

非线性倒立摆系统平衡点反馈控制参数的优化计算

侯祥林¹, 徐心和²

(1. 沈阳建筑大学 理学院, 辽宁 沈阳 110168; 2. 东北大学 信息科学与工程学院, 辽宁 沈阳 110004)

摘要: 本文基于圆轨倒立摆非线性系统模型, 建立了平衡点状态反馈控制参数的高精度优化算法, 编制计算程序确定出反馈控制参数, 并对圆轨倒立摆平衡点的实例控制. 与将系统线性化后的反馈参数的计算分析相比, 本文研究方法具有较大平衡范围. 仿真与实例平衡控制都表明了本文研究方法的可行性.

关键词: 非线性倒立摆系统; 状态反馈参数; 平衡点控制; 优化

中图分类号: TP273.2 **文献标识码:** A

Optimization of feedback control parameters of equilibrium point about nonlinear inverted pendulum

HOU Xiang-lin¹, XU Xin-he²

(1. School of Science, Shenyang Jianzhu University, Shenyang Liaoning 110168, China;

2. School of Information Science, Northeastern University, Shenyang Liaoning 110004, China)

Abstract: Based on circular-rail nonlinear inverted pendulum model, a optimization algorithm of feedback control parameters about equilibrium point is put forward. Control parameters are then programmed and computed. Circular-rail nonlinear inverted pendulum is practically controlled with computed parameters. Compared with feedback parameters of linearized system, large amplitude equilibrium scope can be obtained with this method. Finally, feasibility is indicated by simulation and practical application

Key words: non-linear inverted pendulum system; state feedback control parameters; equilibrium point control; optimization

1 引言(Introduction)

通常在对非线性系统平衡点状态反馈控制参数确定时, 都是将原系统在平衡点附近进行线性化处理, 基于现代控制理论, 建立反馈参数的定步长数值迭代计算过程^[1-5], 来获得状态反馈控制参数. 其结果表明, 确定的反馈控制参数只能在摆杆初始角度较小时(4°以下)能保证平衡控制. 当摆杆角度较大时, 不能保证平衡控制. 这样对摆起与平衡控制转接和随机扰动量较大时, 难于保证稳定平衡控制.

基于对倒立摆非线性问题研究的一些基本思想^[6-10], 本文直接对未线性化的倒立摆系统, 建立优化方法来确定平衡点状态反馈控制参数, 结果扩大了摆杆的初始角度(可以达到 10°), 在较大扰动下也可以实施平衡点控制.

2 非线性系统平衡控制状态反馈参数确定的优化算法(Optimization principle obtaining

state feedback parameters of equilibrium control for non-linear system)

2.1 求解平衡点状态反馈参数问题的提法 (Description of determining state feedback parameters problem of equilibrium control)

非线性系统状态方程和初始条件为:

$$\dot{\vec{x}} = f(\vec{x}, u, t) + u, \quad \vec{x}(t_0) = \vec{x}_0.$$

在有限时间 t_z 内, 将 $\vec{x}(t_0) = \vec{x}_0$ 状态转变为

$\vec{x}(t_z)$. 其中 $u = \sum_{i=1}^l K_i x_i$, 现在目的是确定变量 K_i , $i = 1, 2, \dots, l$. 无论采用开环控制^[6]或闭环控制^[7]实现倒立摆的摆起过程控制实现倒立摆摆起后, 都要进入到平衡控制阶段. 平衡控制通常采用状态反馈控制. 对于具有一个 N 个自由度非线性系统, 即状态变量为 $l = 2N$. 状态反馈可以表示为: $u = \sum_{i=1}^l K_i x_i$.

2.2 状态反馈参数优化问题的建立 (Establish optimizations about state feedback parameters)

反馈控制参数计算的基本思想是将某种偏离平衡点的状态,在状态反馈的控制作用下,逐步使得在有限时间内,将系统状态达到平衡点,这里直接对非线性系统进行状态反馈参数的确定,以保证状态反馈参数实现较大范围的控制。

