

高频增益符号未知时的变结构模型参考自适应控制: 任意相对阶的控制律设计

林 岩¹, 董文瀚², 孙秀霞²

(1. 北京航空航天大学 自动化科学与电气工程学院, 北京 100083; 2. 空军工程大学 工程学院, 陕西 西安 710038)

摘要: 讨论被控对象相对阶大于 1 且高频增益符号未知时的变结构模型参考自适应控制问题, 从而将相对阶为 1 时的结果推广到任意相对阶. 首先对关键信号构造监控函数, 并在此基础上提出了一种控制信号切换律. 进而证明, 当被控对象相对阶大于 1、高频增益符号未知时, 在监控函数的监测下, 相关控制信号经至多有限次切换后将停止切换, 跟踪误差将收敛到一个残集内, 且该残集可通过减小某些设计参数而变得任意小. 特别, 本文证明, 与相对阶为 1 时相同, 当对象相对阶大于 1 时, 若系统的某些初始条件为零, 则至多只需要一次切换.

关键词: 变结构控制; 自适应控制; 混合控制; 非线性控制

中图分类号: TP. 273

文献标识码: A

Variable structure model reference adaptive control with unknown high frequency gain sign: general case

YAN Lin, DONG Wen-han, SUN Xiu-xia

(1. School of Automation, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100083, China;

2. Engineering Institute, Airforce Engineering University, Xi'an Shaanxi 710038, China)

Abstract: A switching method is presented for the design of a variable structure model reference adaptive control for plants with relative degree greater than one without the knowledge of the sign of the plant high frequency gain. The design is based on some properly chosen monitoring functions. It is shown that under the supervision of the monitoring functions, the switching of control signal will stop after a finite number of switching and the tracking error will converge to a residual set that can be made arbitrarily small by choosing some design parameters sufficiently small. In particular, the same as the earlier work for plants with relative degree one, if some initial states of the system are zero, it is shown that at most one switching is needed.

Key words: variable structure control; adaptive control; hybrid control; non-linear control

1 引言 (Introduction)

变结构模型参考自适应控制 (variable structure model reference adaptive control, VS-MRAC^[1~4]) 系统因具有良好的过渡过程和鲁棒性而受到重视. 在文[5]中, 我们讨论了被控对象相对阶为 1、高频增益符号未知时的 VS-MRAC 方案. 基本思想对跟踪误差构造一个监控函数, 以此为基准设计切换律, 对控制信号适时进行切换. 该方案可保证系统跟踪误差至少以指数速度收敛到零. 本文将把文[5]的结果推广到被控对象具有任意相对阶时的一般情形.

相对阶大于 1 时, VS-MRAC 系统控制器结构与一般参数自适应系统是不同的^[2~4]. 由于变结构

控制的特殊性, 须将系统分解成 n^* 个相对阶为 1 的子系统. 且其输出 (称为辅助误差) 不能全部收敛到零, 故不能直接在文献[5]的基础上构造监控函数. 因此, 本文的工作是: 对文献[2~4]所提控制律进行修正, 引入调参律对高频增益进行估计, 从而保证在高频增益符号已知情况下所有辅助误差均收敛到零. 以此为基础, 讨论了当高频增益符号未知时监控函数的构造和切换律的设计. 我们证明, 当被控对象相对阶大于 1、高频增益符号未知时, 在监控函数的监测下, 相关信号经至多有限次切换后将停止切换, 跟踪误差将收敛到一个残集内. 该残集可通过减小某些设计参数而变得任意小. 特别, 与 $n^* = 1$ 时的

情形类似,我们证明,若系统的某些初始条件为零,则相关控制信号至多只需要一次切换.

2 系统与基本假设(System and assumptions)

考虑如下 SISO 线性时不变系统^[2]

$$y = G_p(s)[u + d] = k_p(n_p(s)/d_p(s))[u + d]. \quad (1)$$

这里: y 和 u 分别为系统的输出和输入, $G_p(s)$ 为被控对象, $d_p(s)$ 和 $n_p(s)$ 分别为 n 阶及 m 阶首一多项式, d 为输入扰动. 给定渐进稳定的参考模型

$$y_M = M(s)[r] = k_M[1/d_M(s)][r], k_M > 0, \quad (2)$$

其中: r 为任意给定的分段连续且一致有界的参考输入, $d_M(s)$ 为首一 Hurwitz 多项式, 其阶数等于对象 (1) 的相对阶. 目的是设计控制律 u , 使误差

$$e = y - y_M \quad (3)$$

在相对阶为 1 时收敛到零, 在相对阶大于 1 时收敛到某个小的残集中.

就被控对象 (1), 有如下基本假设:

A1) $G_p(s)$ 为相对阶 $n^* \geq 1$ 的最小相位系统; 其参数未知但属于一个已知的紧集; A2) 系统阶数 n 为已知常数; A3) 相对阶 n^* 为已知常数; A4) 高频增益 $k_p (\neq 0)$ 的符号未知; A5) 输入扰动满足

$$|d(t)| \leq \bar{d}(t), \forall t \geq 0, \quad (4)$$

这里 $\bar{d}(t)$ 为一已知、分段连续且一致有界的函数.

本文控制信号具有如下形式

$$u = \hat{\theta}^T \omega + u_{vs}. \quad (5)$$

其中: u_{vs} 是欲设计的变结构律; 常向量 $\hat{\theta} \in \mathbb{R}^{2n}$ 将在下面定义; 向量

$$\omega := [v_1^T, y, v_2^T, r]^T \in \mathbb{R}^{2n}, \quad (6)$$

v_1 和 v_2 由如下输入/输出滤波器产生:

$$\begin{cases} \dot{v}_1 = \Lambda v_1 + g u, v_1(0) = 0, \\ \dot{v}_2 = \Lambda v_2 + g y, v_2(0) = 0, \end{cases} \quad (7)$$

$g \in \mathbb{R}^{n-1}, \Lambda \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}$ 为 Hurwitz 矩阵且 (Λ, g) 为可控对. 熟知^[6], 在以上假设下存在唯一常向量

$$\theta^* = [\theta^{*T}_1, \theta^*_0, \theta^{*T}_2, k^*]^T \in \mathbb{R}^{2n}, \quad (8)$$

使得在不计初始条件的情况下有 $y = G_p(s)[\theta^{*T} \omega] = M(s)[r] = y_M$. 由于系统参数不确定, 可由名义被控对象求得 θ^* 的一个估计向量

$$\hat{\theta} := [\hat{\theta}_1^T, \hat{\theta}_0, \hat{\theta}_2^T, \hat{k}]^T \in \mathbb{R}^{2n}. \quad (9)$$

