two-layer CNN for CPG Model)

自从 L. O. Chua 等人提出 CNN 以来, 其得到了人们的广泛关注. 网络的基本组成单元是细胞, 单细胞的状态方程如下

$$C\dot{x}_{ij} = -\frac{1}{R_x}x_{ij}(t) + \sum_{c(k,l) \in N_r(i,j)} A(i,j;k,l)y_{kl}(t) + \sum_{c(k,l) \in N_r(i,j)} B(i,j;k,l)u_{kl}(t) + I. \quad (1)$$

其中:  $x, y, u$  分别表示网络的状态, 输出和控制;  $c(k, l) \in N_r(i, j)$  表示细胞  $c(k, l)$  在细胞  $c(i, j)$  的  $r$  邻域  $N_r(i, j)$  内, 一般  $r = 1$ .

输出函数如下:

$$y_{ij} = f(x_{ij}) = 0.5(|x_{ij} + 1| - |x_{ij} - 1|), \quad (2)$$

其中  $i = 1, 2, \dots, M, j = 1, 2, \dots, N$ .

近年来, Arena 等人对式(1)进行了广泛的研究, 并提出了利用两层 CNN 实现 CPG 来控制机器人运动步态的控制策略<sup>[1-3]</sup>. 两层细胞神经网络的状态方程描述如下:

$$\begin{cases} \dot{x}_{1,i,j} = -x_{1,i,j} + (1 + \mu + \varepsilon)y_{1,i,j} - s_1 y_{2,i,j} + i_1, \\ \dot{x}_{2,i,j} = -x_{1,i,j} + s_2 y_{1,i,j} + (1 + \mu - \varepsilon)y_{2,i,j} + i_2, \end{cases} \quad (3)$$

其输出函数仍由式(2)表示.

文献[2]对系统(3)的动态行为进行了研究. 由于输出函数(2)在  $x_1$ - $x_2$  平面上是不光滑的, 因此很难对其分支情况进行讨论, 也难于发现系统表现出的整体性质. 本文使用式(4)所示的双曲函数代替式(2)作为网络的输出函数

$$y_{k,ij} = \tanh(2 \times x_{k,ij}), \quad (4)$$

其中  $k = 1, 2, i = 1, \dots, M, j = 1, \dots, N$ .

为了证明变换后的系统能产生节律运动模式, 且易于进行理论推导, 下面对由式(3)(4)组成的新的 CNN 进行分析.

### 3 类似系统性态的研究 (Analysis of the satiability of analogy CNN)

CNN 中产生节律控制信号的前提是组成 CNN 的细胞存在周期解. 但如何选择细胞参数才能使 CNN 状态方程产生周期解, 到目前为止尚缺乏理论指导. 大量的数值模拟表明, 当取式(5)所示的参数组合时, CNN 原型系统存在周期解. 下面从理论上证明变换后的系统也存在周期解.

$$\begin{cases} \mu = 0.7, \varepsilon = 0, s_1 = s_2 = 1, \\ i_1 = -0.17, i_2 = 0.17. \end{cases} \quad (5)$$

根据式(4)(5), 将系统(3)改写如下:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + 1.7 \tanh(2x_1) - \tanh(2x_2) - 0.17, \\ \dot{x}_2 = -x_2 + \tanh(2x_1) + 1.7 \tanh(2x_2) + 0.17. \end{cases} \quad (6)$$

**命题 1** 系统(6)在区域  $D_0$  内仅有一个平衡点  $P(6.84 \times 10^{-3}, -7.74 \times 10^{-2})$ , 且  $P$  为不稳定的

焦点. 其中

$$D_0 = \{(x_1, x_2) | -2.87 \leq x_1 \leq 2.53, -2.53 \leq x_2 \leq 2.87\}.$$

证 求系统(6)的平衡点, 即要求  $\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = 0$  的解, 将其写成方程组的形式如下:

$$\begin{cases} -x_1 + 1.7 \tanh(2x_1) - \tanh(2x_2) - 0.17 = 0, \\ -x_2 + \tanh(2x_1) + 1.7 \tanh(2x_2) + 0.17 = 0. \end{cases} \quad (7)$$