设系统初始状态为 $\dot{\bar{x}}(t_0) = \dot{\bar{x}}_0$ 经过时间 t_z 在反馈控制作用下使状态转移到 $\dot{\bar{x}}(t_z) = 0$ 。若将时间 $[t_0, t_z]$ 分成 n 段,每段时间间隔为 $\Delta t = (t_z - t_0)/n$, 对应的控制律向量为 $u_i = \sum_{i=1}^l K_i x_{i,i} = K_1 x_{1,i} + K_2 x_{2,i} + \dots + K_l x_{l,i}, i = 1, 2, \dots, n$, 其中 $x_{1,i}, x_{2,i}, \dots, x_{l,i}, i = 1, 2, \dots, n+1$ 为状态变量。可以建立最优化问题

$$\min F(\bar{K}) . \quad (1)$$

若 $h_i[\bar{x}(t_z)] = 0, i = 1, 2, \dots, m$ 为第 i 的状态变量的 t_z 时刻的条件,则目标函数为: $F(\bar{K}) = \sum_{i=1}^m \{h_i[\bar{x}(t_z)]\}^2$, 设计变量为反馈参数 $\bar{K} = [K_1, K_2, \dots, K_l]^T, \bar{K} \in \mathbb{R}^l$, 系统状态方程可表示为:

$$\begin{cases} \dot{x}_{1,i+1} = f_1(x_{1,i}, x_{2,i}, \dots, x_{l,i}, K_1, K_2, \dots, K_l), \\ \dot{x}_{2,i+1} = f_2(x_{1,i}, x_{2,i}, \dots, x_{l,i}, K_1, K_2, \dots, K_l), \\ \dots \\ \dot{x}_{l-1,i+1} = f_{l-1}(x_{1,i}, x_{2,i}, \dots, x_{l,i}, K_1, K_2, \dots, K_l), \\ \dot{x}_{l,i+1} = f_l(x_{1,i}, x_{2,i}, \dots, x_{l,i}, K_1, K_2, \dots, K_l). \end{cases} \quad (2)$$

2.3 确定状态反馈参数目标函数的动态形成过程 (Dynamic accomplishment of objective function for determining state feedback parameters)

1) 给定系统参数和初始条件 $x_{i,1}, i = 1, 2, \dots, l$, 设置控制时间 t_z ;

2) 当给出控制量状态反馈未知参数 $K_1, K_2, \dots, K_l$, 通过状态方程(2)采用 R-K 方法^[10] 进行一步计算,由 $u_i = \sum_{i=1}^l K_i x_{i,1}, x_{i,1}, i = 1, 2, \dots, l$, 计算 $x_{i,2}, i = 1, 2, \dots, l$; 由 $u_k = \sum_{i=1}^l K_i x_{i,k}, x_{i,k}, i = 1, 2, \dots, l$, 计算 $x_{i,k+1}, i = 1, 2, \dots, l$; 由 $u_n = \sum_{i=1}^l K_i x_{i,n}, x_{i,n}, i = 1, 2, \dots, l$ 计算 $x_{i,n+1}, i = 1, 2, \dots, l$, 是 $K_1, K_2, \dots, K_l$ 的函数;

3) 由 2) 结果形成目标函数 $F(\bar{K}) =$

$$\sum_{i=1}^m (h_i(x_{i,n+1}(\bar{K})))^2.$$

2.4 优化计算中梯度函数的获得 (Computation of gradient function of optimization process)

目标函数 $F(\bar{K})$ 是 $K_1, K_2, \dots, K_l$ 复杂显函数, 具有繁琐嵌套关系, 同样梯度计算 $\text{grad}[F(\bar{K})] = [\frac{\partial F}{\partial K_1}, \frac{\partial F}{\partial K_2}, \dots, \frac{\partial F}{\partial K_l}]^T$ 采用一阶差商代替偏导数 $\frac{\partial f}{\partial K_j} \approx \frac{F(\bar{K}_j) - F(\bar{K})}{dK_j}, j = 1, 2, \dots, n$, 其中 $\bar{K} = [K_1, K_2, \dots, K_l]^T, \bar{K}_j = [K_1, K_2, \dots, K_j + dK_j, \dots, K_l]^T$. 当 dK_j 选择为适当值将会对梯度良好的逼近。

2.5 梯度优化算法确定平衡点反馈控制参数的程序段组成 (Program sections of gradient optimization method for computing feedback control parameters about equilibrium control)

计算程序包括: 梯度优化主程序; 一维搜索(进退法, 黄金分割法); 动态目标函数子段; R-K 子段; 梯度函数子段。

3 圆轨倒立摆非线性系统平衡控制状态反馈参数的计算分析实例 (Computing and analyzing example of state feedback parameters of equilibrium control about circular-rail nonlinear inverted pendulum system)