于是由式 (1) ~ (9), 系统跟踪误差可写成^[3]

$$e = M(s)\kappa^*[\hat{\theta}^T \omega + d_f + u_{vs}] + \bar{e}, \quad (10)$$

其中 $\bar{e}$ 为反映初始条件的指数衰减函数,

$$\bar{\theta} = \hat{\theta} - \theta^*,$$

$$\kappa^* := k_p/k_M = 1/k^*,$$

$$d_f := (1 - d_1(s)/\det(sI - \Lambda))[d],$$

$$d_1(s) := \hat{\theta}_1^T \text{adj}(sI - \Lambda)g. \quad (11)$$

3 对象具有任意相对阶时的变结构控制律 (VS control for plants with arbitrary relative degree)

相对阶 $n^* = 1$ 时的主要结果: 先简要介绍文献^[5]的主要结果. 由式 (2), $n^* = 1$ 时可将参考模型写成

$$M(s) = k_M/(s + \lambda), \quad (12)$$

这里 λ 为正常数. 由式 (10) 和 (12), 有

$$\dot{e} = -\lambda e + k_p(\bar{\theta}^T \omega + d_f + u_{vs}) + \varepsilon, \quad (13)$$

ε 为指数衰减函数.

被控对象相对阶为 1 时有如下主要结果:

定理 1^[5] 设 VS-MRAC 系统由式 (1) (2) (13) 给出并满足假设 A1) ~ A5). 令式 (13) 中变结构律为

$$\begin{cases} u_{vs} = u_{vs}^+ := -(\beta \|\bar{\omega}\| + \bar{d}_f + \Delta) \text{sgn } e, \\ u_{vs} = u_{vs}^- := -(\beta \|\bar{\omega}\| + \bar{d}_f + \Delta) \text{sgn } e, \end{cases} \quad (14)$$

这里: β 是 $\|\bar{\theta}\|$ 的一个上界, $\bar{d}_f$ 满足不等式 $|d_f| \leq \bar{d}_f$ 且一致有界, Δ 为一任意小的正常数. 进而, u_{vs} 由 u_{vs}^- 切换到 u_{vs}^+ (或 u_{vs}^+ 切换到 u_{vs}^-) 的切换时间定义为

$$t_{k+1} = \begin{cases} \min\{t > t_k : |e(t)| = \varphi_k(t)\}, & \text{若此最小值存在,} \\ +\infty, & \text{其他.} \end{cases} \quad (15)$$

其中监控函数 φ_k 定义为

$$\begin{cases} \varphi_k(t) = e^{-\lambda(t-t_k)} |e(t_k)| + (k+1)e^{-\delta_k t}, \\ t \in [t_k, t_{k+1}), k = 0, 1, 2, \dots; t_0 = 0, \end{cases} \quad (16)$$

δ_k 为单调递减的序列, 满足

$$\delta_k \rightarrow 0, \text{ 当 } k \rightarrow \infty. \quad (17)$$

则 u_{vs} 经有限次切换后将停止切换, 跟踪误差至少以指数速度收敛到零.

推论 1^[5] 若 $\varepsilon = 0$, 则至多只有一次切换.

注 1 由假设 A1), β 可预先算得; 由假设 A5), 满足 $|d_f| \leq \bar{d}_f$ 且一致有界的 $\bar{d}_f$ 也可求得.

相对阶 $n^* > 1$ 时的控制器结构: $n^* > 1$ 时可将式 (9) 写成

$$e = M(s)L(s)\kappa^*[\bar{\theta}^T \bar{\omega} + d_L + L^{-1}(s)[u_{vs}]] + \bar{e}, \quad (18)$$

且设存在多项式

$$L(s) = \prod_{i=1}^{n^*-1} L_i(s) = \prod_{i=1}^{n^*-1} (s + \lambda_i), \lambda_i > 0, \quad (19)$$

使 $M(s)L(s)$ 是一个 SPR(严格正实) 函数, 这里

$$\begin{cases} \bar{\omega} := L^{-1}(s)[\omega], \\ d_L := L^{-1}(s)[d_f]. \end{cases} \quad (20)$$

进而, 定义增广信号

$$y_a := M(s)L(s)k_M^{-1}[\hat{k}_p(L^{-1}(s)[v_{n^*-1}] - v_0) + z_0], \quad (21)$$

定义辅助误差信号分别为

$$e_0 := e - y_a, \quad (22)$$

及

$$\begin{cases} e_i = -F^{-2}(\tau s)[v_{i-1}] + L_i^{-1}(s)[v_i], \\ i = 1, 2, \dots, n^* - 1, u_{vs} = v_{n^*-1}, \end{cases} \quad (23)$$

其中 $\hat{k}_p$ 为 k_p 的估计值, 将通过调参律得到; $v_0, \dots, v_{n^*-1}$ 为式(21)或(23)所定义的各子系统的变结构控制律; z_0 是规范信号(normalizing signal^[10]), 其具体形式将在下一小节中给出; 平均值滤波器^[3] $F^{-2}(\tau s) := (\tau s + 1)^{-2}$, 这里 τ 是一个小的正常数. 将式(18)(21)代入式(22)有

$$e_0 = M(s)L(s)k_M^{-1}[k_p(\bar{\theta}^T \bar{\omega} + d_L) + (k_p - \hat{k}_p)L^{-1}(s)[u_{vs}] + \hat{k}_p v_0 - z_0] + \bar{\varepsilon}. \quad (24)$$

注2 式(21)与文献[2~4]增广信号的主要区别

是: 引入了规范信号 z_0 及对 $\hat{k}_p$ 的调参律.

辅助误差和跟踪误差之间有如下关系:

引理1^[11] 令 $e, y_a, e_0, e_i (i = 1, \dots, n^* - 1)$ 分别由式(18)(21)~(23)定义, 则

$$L^{-1}(s)[v_{n^*-1}] = \sum_{i=1}^{n^*-1} \Omega_{(i-1)}^{-1}(s) F^{-2(n^*-1-i)}(\tau s)[e_i] + F^{-2(n^*-1)}(\tau s)[v_0(t)]; \quad (25)$$

跟踪误差满足

$$\begin{aligned} e = e_0 + \sum_{i=1}^{n^*-1} M(s)L(s)k_M^{-1} \times [\hat{k}_p(\Omega_{(i-1)}^{-1}(s) \cdot \\ F^{-2(n^*-1-i)}(\tau s)[e_i]) + M(s)L(s)k_M^{-1}[z_0] + \\ M(s)L(s)k_M^{-1}[\hat{k}_p((F^{-2(n^*-1)}(\tau s) - 1)[v_0])], \end{aligned} \quad (26)$$

其中 $\Omega_i^{-1}(s) := \prod_{j=1}^i L_j^{-1}(s)$, $\Omega_0^{-1}(s) := 1$, $L_j(s)$ 由式(19)定义.