令  $y_1 = -x_1 + 1.7 \tanh(2x_1) - 0.17, y_2 = x_2 - 1.7 \tanh(2x_2) - 0.17$ , 从式(7)中解出  $x_1$  和  $x_2$  得:

$$x_2 = \frac{1}{4}[\ln(y_1 + 1) - \ln(1 - y_1)], \quad (8)$$

$$x_1 = \frac{1}{4}[\ln(y_2 + 1) - \ln(1 - y_2)]. \quad (9)$$

利用 Matlab 软件画出式(8)(9)在  $D_0$  内的图像如图 1 所示. 其中实线表示  $\dot{x}_1 = 0$ , 虚线表示  $\dot{x}_2 = 0$ , 如图 1 所示, 它们在区域  $D_0$  内仅有一个交点  $P$ .

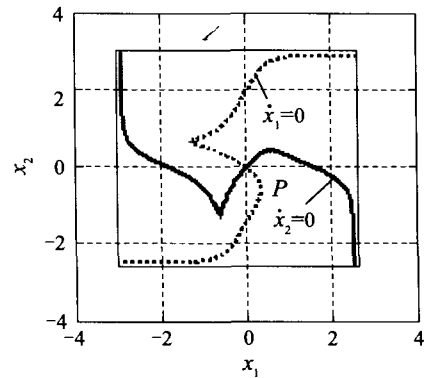


图 1 系统(6)的等倾线示意图

Fig. 1 Isoclines of system (6)

利用 Newton 法<sup>[4]</sup>求出方程组(7)的近似解, 即为  $P$  点坐标  $(0.00684, -0.0774)$ .

系统(6)在平衡点  $P$  处的雅克比矩阵为:

$$\begin{pmatrix} \lambda + 1 - \frac{3.4}{\cosh^2(2x_1)} & \frac{2}{\cosh^2(2x_1)} \\ -\frac{2}{\cosh^2(2x_1)} & \lambda + 1 - \frac{3.4}{\cosh^2(2x_1)} \end{pmatrix},$$

特征方程为:

$$\frac{1}{\cosh^2(2x_1) \cdot \cosh^2(2x_2)} [(\cosh^2(2x_1)(\lambda + 1) - 3.4)(\cosh^2(2x_2)(\lambda + 1) - 3.4) + 4] = 0.$$

将点  $P$  坐标代入上式, 并化简得:

$$1.024\lambda^2 - 4.834\lambda + 9.702 = 0. \quad (10)$$

根据求根公式, 式(10)存在两个虚根, 且两个虚根的实部均大于零, 所以,  $P$  点为不稳定的焦点.

证毕.

图1中等倾线  $\dot{x}_1 = 0$  将  $D_0$  分成两部分,在它左侧  $\dot{x}_1 > 0$ ,右侧  $\dot{x}_1 < 0$ ;  $\dot{x}_2 = 0$  也将  $D_0$  分成两部分,上方  $\dot{x}_2 < 0$ ,下方  $\dot{x}_2 > 0$ . 为证明系统(6)周期解的存在性,先给出一个引理:

**引理1** 区域  $D_0$  的边界上的轨线自外向内,  $D_0$  内除去不稳定的焦点之外没有其他平衡点,则系统在  $D_0$  内存在稳定的极限环.

根据 Poincaré-Bendixson 定理<sup>[5]</sup>,引理的结论是显然的.

**定理1** 系统(6)存在稳定的周期解.

**证** 可以验证  $x_1 = -2.87$ ,  $x_1 = 2.53$  是式(8)的无穷间断点,  $x_2 = 2.87$  和  $x_2 = -2.53$  为式(9)的两个无穷间断点. 取任意小的正数  $\varepsilon$ , 在  $x_1 - x_2$  平面内构造区域  $U$  如下:

$$U = \{(x_1, x_2) \mid -2.87 + \varepsilon \leq x_1 \leq 2.53 - \varepsilon, \\ -2.53 + \varepsilon \leq x_2 \leq 2.87 - \varepsilon\}.$$

如图2所示,  $U$  与等倾线分别交于点  $A, B, C$  和  $D$ . 根据命题1的分析,系统(6)的等倾线将区域  $U$  分成  $D_1 \sim D_4$  四部分,在每一部分  $\dot{x}_1, \dot{x}_2$  的符号如表1所示. 图2中带箭头的弧线标出了轨线场在  $U$  边界上的走向,它们均自外向内.