3.1 圆轨倒立摆非线性系统微分方程 (Differential equation of circular-rail inverted pendulum nonlinear system)

图1为圆轨倒立摆系统, 设 J_0 表示水平杆对 z 轴的转动惯量; l_0 为转动杆长度; J_{c1} 为摆杆对质心 C_1 的转动惯量, m_1, l_1, l_{c1} 表示摆杆质量、摆杆长度和摆杆质心 C_1 到转轴 O_1 点距离, u 为控制力矩。设 F_0, F_1 分别为水平杆和摆杆的阻力矩系数。设 θ_0, θ_1 分别表示水平杆和摆杆的广义坐标, θ_0, ω_0 为转动杆转角和角速度, θ_1, ω_1 为摆杆转角和角速度。

$$\begin{cases} [J_0 + m_1 l_0^2 + (m_1 l_{c1}^2 + J_{c1}) \sin^2 \theta_1] \ddot{\theta}_0 - \\ m_1 l_0 l_{c1} \cos \theta_1 \cdot \ddot{\theta}_1 = \\ u - F_0 \omega_0 - m_1 l_0 l_{c1} \omega_1^2 \sin \theta_1 - \\ (m_1 l_{c1}^2 + J_{c1}) \omega_0 \omega_1 \sin 2\theta_1, \\ - m_1 l_0 l_{c1} \cos \theta_1 \cdot \ddot{\theta}_0 + (m_1 l_{c1}^2 + J_{c1}) \ddot{\theta}_1 = \\ (m_1 g \cdot l_{c1} \sin \theta_1 - F_1 \omega_1 + m_1 l_0 l_{c1} \omega_0 \omega_1 \sin \theta_1 + \\ (J_{c1} + m_1 l_{c1}^2) \omega_0^2 \sin \theta_1 \cos \theta_1. \end{cases}$$

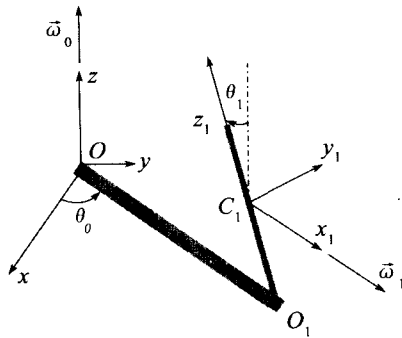


图1 圆轨倒立摆系统

Fig. 1 Circular-rail inverted pendulum system

3.2 圆轨倒立摆系统参数 (Parameters of circular-rail inverted pendulum nonlinear system)

转动杆的转动惯量 $J_0 = 0.0475 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, 水平杆长 $l_0 = 0.165 \text{ m}$; 质量 $m_1 = 0.408 \text{ kg}$, 摆杆对中心轴转动惯量为 $J_{c1} = 0.0029 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ 质心与转轴距离 $l_{c1} = 0.116 \text{ m}$; 驱动力矩幅值 $u_{\max} = 4.7 \text{ Nm}$, $F_0 = 0.11 \text{ Ns/m}$, $F_1 = 0.025 \text{ Ns/m}$. 控制时间 $t_z = 1 \text{ s}$, 变量数量为 $l = 4$, 计算时间步长为 $th = 0.005 \text{ s}$, 初始条件: 取不同情况, $\theta_0 = 0$, $\theta_1 = 1 \sim 20^\circ$, $\omega_0 = \omega_1 = 0$, 控制目标函数结束精度 $\varepsilon = 10^{-8}$. 梯度函数中的增量 $dk_j = 0.0000001$.

3.3 状态反馈参数的程序计算结果 (Computing result of state feedback parameters based on programme)

圆轨单级倒立摆为2个自由度系统, 共有4个状态反馈参数:

$k_1 = k_{\theta_0}$, $k_2 = k_{\dot{\theta}_1}$, $k_3 = k_{\omega_0}$, $k_4 = k_{\dot{\omega}_1}$. 置 $\theta_0 = 0$, $\omega_0 = \omega_1 = 0$, 取不同 θ_1 初始值, 确定的状态反馈参数见表1.