现将式(25)代入式(24)有

$$e_0 = M(s)L(s)k_M^{-1}[k_p(\bar{\theta}^T \bar{\omega} + d_L + \pi + v_0) + \bar{k}_p \eta_0 - z_0] + \bar{\varepsilon}, \quad (27)$$

其中

$$\bar{k}_p := k_p - \hat{k}_p,$$

$$\eta_0 = (F^{-2(n^*-1)}(\tau s) - 1)[v_0],$$

$$\pi = (1 - \frac{\hat{k}_p}{k_p}) \sum_{i=1}^{n^*-1} \Omega_{(i-1)}^{-1}(s) F^{-2(n^*-1-i)}(\tau s)[e_i]. \quad (28)$$

为简化分析, 选 $M(s)L(s) = k_M/(s + \lambda_0)$, $\lambda_0 > 0$, 则式(27)可写成

$$\begin{aligned} \dot{e}_0 = -\lambda_0 e_0 + k_p(\bar{\theta}^T \bar{\omega} + d_L + \pi + v_0) + \\ \bar{k}_p \eta_0 + z_0 + \varepsilon, \end{aligned} \quad (29)$$

这里 ε 为指数衰减函数.

高频增益符号已知时的变结构律设计: 本节讨论高频增益符号已知时的变结构律设计. 文献[3, 4]的一个主要缺点是总有一个辅助误差不能收敛到零, 且其上界无法估计. 这使得在高频增益符号未知时无法构造监控函数. 为保证每一辅助误差均收敛到零, 有

定理2 令 VS-MRAC 系统由式(18)~(23)及(29)给出且满足假设 A1)~A3)及 A5). 假设 k_p 的符号已知. 令式(29)和(23)的控制信号分别定义为

$$\begin{cases} v_0 = -f_0 \operatorname{sgn} e_0, (k_p > 0), \\ f_0 := (\beta_0 \|\bar{\omega}\| + \bar{d}_L + \bar{\pi} + \Delta_0), \\ z_0 = \gamma_0 \eta_0^2 e_0, \end{cases} \quad (30)$$

及

$$\begin{cases} v_i = -f_i \operatorname{sgn} e_i, \\ f_i := |F^{-2}(\tau s)L_i(s)[v_{i-1}] + \Delta_i|, i = 1, \dots, n^* - 1, \\ v_{n^*-1}^* = u_{vs}. \end{cases} \quad (31)$$

其中: β_0 为 $\|\bar{\theta}\|$ 的一个上界, $\gamma_0 > 0$ 为设计常数, $\bar{d}_L, \pi$ 分别满足不等式 $|d_L| \leq \bar{d}_L$, $|\pi| \leq \bar{\pi}$, Δ_0 和 Δ_i 可以是任意小的正常数. 令调参律

$$\dot{\hat{k}}_p = \begin{cases} \eta_0 e_0 / \sigma, & \text{若 } \underline{k}_p < \hat{k}_p < \bar{k}_p, \text{ 或 } \hat{k}_p = \bar{k}_p, \\ & \text{且 } (\eta_0 e_0) \leq 0, \text{ 或 } \hat{k}_p = \underline{k}_p, \\ & \text{且 } (\eta_0 e_0) \geq 0, \\ 0, & \text{其他情形.} \end{cases} \quad (32)$$

这里: η_0 由式(28)定义; $\bar{k}_p$ 和 $\underline{k}_p$ 分别表示 k_p 的上界和下界, $\bar{k}_p, \underline{k}_p$ 大于零; $\sigma > 0$ 为设计常数. 进而, 令 $\zeta := (\tau + \tau/\sqrt{\gamma_0} + \sqrt{\gamma_0})(\tau > 0, \gamma_0 > 0)$. 则存在一个 ζ^* , 使得对每个给定的 $\zeta \in (0, \zeta^*)$,

1) 闭环系统所有信号一致有界; e_0 渐进趋向于零、 e_i 在有限时间内收敛到零;

2) 跟踪误差 e 收敛到一个与 τ 成正比的残集内.

注3 由假设A1) 知, β_0, k_p 的上界和下界是可以预先得到的; 而 π 只要注意到假设A1) 及式(28) 中 e_i 均可测量即可.

定理2的证明需要如下引理:

引理2 设 $e_0, e_i \in L_\infty, \hat{k}_p$ 满足式(32) 且

$$\eta_0 e_0 \in L_2, \quad \|\eta_0 e_0\|_2 \leq c/\sqrt{\gamma_0}, \quad (33)$$

这里 γ_0 和 η_0 分别由式(30) 及(28) 定义(在本文的讨论中, 若不作特别说明, 总假定 c 一般地表示一个与 τ 和 γ_0 无关的正常数). 则

1) 如下不等式成立:

$$\|e(t)\| \leq c + c(\tau + \tau/\sqrt{\gamma_0} + \sqrt{\gamma_0}) \|\bar{w}_i\|_\infty, \quad (34)$$

这里范数 $\|(\cdot)_i\|_\infty$ 定义为^[9]

$$\|x_i\|_\infty := \sup_{\zeta \leq i} \|x(\zeta)\|; \quad (35)$$

2) 存在一个 ζ^* , 使得对每个给定的 $\zeta \in (0, \zeta^*)$, ω 一致有界, ζ 由定理2 给出(证明参见附录).

定理2 的证明

1) 定义 Lyapunov 函数

$$V_0 = \frac{1}{2} e_0^2 + \frac{1}{2} \sigma \hat{k}_p^2, \quad (36)$$

沿式(29) 的解对 V_0 微分得

$$\begin{aligned} \dot{V}_0 = & -\lambda_0 e_0^2 + k_p(\bar{\theta}^T \bar{\omega} + d_L + \pi + v_0) e_0 + \\ & \hat{k}_p(-\sigma \hat{k}_p + \eta_0 e_0) + \varepsilon e_0 - z_0 e_0. \end{aligned} \quad (37)$$

考虑三角不等式:

$$\varepsilon e_0 \leq c_\varepsilon e_0^2/2 + \varepsilon^2/2c_\varepsilon, \quad (38)$$

其中 c_ε 为任意正常数. 故存在 c_ε , 使得

$$\lambda_0 - c_\varepsilon/2 := \bar{\lambda}_0 > 0, \quad (39)$$

这里 $\bar{\lambda}_0$ 为正常数, 由设计者给出. 将式(30) (32) 代入式(37) 并考虑到式(38) 和(39) 后有

$$\dot{V}_0 \leq -\bar{\lambda}_0 e_0^2 - \gamma_0 (\eta_0 e_0)^2 + \varepsilon^2/2c_\varepsilon. \quad (40)$$