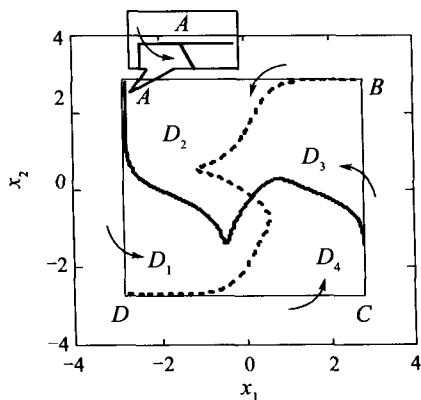
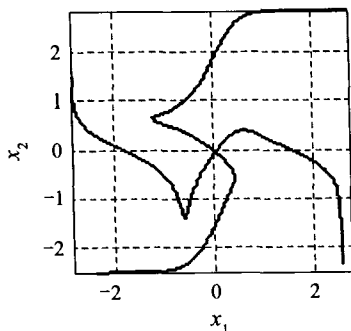
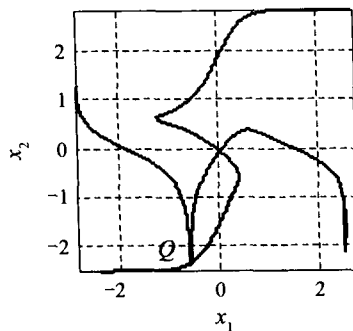


图2 区域  $U$  边界上轨线场走向示意图

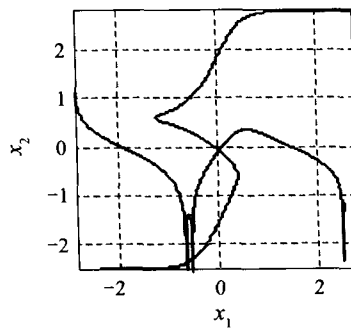
Fig. 2 Direction field of the boundaries of  $U$



(a)  $i_1 = -0.175$



(b)  $i_1 = -0.1824$



(c)  $i_1 = -0.19$

图3 固定  $i_2 = 0.17$ ,  $i_1$  值不断减小时,系统等倾线分布示意图

Fig. 3 Nullclines for system (11) with the fixed parameter  $i_2 = 0.17$

表1 各区间状态变量对时间的导数

Table 1 Derivative of the state variables in intervals

|                 | $D_1$ | $D_2$ | $D_3$ | $D_4$ |
|-----------------|-------|-------|-------|-------|
| $x_1$ 对 $t$ 的导数 | +     | -     | -     | +     |
| $x_2$ 对 $t$ 的导数 | -     | -     | +     | +     |

由于  $\varepsilon$  任意小,根据命题1和引理1,系统(6)存在稳定的极限环. 证毕.

系统(6)存在周期解表明细胞会像一个细胞自动机一样产生周期振荡. 如果对各细胞之间进行适当的耦合,网络中可以产生自激振荡,形成节律模式. 若给系统(6)一个微小的扰动,相当于改变了偏置量  $i_1$  和  $i_2$ . 系统在运行过程中不可避免地要受到环境干扰或其它不确定因素的影响,所以探讨偏置量的改变对系统(6)周期解的影响很有意义. 为此,将系统(6)中的偏置常数改写成参数形式,得到如下系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + 1.7 \tanh(2x_1) - \tanh(2x_2) + i_1, \\ \dot{x}_2 = -x_2 + \tanh(2x_1) + 1.7 \tanh(2x_2) + i_2. \end{cases} \quad (11)$$

**命题2** 在区域  $D_0$  中,系统(11)的解对参数  $i_1$  和  $i_2$  是连续依赖的.

**证** 根据微分方程解对参数的连续依赖性定理,只需验证系统(11)在区域  $D_0$  内对变量  $x_1, x_2$  满足局部李氏条件,对参数  $i_1, i_2$  存在一致的李氏常数. 由于系统(11)的右端对  $x_1, x_2$  的一阶导数在区域  $D_0$  内均有界,对  $i_1, i_2$  的导数均为常数,所以上述条件满足. 证毕.