表1 状态反馈参数计算结果

Table 1 Computing result of state feedback parameters

θ_1	k_1	k_2	k_3	k_4
1	0.04342	-17.48612	0.69090	-1.19020
2	0.04059	-17.48620	0.70018	-1.19900
3	0.03387	-17.48088	0.71682	-1.21612
4	0.03748	-17.48186	0.70685	-1.20518
5	0.03386	-17.47626	0.71454	-1.21323
6	0.03505	-17.48353	0.71069	-1.20937
7	0.03461	-17.48615	0.71072	-1.20855
8	0.03554	-17.48127	0.70587	-1.20272
9	0.03442	-17.48208	0.70641	-1.20314
10	0.03469	-17.48195	0.70276	-1.19881
15	0.03559	-17.48795	0.67620	-1.16982
20	0.03547	-17.49155	0.62393	-1.11691
22	0.03384	-17.51124	0.59584	-1.09099

可见在大约 θ_1 在 10° 以内, 4个参数计算结果是基本相同, 而 θ_1 超过 10° , k_3, k_4 参数变化较大, 表

明, 此时就不能用同一组参数实施反馈控制, 可以将角度分段, 在不同角度段上, 采用相应参数控制. 表2列出 $\theta_0 = 0$, $\omega_0 = \omega_1 = 0$, 初始 $\theta_1 = 5^\circ$ 时, 优化计算反馈参数时, 目标函数的变化情况.

表2 初始 $\theta_1 = 5^\circ$ 参数的优化过程

Table 2 Optimizing process when initial state $\theta_1 = 5^\circ$

计算次数	k_1	k_2	k_3	k_4	f
0	0.8000	-15.0000	0.3000	-1.0000	0.43646619
5	0.5178	-17.4968	0.1688	-1.1604	0.00047567
10	0.2730	-17.5125	0.3375	-1.0890	0.00019787
15	0.1672	-17.5226	0.4394	-0.9827	0.00008005
20	0.1413	-17.5251	0.4948	-0.9376	0.00001110
25	0.1082	-17.5163	0.5512	-1.0090	0.00000708
30	0.0990	-17.5118	0.5694	-1.0405	0.00000407
35	0.0715	-17.5000	0.6265	-1.1101	0.00000136
40	0.0408	-17.4817	0.6958	-1.1933	0.00000011
43	0.0339	-17.4763	0.7145	-1.2132	0.00000001

获得最优参数为:

$$k_1 = 0.0339, k_2 = -17.4763, \\ k_3 = 0.7145, k_4 = -1.2132.$$

4 基于状态反馈参数计算结果的平衡点控制仿真 (Simulation of equilibrium control computing result based on state feedback parameters)

取平衡控制时间 50 s , 采样时间间隔为 $th = 0.050 \text{ s}$, 设随机扰动项. 转角项为 $\theta_i(t) = \theta_i(t) + (\text{rand}() - 0.5)/10$, $i = 1, 2$; 角速度项为 $\omega_i(t) = \omega_i(t) + (\text{rand}() - 0.5)/100$, $i = 1, 2$, 采用上面平衡控制参数的反馈控制可以通过实物获得实际平衡点成功控制. 图2、图3分别为平衡控制过程转角和角速度随时间变化情况.

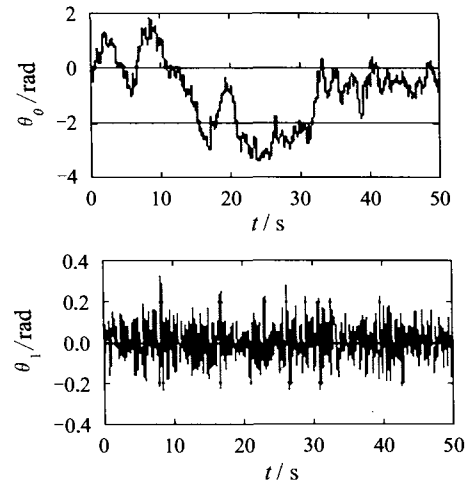


图2 持续50 s平衡控制过程角度变化仿真

Fig. 2 Angular variation with time in equilibrium control

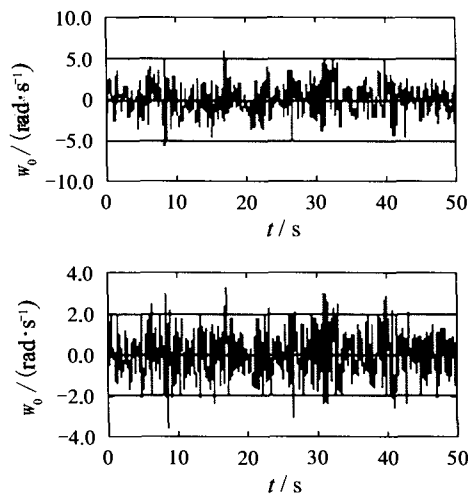


图3 持续50 s平衡控制过程角速度变化仿真

Fig. 3 Angular velocity variation with time in equilibrium control

5 结论(Conclusion)