对上式两端积分得到

$$\begin{aligned} V_0(t) + \bar{\lambda}_0 \int_0^t e_0^2 d\zeta + \gamma_0 \int_0^t (\eta_0 e_0)^2 d\zeta \leq \\ V_0(0) + \frac{1}{2c_\varepsilon} \int_0^t \varepsilon^2 d\zeta. \end{aligned} \quad (41)$$

因 ε 指数衰减, 由上式立即可有

$$e_0 \in L_2 \cap L_\infty, \eta_0 e_0 \in L_2, \quad \|\eta_0 e_0\|_2 \leq c/\sqrt{\gamma_0}, \quad (42)$$

其中常数 c 仅依赖于 $V_0(0)$ 和 ε . 另一方面, 直接利用文献[4] 之引理1, 式(23) 中子系统在控制律

(31) 作用下满足:

$$e_i(t) \text{ (在有限时间内)} \rightarrow 0 (i = 1, \dots, n^* - 1). \quad (43)$$

引理2 已证明, 若 $e_0, e_i \in L_\infty, \hat{k}_p$ 满足式(32), $\|\eta_0 e_0\|_2 \leq c/\sqrt{\gamma_0}$ 以及当选择 $\zeta \in (0, \zeta^*)$ ($\tau > 0$, $\gamma_0 > 0$) 时 ω , 从而, 所有信号一致有界. 特别, 由式(29) 并注意到所有信号一致有界, 我们有 $\dot{e}_0 \in L_\infty$. 而 $\dot{e}_0 \in L_\infty$ 和 $e_0 \in L_2 \cap L_\infty$ 表明 e_0 渐进趋于零, 见文献[6, p85, Barbalat Lemma].

2) 考虑式(26). 由于 e_0 渐进趋向于零, 所有信号一致有界, 故 $z_0 \rightarrow 0, M(s)L(s)k_M^{-1}[z_0] \rightarrow 0$, 这里, z_0 由式(30) 定义. 已证明 $e_i (i = 1, \dots, n^* - 1)$ 在有限时间内收敛到零, 故仅需考虑式(26) 中 $M(s)L(s)k_M^{-1}[\hat{k}_p((F^{-2(n^*-1)}(\tau s) - 1)[v_0])]$ 一项(参见附录式A.3) 即可. 而根据附录中的式(A.4) (A.5), 并注意到它们分别对应于式(A.3) 中的1, 2 两项, 则当 $t \rightarrow \infty$ 时就有 $|e| \rightarrow c\tau$. 证毕.

高频增益符号未知时的变结构律设计: 本节讨论高频增益符号未知时的切换控制方案. 首先确定哪些信号必须切换. 由式(29) 知, 控制信号 v_0 需根据对 k_p 符号的估计来决定; 由式(21), $\hat{k}_p$ 是 k_p 的估计值, 应与 k_p 有相同的符号. 而式(23) 定义的各子系统与 k_p 的符号无直接联系. 因此, 需要对 $\hat{k}_p$ 和 v_0 进行切换. 此外, 在高频增益符号未知的情况下, 为保持调参过程平稳, 式(32) 中的常数 σ 将被如下微分方程的解所代替:

$$\begin{cases} \dot{\sigma}(t) = -2\bar{\lambda}_0 \sigma(t) + \gamma, \sigma(t_k) = \sigma(t_0) > \gamma/2\bar{\lambda}_0, \\ t \in [t_k, t_{k+1}), k = 0, 1, 2, \dots; t_0 := 0, \end{cases} \quad (44)$$

这里 $\bar{\lambda}_0$ 由式(39) 给出, γ 是一个正常数, t_k 为切换时间, 将在后面定义. 当满足式(44) 的初始条件时, σ 单调递减且当 $t_{k+1} \rightarrow \infty$ 时趋于 $\gamma/2\bar{\lambda}_0$. 式(44) 还表明, 对于每次切换, 初始条件 $\sigma(t_k)$ 均应被复位(即切换到初始值 $\sigma(t_0)$). 令

$$v_0 = \begin{cases} v_0^+ = -f_0 \operatorname{sgn} e_0, & \text{若 } t \in T^+, \\ v_0^- = -f_0 \operatorname{sgn} e_0, & \text{若 } t \in T^-, \end{cases} \quad (45)$$

及

$$\hat{k}_p = \begin{cases} \hat{k}_p^+, & \text{若 } t \in T^+, \\ \hat{k}_p^-, & \text{若 } t \in T^-. \end{cases} \quad (46)$$

这里 f_0 由式(30) 定义; 集合 T^+ 和 T^- 满足 $T^+ \cup$

$T^- = [0, \infty]$ 及 $T^+ \cap T^- = \emptyset$ 且 T^+, T^- 均可表示为式(44)所定义区间的并集; $(v_0^+, \hat{k}_p^+)$ 和 $(v_0^-, \hat{k}_p^-)$ 分别对应于 $\text{sgn } k_p > 0$ 和 $\text{sgn } k_p < 0$.

定义 1 在 $t = t_k$ 时刻 $v_0, \hat{k}_p$ 和 σ 的切换定义为: v_0 从 v_0^+ 切换到 v_0^- (或从 v_0^- 到 v_0^+), 同时, $\hat{k}_p^+$ 切换到 $\hat{k}_p^-(t_k) = \hat{k}_p^-(t_0)$ (或 $\hat{k}_p^-(t)$ 到 $\hat{k}_p^+(t_k) = \hat{k}_p^+(t_0)$), 而 σ 按式(44)进行切换, 这里, $\hat{k}_p^+(t_0)$ 和 $\hat{k}_p^-(t_0)$ 为 $\hat{k}_p(t)$ 的初始值, 即每次切换后 $\hat{k}_p$ 将首先被复位.

在定义 1 下的调参律修改为:

$$\dot{\hat{k}}_p \text{ 与式(32)形式相同,} \quad (47)$$

但当 $t \in T^+$ 时 $\bar{k}_p, k_p$ 大于零, 当 $t \in T^-$ 时 $\bar{k}_p, k_p$ 小于零; 且将(32)中的 σ 换成方程(44)的解.