若固定  $i_2 = 0.17$ ,当系统(11)中  $i_1$  由 0.17 逐渐变小时,仿真试验表明,区域  $D_0$  内会出现 2 个或多个平衡点. 图 3(a) ~ (c) 分别表示  $i_2 = -0.17$  时,  $i_1$  取 -0.175, -0.1824 和 -0.19 时系统(11)在区域  $D_0$  内等倾线的示意图. 仿真结果表明,当  $i_1 < -0.1824$  时系统(11)产生分支,系统的极限环消失.

**定理 2** 固定  $i_2$ , 当  $i_1 < i_c$  时, 系统(11) 产生分支, 极限环消失. 这里  $i_c$  是系统极限环消失时  $i_1$  的值, 当  $i_2 = 0.17$  时,  $i_c = -0.1824$ .

**证** 分析图 3(b) 所示的临界状态, 设新增加的平衡点为  $Q(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ . 为了计算  $\bar{x}_1$ , 将式(8) 的右端对  $x_1$  求得

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{1}{4} \left( \frac{1}{1+y_1} + \frac{1}{1-y_1} \right) \cdot \left( -1 + \frac{3.4}{\cosh^2(2x_1)} \right).$$
  
令  $\frac{dx_2}{dx_1} = 0$ , 由于  $\frac{1}{1+y_1} + \frac{1}{1-y_1} \neq 0$ , 故  $-1 + \frac{3.4}{\cosh^2(2x_1)} = 0$ , 即  $x_1 = \pm 0.6109$ . 结合图 3(b) 得,  $\bar{x}_1 = -0.6109$ , 且  $\bar{x}_2 < -1$ . 因为当  $x_2 < -1$  时,  $y_2 = \tanh(2x_2) \approx -1$ ,  $(\tanh(2x_2))' \approx 0$ , 为研究在  $Q$  点附近系统的性态, 将系统(11) 重写为:

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}_1 = -x_1 + 1.7 \tanh(2x_1) + 1 + i_1, \\ \dot{\bar{x}}_2 = -x_2 + \tanh(2x_1) - 1.53. \end{cases} \quad (12)$$

系统(12) 在点  $Q$  处的特征多项式为:

$$\begin{vmatrix} \lambda - \frac{3.4}{\cosh^2(2x_1)} + 1 & 0 \\ -\frac{2}{\cosh^2(2x_1)} & \lambda + 1 \end{vmatrix}_Q = 0.$$

解得  $\lambda_1 = -1$ ,  $\lambda_2 = \frac{3.4}{\cosh^2(2\bar{x}_1)} - 1 = 0$ .

因为系统(12) 第 2 个方程和  $i_1$  无关, 第 1 个方程不依赖于  $x_2$ , 根据中心流形定理<sup>[5]</sup>, 考虑系统(12) 在  $Q$  点附近的性态, 只需考虑下列方程:

$$\dot{x}_1 = f(x_1, i_1) = -x_1 + 1.7 \tanh(2x_1) + 1 + i_1.$$

因为

$$\left. \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} \right|_Q = 13.6 \times \sinh(2x_1) \cosh^{-3}(2x_1) \Big|_Q \neq 0,$$

$$\left. \frac{\partial f}{\partial i_1} \right|_Q = 1 \neq 0,$$

且系统(12) 在  $Q$  点的特征值为  $-1$  和  $0$ , 所以它在平衡点  $Q$  处产生局部分支<sup>[6]</sup>, 极限环消失, 解趋向于一个稳定点.

为计算  $i_1$  的临界值  $i_c$ , 令系统(11) 中  $\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = 0$ , 将  $\bar{x}_1 = -0.6109$  代入并化简. 对所得方程组的第 2 个方程利用 Newton-Raphson 方法<sup>[4]</sup> 求得  $\bar{x}_2 = -2.3699$ , 代入第 1 个方程求得  $i_1 = -0.1824$ , 即为所求的临界值. 证毕.

必须指出, 由于将式(11) 近似为式(12) 存在一定的误差, 所以直接令式(12) 中  $\dot{x}_1 = 0, i_2 = 0.17$ , 并将  $\bar{x}$  代入, 求得的  $i_c = -0.1826$  是不精确的. 定理 2 的证明过程, 实际上是一个求解偏置量范

围的过程, 使用同样的方法, 可以求出当  $\mu = 0.5, \varepsilon = 0, s_1 = s_2 = 1, i_3 = 0.3$  时,  $i_c = -0.3477$ .