本文研究了非线性系统不进行线性化处理条件下的反馈控制参数的优化确定方法,表明采用动态设计变量优化方法所确定的反馈控制参数比通常数值算法更为精确,基于非线性系统倒立摆模型的平衡点反馈控制参数的程序计算结果可获得较大范围的平衡控制。

参考文献(References):

- [1] FURUTA K, OKUTANI T, SONE H. Computer Control of a double Inverted Pendulum[J]. *Comput & Enging*, 1978, 1(5): 67-84.
- [2] 梁任秋,赵松,唐悦,等. 二节倒立摆的数字控制器设计[J]. 控制理论与应用,1987,4(1):115-124.
(LIANG Renqiu, ZHAO Song, TANG Yue, et al. Design of Numerical Control device about double inverted pendulum[J]. *Control Theory & Applications*, 1987, 4(1):115-124.)
- [3] MEIER H, FARWIG Z, UNBEHAUEN H. Discrete computer control of a triple inverted pendulum[J]. *Optimal Control Applications & Methods*, 1990, 11(2):157-171.
- [4] 尹征琦,冯祖仁,陈辉堂. 采用模拟调节器的二级倒立摆的控制[J]. 信息与控制,1985,14(1):6-10.
(YIN Zhengqi, FENG Zuren, CHEN Huitang. Control of double inverted pendulum of adopting imitating adjustor [J]. *Information and Control*, 1985, 14(1):6-10.)
- [5] 李士勇. 模糊控制·神经控制和智能控制论[M]. 哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,1998.
(LI Shiyong. *Fuzzy Control Neurocontrol and Intelligent Cybernetics* [M]. Harbin: Harbin Institute Technology Press, 1998.)
- [6] 李祖枢. 力矩受限单摆的倒立控制——仿人智能控制在非线性系统中的应用[J]. 控制理论与应用,1999,16(2):225-229.
(LI Zushu. The control for swinging up of a pendulum under limited torque-an application of human simulated intelligent control in nonlinear system[J]. *Control Theory & Applications*, 1999, 16(2):225-229.)
- [7] 侯祥林,顾立忠,徐心和. 圆轨单级倒立摆的摆起过程控制[J]. 控制与决策,2003,18(4):483-486.
(HOU Xianglin, GU Lizhong, XU Xinhe. Swing up control of a circular-rail single inverted pendulum [J]. *Control and Decision*, 2003, 18(4):483-486.)
- [8] 侯祥林,顾立忠,徐心和. 圆轨单级倒立摆摆起过程的神经网络闭环控制方法[J]. 自动化学报,2004,30(2):288-293.
(HOU Xianglin, GU Lizhong, XU Xinhe. Closed-loop control method for swing up process of circular-rail inverted pendulum [J]. *Acta Automatica Sinica*, 2004, 30(2):288-293.)
- [9] 么健石,侯祥林,徐心和. 二级倒立摆摆起控制的研究[J]. 控制与决策,2004,19(10):1183-1186.
(YAO Jianshi, HOU Xianglin, XU Xinhe. Study on swing-upcontrol of double inverted pendulum [J]. *Control and Decision*, 2004, 19(10):1183-1186.)
- [10] 么健石,侯祥林,徐心和. 基于动态设计变量优化算法的非线性模型参数估计[J]. 东北大学学报,2004,25(2):106-109.
(YAO Jianshi, HOU Xianglin, XU Xinhe. Eestimation of non-linear modeling parameters based on optimization algorithm of dynamic design variables [J]. *J of Northeastern University (Natural Science)*, 2004, 25(2):106-109.)

作者简介:

侯祥林 (1962—),男,沈阳建筑大学教授,在东北大学控制理论与控制工程专业做博士后研究,主要研究方向为非线性系统建模与控制,神经网络算法,动态设计变量优化方法及应用等,已经发表文章40余篇, E-mail: Drhouxl@tom.com;

徐心和 (1941—),男,东北大学教授,博士生导师,主要研究方向为控制理论与应用,模式识别方法等。