进而讨论监控函数的构造和切换律的设计. 为此, 类似于式(36), 定义拟 Lyapunov 函数 (因 σ 是变量, 式(48)中 V_0 不是严格意义上的 Lyapunov 函数[10, p117]):

$$V_0(t) = \frac{1}{2}e_0^2(t) + \frac{1}{2}\sigma(t)\bar{k}_p^2(t), \quad (48)$$

基于(48), 切换律按以下步骤设计:

Step 1 设 $\bar{t}_0 \geq 0$ 后 k_p 的符号被正确估计且无切换. 易于验证, 当式(36)用式(48)代替之后不等式(41)亦成立:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}e_0^2(t) + \frac{1}{2}\sigma(t)\bar{k}_p^2(t) + \bar{\lambda}_0 \int_{\bar{t}_0}^t e_0^2 d\zeta + \\ & \gamma_0 \int_{\bar{t}_0}^t (\eta_0 e_0)^2 d\zeta \leq \\ & V_0(\bar{t}_0) + \frac{1}{2c_\varepsilon} \int_{\bar{t}_0}^t \varepsilon^2 d\zeta, \quad \forall t \geq \bar{t}_0. \end{aligned} \quad (49)$$

因 ε 指数衰减至零, 令其满足如下不等式

$$\varepsilon \leq c_\delta \exp(-\delta t), \quad \forall t \geq 0, \quad (50)$$

这里 δ 和 c_δ 均为未知正常数. 则对所有 $t \geq \bar{t}_0$,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}e_0^2 + \bar{\lambda}_0 \int_{\bar{t}_0}^t e_0^2 d\zeta + \gamma_0 \int_{\bar{t}_0}^t (\eta_0 e_0)^2 d\zeta \leq \\ & \bar{V}_0(\bar{t}_0) + c_1 \exp(-2\delta \bar{t}_0), \end{aligned} \quad (51)$$

其中,

$$c_1 := c_\delta^2 / 4c_\varepsilon \delta, \quad (52)$$

$$\bar{V}_0(t) := \frac{1}{2}e_0^2(t) + \frac{1}{2}\sigma(t)\bar{c}_p^2, \quad (53)$$

这里常数 $\bar{c}_p$ 满足 $|k_p| \leq \bar{c}_p$. 由假设 A1) 知 $\bar{c}_p$ 是可以得到的. 比较式(53)和(48)有

$$V_0(t) \leq \bar{V}_0(t). \quad (54)$$

$\bar{V}_0$ 和 V_0 的不同之处是: $\bar{V}_0$ 可测量, 而 V_0 不能.

因 ε 未知, 与 $n^* = 1$ 时监控函数 φ_k 的构造原理相同 (参见式(16)), 考虑如下监控函数

$$\begin{cases} \psi_k(t) := \bar{V}_0(t_k) + (k+1)\exp(-2\delta_k t_k), \\ t \in [t_k, t_{k+1}), k = 0, 1, 2, \dots; t_0 := 0. \end{cases} \quad (55)$$

为了得到式(55), 我们将不等式(51)中的 c_1 和 δ 分别换成了正整数 $k+1$ 及满足式(17)的序列 δ_k . 这意味着存在一个有限的 k 使得 $k+1 > c_1$ 及 $\exp(-2\delta t) < \exp(-2\delta_k t)$. $\psi_k(t)$ 的有界性可保证系统的稳定性.

Step 2 ψ_k 的缺点是对于给定的 t_k, ψ_k 中的常数项 $\bar{V}_0(t_k)$ 会因为 $\bar{c}_p$ 和 $\sigma(t_k)$ 取值大而较大, 到下一次切换的等待时间可能会过长, 导致过渡过程变长. 作为式(55)的补偿, 我们引入另一监控函数. 为此, 沿(29)(44)的解对 V_0 微分, 有

$$\begin{aligned} \dot{V}_0 & \leq -2\bar{\lambda}_0 V_0 + \gamma \bar{k}_p^2 / 2 + k_p (\bar{\theta}^T \bar{\omega} + d_L + \pi + v_0) e_0 + \\ & \bar{k}_p (-\sigma \dot{\bar{k}}_p + \eta_0 e_0) + \varepsilon^2 / 2c_\varepsilon - z_0 e_0, \quad \forall t \geq \bar{t}_0, \end{aligned} \quad (56)$$

其中利用了式(38)和(39). 式(56)启发我们考虑如下微分方程:

$$\begin{cases} \dot{\xi}_0 = -2\bar{\lambda}_0 \xi_0 + \gamma \bar{k}_p^2 / 2 + \varepsilon^2 / 2c_\varepsilon, \\ \xi_0(\bar{t}_0) = V_0(\bar{t}_0). \end{cases} \quad (57)$$

将式(30)(47)代入式(56), 易见, 若正确估计了 k_p 的符号, 则有

$$\dot{V}_0(t) \leq \dot{\xi}_0(t), \quad \forall t \geq \bar{t}_0. \quad (58)$$

利用微分方程比较引理^[7, p214] 并注意到 $\xi_0(\bar{t}_0) = V_0(\bar{t}_0)$, 有 $V_0(t) \leq \xi_0(t)$. 故式(57)的解应满足

$$\begin{cases} V_0(t) \leq \xi_0(t) \leq \exp[-2\bar{\lambda}_0(t - \bar{t}_0)] \xi_0(\bar{t}_0) + \\ c_2 \exp(-2\delta t) + \gamma \bar{c}_p^2 / 4\bar{\lambda}_0, \\ \xi_0(\bar{t}_0) = V_0(\bar{t}_0), \quad \forall t \geq \bar{t}_0, \end{cases} \quad (59)$$

其中用到了式(50)及不等式 $|k_p| \leq \bar{c}_p$,

$$c_2 := c_\delta^2 / [2c_\varepsilon(\bar{\lambda}_0 - \delta)], \quad (60)$$

这里令 $\delta < \bar{\lambda}_0$, 因为一个较小的 δ 只会使式(50)更保守. 由于 $V_0(t)$ 不能通过测量得到, 类似于式(53), 定义

$$\underline{V}_0(t) := \frac{1}{2}e_0^2(t) + \frac{1}{2}\sigma(t)\underline{c}_p^2, \quad (61)$$

其中 $\underline{c}_p \leq |k_p|$, 且由注 3 知其是可以得到的. 根据式

(59)(61)及 $\sigma(t) > 0, \xi_0(\bar{t}_0) = V_0(\bar{t}_0) \leq \bar{V}_0(\bar{t}_0)$ 的事实, 有

$$\begin{aligned} \underline{V}_0(t) & \leq V_0(t) \leq \exp[-2\bar{\lambda}_0(t - \bar{t}_0)] \bar{V}_0(\bar{t}_0) + \\ & c_2 \exp(-2\delta t) + \gamma \bar{c}_p^2 / 4\bar{\lambda}_0, \quad \forall t \geq \bar{t}_0. \end{aligned} \quad (62)$$

基于式(62),与式(55)相类似,可构造第2个监控函数如下:

$$\vartheta_k(t) := e^{-2\lambda_0(t-t_k)} \bar{V}_0(t_k) + (k+1)e^{-2\delta_k t} + \gamma \bar{c}_p^2 / 4\bar{\lambda}_0, \\ t \in [t_k, t_{k+1}), k = 0, 1, 2, \dots; t_0 := 0, \quad (63)$$

其中 $\delta_k (\delta_k < \bar{\lambda}_0)$ 满足式(17).