若区域  $U$  内仅有一个平衡点时, 总可以仿照定理 1 的证明过程, 证明系统(6) 存在稳定的极限环. 定理 2 说明了当细胞偏置量发生改变时, 系统(6) 的解可能产生重大变化. 由于系统(6) 对偏置量是连续依赖的, 改变偏置量相当于改变了状态变量  $x_1$  和  $x_2$  的变化率, 故可以得到下面具有实际应用价值的推论.

**推论** 在系统(6) 存在周期解的前提下, 适当改变偏置量  $i_1$  和  $i_2$ , 系统周期解将发生改变.

推论为 CPG 产生新模式提供了一种新思路: 无需重新设计网络结构, 只改变网络偏置量, 系统就能产生不同的模式. 对此, 在仿真实验部分有更具体的说明.

#### 4 仿真实验 (Experiments)

1) 改变系统(6) 的偏置量, 可改变细胞节律产生的快慢. 动物体运动节律的改变是通过改变细胞间活动电位来实现, 对于系统(6) 可以通过改变  $i_1$  和  $i_2$  的值来实现. 偏置量的改变影响平衡点和极限环的相对位置. 图 4 描述对于不同的细胞偏置量, 细胞状态随时间变化的示意图. 比较图 4 中(a) ~ (c), 可以发现当偏置量不同时, 细胞表现出节律振荡的快慢也不相同.

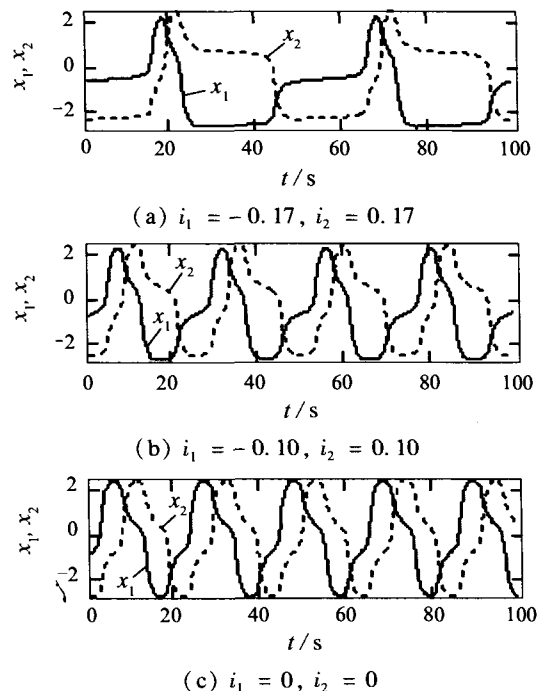


图 4 偏置量不同值时, 神经元细胞的状态变量  $x_1$  和  $x_2$  随时间变化性态的示意图

Fig. 4 Different periodic solutions for system (6) with different value of bias in plane  $x_1$ - $x_2$

2) 第 3 节中得到的推论在 CNN 原型系统中同样成立. 图 5(a) ~ (c) 分别是输出函数为式(2), 除

偏置量之外的细胞参数如式(5)所示,偏置量取不同值时,细胞状态变量随时间 $t$ 的变化轨迹.不难发现,对于不同的偏置量,网络表现出不同的模式信息.当偏置量的改变超过临界值时,极限环消失,图5(c)表示细胞状态方程的解趋于一个稳定点.

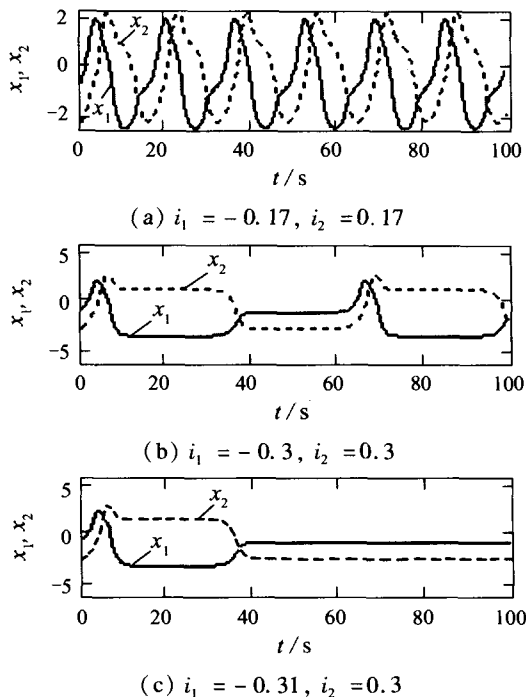
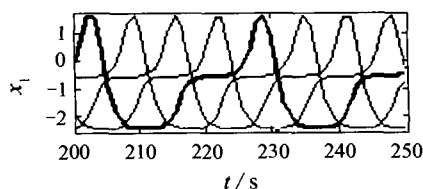