Step 3 现在讨论切换律的设计. 由式(55)(63),在时刻 $t = t_k$,如下两式总成立:

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{2} e_0^2(t) + \bar{\lambda}_0 \int_{t_k}^t e_0^2 d\zeta + \gamma_0 \int_{t_k}^t (\eta e_0)^2 d\zeta \right) |_{t=t_k} = \\ e_0^2(t_k)/2 < \psi_k(t_k), \\ \underline{V}_0(t_k) < \vartheta_k(t_k). \end{cases} \quad (64)$$

再注意到 e_0 是绝对连续函数^[7],故 v_0 及 $\hat{k}_p$ 和 σ 的如下切换是适定的:

$$t_{k+1} = \begin{cases} \min \{ t > t_k : \frac{1}{2} e_0^2(t) + \bar{\lambda}_0 \int_{t_k}^t e_0^2 d\zeta + \\ \gamma_0 \int_{t_k}^t (\eta_0 e_0)^2 d\zeta = \psi_k(t) \\ \text{或 } \underline{V}_0(t) = \vartheta_k(t) \}, \text{若此最小值存在;} \\ +\infty, \quad \text{其他情形.} \end{cases} \\ k = 0, 1, \dots. \quad (65)$$

显然,由式(64)和(65)可知,仅当

$$\left(\frac{1}{2} e_0^2(t) + \bar{\lambda}_0 \int_{t_k}^t e_0^2 d\zeta + \gamma_0 \int_{t_k}^t (\eta e_0)^2 d\zeta \right) \text{或 } \underline{V}_0(t)$$

的值增加并最终与 ψ_k 或 ϑ_k 的轨线相交时新的切换才发生. 由于 ϑ_k 按指数衰减、 ψ_k 逐段常值,若单独用 ψ_k 作为切换的判据,有可能导致下一次切换的等待时间过长,恶化过渡过程品质.

下面介绍 $n^* > 1$ 时的主要结果.

定理3 设 VS-MRAC 系统由式(18)~(23)及(29)定义且满足假设 A1)~A5). 控制律 v_0, z_0 及 $v_i (i = 1, 2, \dots, n^* - 1)$ 分别由式(45)(30)及(31)定义;调参律由式(47)给出. v_0 及 $\hat{k}_p, \sigma$ 的切换时间由式(65)定义,其切换由定义1给出. 则存在一个 ζ^* ,使得对任意给定的 $\zeta \in (0, \zeta^*) (\zeta := (\tau + \tau/\sqrt{\gamma_0} + \sqrt{\gamma_0}), \tau > 0, \gamma_0 > 0)$,

1) 经至多有限次切换后 v_0 及 $\hat{k}_p, \sigma$ 将停止切换. 闭环系统所有信号一致有界. 进而, e_0 渐进趋向于零, $e_i (i = 1, 2, \dots, n^* - 1)$ 在有限时间收敛到零;

2) 跟踪误差 e 收敛到一个与 τ 成正比的残集内.

证 1) 反证法. 设 v_0 及 $\hat{k}_p, \sigma$ 不停止切换. 因为 v_0 及 $\hat{k}_p$ 的切换只有两种选择: $(v_0^+, \hat{k}_p^+)$ 或 $(v_0^-, \hat{k}_p^-)$, 则在至多 k 次切换之后, v_0 及 $\hat{k}_p$ 将有正确的符号,即当 $k_p > 0$ 时有 $v_0 = v_0^+, \hat{k}_p = \hat{k}_p^+$ 或者 $k_p < 0$ 时有 $v_0 = v_0^-, \hat{k}_p = \hat{k}_p^-$, 且对 $\forall t > t_k$,

$$\begin{aligned} c_1 &< (k+1), \\ c_2 &< (k+1), \\ e^{-2\delta_k t} &< e^{-2\delta_k t}, \end{aligned} \quad (66)$$

这里,常数 c_1, c_2 分别由式(52)和(60)定义. 于是,根据式(51) (t_0 由 t_k 代替)并考虑到式(55)和(66),对 $\forall t > t_k$,有

$$\frac{1}{2} e_0^2 + \bar{\lambda}_0 \int_{t_k}^t e_0^2 d\zeta + \gamma_0 \int_{t_k}^t (\eta_0 e_0)^2 d\zeta < \psi_k(t); \quad (67)$$

同理,根据式(62) (t 由 t_k 代替)并考虑到式(63)和(66),有

$$\underline{V}_0(t) < \vartheta_k(t), \forall t > t_k. \quad (68)$$

由式(65),不等式(67)和(68)意味不再会有切换产生,矛盾. 由于所有闭环信号均属于 L_∞ ,对有限次切换, $\psi_k(t), \vartheta_k$ 必定有界且独立于 τ 和 γ_0 . 特别,式(67)蕴涵 $e_0 \in L_2 \cap L_\infty$ 及 $\|\eta_0 e_0\|_2 \leq c/\sqrt{\gamma_0}$.

$e_i \rightarrow 0 (i = 1, \dots, n^* - 1)$ 及 $\hat{k}_p \in L_\infty$ 的证明与定理2相同,略去. 最后,根据引理2,存在 ζ^* ,使得对每个给定的 $\zeta \in (0, \zeta^*) (\tau > 0, \gamma_0 > 0)$, ω 一致有界,由此可推得所有闭环信号一致有界. 进而,由式(29),有 $e_0 \in L_\infty$;再结合 $e_0 \in L_2 \cap L_\infty$,就有 e_0 渐进趋向于零,见文献[6, p85, Barbalat Lemma].

2) 证明与定理2相应部分相同. 证毕.

与 $n^* = 1$ 时相同, $n^* > 1$ 时有:

推论3 若 $\varepsilon = 0$,则至多只需要一次切换.

证 $\varepsilon = 0$ 意味一旦在 $t = t_k$ 时刻正确估计了 k_p 的符号,则对 $\forall t > t_k$,式(51)和(62) (t_0 由 t_k 代替)分别满足:

$$\frac{1}{2} e_0^2 + \bar{\lambda}_0 \int_{t_k}^t e_0^2 d\zeta + \gamma_0 \int_{t_k}^t (\eta_0 e_0)^2 d\zeta \leq \bar{V}_0(t_k) < \psi_k, \quad (69)$$

及

$$\underline{V}_0 \leq e^{-2\lambda_0(t-t_k)} \bar{V}(t_k) + \gamma \bar{c}_p^2 / 4\bar{\lambda}_0 < \vartheta_k, \quad (70)$$

其中用到了式(55)和(63), t_k 为任意有限时刻. 以上不等式表明不会再有任何切换产生. 因此,若在 $t_0 = 0$ 时刻正确估计了 k_p 的符号则无切换;反之,只需一次切换. 证毕.

4 数值仿真结果 (Simulation results)

考虑如下相对阶为2的被控对象:

$$G_p(s) = -4/(s^2 - 0.6s - 2), \quad (71)$$

其中 $x(0) = [0.5, 0.5]^T$ 为其能控标准形实现的初始条件. 本例中, $\text{sgn } k_p < 0$. 参考模型为

$$M(s) = 2/(s + 2)^2. \quad (72)$$

控制系统的结构由式(18)~(23)给出. 式(19)选为 $L(s) = s + 2$. 输入/输出滤波器的参数选 $\Lambda = -2, g = 1$. $\hat{\theta}$ 取 $\hat{\theta} = [0.2, 1, -1, -1]^T$ ($\theta^* = [-0.5, 4.49, -4.6, -3.68]^T$). 设 $k_p \in [-5, -0.1] \cup [0.1, 5]$. 平均值滤波器的时间常数取为 $\tau = 0.03$. 调参律由式(47)给出且由定义1, 取 $\hat{k}_p^+(t_k) = \hat{k}_p^+(0) = 3$ 及 $\hat{k}_p^-(t_k) = \hat{k}_p^-(0) = -3$. 微分方程(44)的系数取 $\bar{\lambda}_0 = -1.8$; 此外, 常数 $\gamma = 0.1$, 每一次切换的初始值取为 $\sigma(t_k) = \sigma(0) = 0.5$. 监控函数 ψ_k 和 ϑ_k 由(55)和(63)给出, 且令 $\delta_k := 1/(k + 1)$. 取 $v_0 = v_0^+$ 及 $\hat{k}_p = \hat{k}_p^+(0)$, 即 $t = 0$ 时刻我们对 k_p 的符号给出了一个错误的估计. 为了避免抖动现象产生, 仿真中将式(45)(31)中的符号函数 $\text{sgn } x$ 用 $x/(|x| + 0.001)$ 代替. 规范信号 z_0 (参见式(30))的设计参数选为 $\gamma_0 = 0.01$. 参考信号 r 为幅值为1, 频率2 rad/s的方波. 干扰信号 $d = \sin(0.5t)$. 由图1可见, 经过一次切换后, 跟踪误差迅速收敛到一个残集内. 现对仿真结果讨论如下:

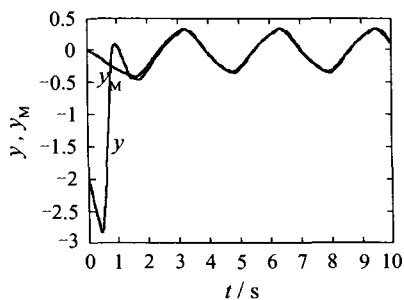


图1 跟踪误差

Fig. 1 Tracking error

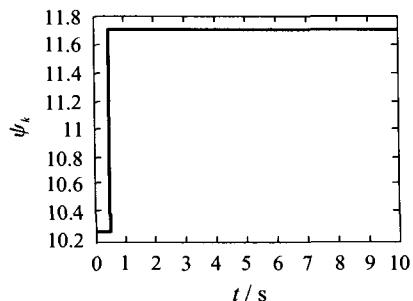


图2 监控函数 ψ_k

Fig. 2 Monitoring function ψ_k

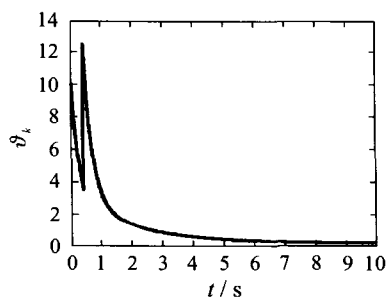


图3 监控函数 ϑ_k

Fig. 3 Monitoring function ϑ_k

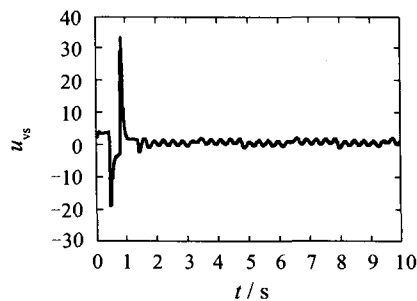


图4 变结构控制律 u_{vs}

Fig. 4 Variable structure control signal u_{vs}

1) 跟踪精度. 由定理2和定理3可知, 减小平均值滤波器的时间常数 τ 可提高系统的跟踪精度. 但由式(31)(19), τ 过小将使得控制具有微分性质, 使控制幅度增大. 因此, 设计过程中应在跟踪精度与控制幅度间进行适当权衡.

2) k_p 的估计. 采用本文的调参律一般不能保证 $\hat{k}_p$ 收敛到真值 k_p , 这与其它参数自适应控制系统的结果类似^[10, p387]. 本例中, $\hat{k}_p$ 仅收敛到 k_p 的附近.

3) 初始状态 $\sigma(t_k)$ 和常数 γ . 恰当选择微分方程(44)的初始状态 $\sigma(t_k)$ 及常数 γ , 可保证 $\hat{k}_p$ 在切换环境中变化平稳, 如图5所示. 这是引入方程(44)的原因.

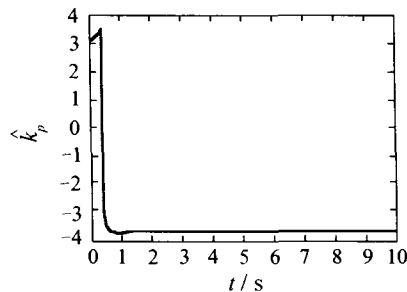


图5 $\hat{k}_p$

Fig. 5 $\hat{k}_p$

5 结论 (Conclusion)

就相对阶大于1的被控对象, 本文提出了一种基于监控函数的控制信号切换律, 从而将文[5]的

结果推广到了任意相对阶的一般情形。我们证明,在监控函数的监测下,相关控制信号经过至多有限次切换后将停止切换,跟踪误差将收敛到一个残集内且该残集可随平均值滤波器的时间常数减小而变得任意小;特别,若系统某些初始条件为零,至多只需要一次切换系统即可稳定。

参考文献(References):