图5 CNN原型系统中,不同的偏置量对应的细胞状态示意图

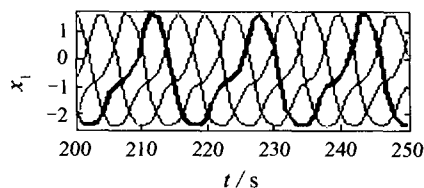
Fig. 5 Different periodic solutions with different value of bias in traditional CNN

## 5 应用(Application)

两层细胞神经网络主要应用在机器人的步态控制中<sup>[1~3]</sup>.利用CNN产生CPG控制模式,控制六足机器人的步态运动,利用文献[1]介绍的网路结构,连接权值 $D_1 = D_2 = 0.1$ ,除偏置量外的其他参数按式(5)给定.图6给出了偏置模板取不同值时,CNN中细胞状态变量 $x_i$ 随时间变化的振荡规律.其中粗线表示细胞1,从左往右依次为细胞4,7和10,振荡时间为50s.显然,偏置量不同,CNN产生的节律模式不同.若将利用CNN的状态变量作为机器人伺服电机的驱动,则要产生不同的CPG不同的模式,只要改变网络中细胞间的连接电压,而无需重新设计网络或配置其他网络参数.



(a)  $i_1 = -0.3, i_2 = 0.3$



(b)  $i_1 = -0.2, i_2 = 0.2$

图6 不同偏置量,CNN周期振荡示意图

Fig. 6 Different period with different value of bias in CNN state-equations

## 6 结论(Conclusion)

由于CNN易于利用电路实现,从提出到现在,发展非常迅速,但其理论尚不成熟.本文用双曲函数代替传统的分段线性函数,为研究CNN复杂的动力学行为提供了新思路.仿真结果表明,研究变换后的系统得到的结论和计算的相关参数,返回到通用CNN中同样成立,因此可以为CNN的实际应用提供理论指导.但两个系统是否在理论上同构或拓扑等价,仍是今后需要进一步探讨的课题.

## 参考文献(References):

- [1] ARENA P, FORTUNA L. Analog cellular locomotion control of hexapod robots [J]. *IEEE Control Systems Magazine*, 2002, 22(6): 21-36.
- [2] ARENA P, CAPONETTO R, FORTUNA L, et al. Cellular neural networks to explore complexity [J]. *Soft Comput*, 1997, 1(3): 120-136.
- [3] ARENA P, FORTUNA L, BRANCIFORTE M. Reaction-diffusion CNN algorithms to generate and control artificial locomotion [J]. *IEEE Trans on Circuits and Systems*, 1999, 46(2): 253-260.
- [4] 林成森. 数值计算方法[M]. 北京: 科学出版社, 1999. (LIN Chengsen. *Method of Numerical Calculation* [M]. Beijing: Science Press, 1999.)
- [5] 张锦炎, 冯贝叶. 常微分方程几何理论与分支问题[M]. 北京: 北京大学出版社, 2000. (ZHANG Jinyan, FENG Beiyue. *Geometric Theory and Bifurcation of Ordinary Differential Equation* [M]. Beijing: University Press, 2000.)
- [6] KUZNETSOV Y. *Elements of Applied Bifurcation Theory* [M]. New York: Springer, Verlag, 1998.

## 作者简介:

张益军 (1979—),男,东华大学信息科学与技术学院在读博士,主要研究方向为智能控制,网络控制, E-mail: zyjcar@163.com;

朱庆保 (1955—),男,教授,南京师范大学数学与计算机科学学院,主要研究领域:人工智能与智能控制, E-mail: zhuqingbao@njnu.edu.cn;

田恩刚 (1980—),男,东华大学信息科学与技术学院在读博士,主要研究方向为网络控制.