- [1] HSU L, COSTA R R. Variable structure model reference adaptive control using only input and output measurements-Part I [J]. *Int J Control*, 1989, 49(2): 399-416.
- [2] HSU L. Variable structure model reference adaptive control using only I/O measurement: General case [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, AC-35, 11: 1238-1243.
- [3] HSU L, ARAUJO A D, COSTA, R R. Analysis and design of I/O based variable structure adaptive control [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1994, 39(1): 4-21.
- [4] HSU L, LIZARRALDE F, ARAUJO A D. New results on output-feedback variable structure model-reference adaptive control: Design and stability analysis [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1997, 42(3): 386-393.
- [5] LIN Y, HSU L, COSTA R R, LIZARRALDE F. Variable structure model reference adaptive control for systems with unknown high frequency gain [C]// *The 42th IEEE Conf on Decision and Control*, Maui, Hawaii USA; [s. n.], 2003.
- [6] NARENDRA K S, ANNASWAMY A M. *Stable Adaptive Control* [M]. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice Hall, 1989.
- [7] FILIPPOV A F. Differential equations with discontinuous right-hand side [J]. *Amer Math Soc Translations*. 1964, 42(2): 199-231.
- [8] SASTRY S S, BODSON M. *Adaptive Control: Stability, Convergence and Robustness* [M]. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1989.
- [9] DESSER C A, VIDYASAGAR M. *Feedback Systems: Input-Output Properties* [M]. New York: Academic Press, 1975.
- [10] IOANNOU P A, SUN J. *Robust Adaptive Control* [M]. Upper Saddle River, New Jersey: Prentice Hall, 1996.
- [11] LIN Y, MAO J. A robust VS-MRAC using switching scheme for the gain of control variables [J]. *Int J Control*, 2001, 74(3): 225-238.

附录(Appendix)

引理2的证明:

1) 由于 $e_0, e_i \in L_\infty, \hat{k}_p \in L_\infty$ 及式(26)中的传递函数均严格正则且稳定,为了得到式(34),只需考虑式(26)中如下两项:

$$M(s)L(s)k_M^{-1}[\hat{k}_p((F^{-2(n^*-1)}(\tau s) - 1)[v_0])], \quad (A.1)$$

及

$$M(s)L(s)k_M^{-1}[z_0]. \quad (A.2)$$

将式(A.1)写成

$$\begin{aligned} M(s)L(s)k_M^{-1}[\hat{k}_p(F^{-2(n^*-1)}(\tau s)[v_0]) - \hat{k}_p v_0] = \\ M(s)L(s)k_M^{-1}[(F^{-2(n^*-1)}(\tau s)[\hat{k}_p v_0] - \hat{k}_p v_0)] + \end{aligned}$$

$$\underbrace{M(s)L(s)k_M^{-1}[\hat{k}_p(F^{-2(n^*-1)}(\tau s)[v_0]) - F^{-2(n^*-1)}(\tau s)[\hat{k}_p v_0]]}_2 \quad (A.3)$$

可验证,式(A.3)的第1项满足

$$\begin{aligned} |M(s)L(s)k_M^{-1}[(F^{-2(n^*-1)}(\tau s)[\hat{k}_p v_0]) - \hat{k}_p v_0]| \leq \\ \tau c(1 + \|\bar{\omega}_i\|_\infty); \end{aligned} \quad (A.4)$$

对式(A.3)的第2项利用交换引理(Swapping Lemma [9, p141]),式(51)及文献[10]之引理3.3.2,可以推出

$$\begin{aligned} |k_M^{-1}M(s)L(s)H_c(s)[(H_b(s)[v_0])\hat{k}_p]| \leq \\ c\|M(s)L(s)\|_2\|H_c(s)[(H_b(s)[v_0])\eta_0 e_0/\sigma]\|_2 \leq \\ c\frac{\tau}{\sqrt{\gamma_0}}(1 + \|\bar{\omega}_i\|_\infty), \end{aligned} \quad (A.5)$$

其中, $H_b(s) = (sI - A)^{-1}b$, $H_c(s) = -c^T(sI - A)^{-1}$, (A, b, c^T) 是 $F^{-2(n^*-1)}(\tau s)$ 的一个最小实现;此外用到了 $\|\eta_0 e_0\|_2$

独立于 τ 的假设、 $\|\eta_0 e_0\|_2 \leq c/\sqrt{\gamma_0}$ 及如下不等式:

$$\begin{aligned} \|1/(\tau s + 1)^i\|_\infty = \sup_\omega |1/(\tau j\omega + 1)^i| = 1, \\ \left\| \left(\frac{1}{(\tau s + 1)^{(2n^*-1-i)}}[v_0] \right) \right\|_\infty \leq \\ \|h_{(2n^*-1-i)}\|_1\|(v_0)_i\|_\infty = \|(v_0)_i\|_\infty. \end{aligned} \quad (A.6)$$

最后考虑式(A.2).将式(30)中 z_0 的表达式及式(28)中的 η_0 代入式(A.2),可验证有

$$\begin{aligned} \gamma_0|M(s)L(s)k_M^{-1}[(F^{-2(n^*-1)}(\tau s) - 1)[v_0])\eta_0 e_0]| \leq \\ \sqrt{\gamma_0}c(1 + \|\bar{\omega}_i\|_\infty), \end{aligned} \quad (A.7)$$

这里用到了文献[10]之引理3.3.2及式(33)中的假设 $\|\eta_0 e_0\|_2 \leq c/\sqrt{\gamma_0}$.

结合式(A.4)(A.5)及(A.7),并注意到它们分别对应于式(A.3)的1和2及式(A.2),就有式(34).

2) 根据式(6)(20),可将 $\bar{\omega}$ 表示成

$$\|\bar{\omega}(t)\| \leq c + c\|e_i\|_\infty. \quad (A.8)$$

将式(34)代入式(A.8)有

$$\begin{aligned} \|\bar{\omega}(t)\| \leq c + c(\tau + \tau/\sqrt{\gamma_0} + \sqrt{\gamma_0})\|\bar{\omega}_i\|_\infty = \\ c + c\zeta\|\bar{\omega}(t)\|_\infty. \end{aligned} \quad (A.9)$$

因此,存在一个 ζ^* ,使得对任意给定的 $\zeta \in (0, \zeta^*)$, $\bar{\omega}$ 一致有界.进而,由[6, p 482]不难证明

$$\|\bar{\omega}\| \leq c + c\|\omega_i\|_\infty. \quad (A.10)$$

即 ω 是一个正规信号(regular signal [8, p70]),故由[8, p140]之推论3.6.3, $\omega \in L_\infty$. 证毕.

作者简介:

林岩 (1955—),男,教授,主要研究领域为鲁棒与自适应控制, E-mail: linyanceez@yahoo.com.cn;

董文瀚 (1979—),男,博士研究生,研究方向为自适应控制;

孙秀霞 (1962—),女,教授,主要研究领域为鲁棒控制与故障检测.