

## T-S模糊系统输出反馈控制器的稳定性分析与设计

修智宏<sup>1,2</sup>, 王 伟<sup>1</sup>

(1. 大连理工大学 信息与控制研究中心, 辽宁 大连 116024; 2. 海军大连舰艇学院 作战指挥系, 辽宁 大连 116018)

**摘要:** 输出反馈控制是T-S模糊控制系统设计的一种重要方法. 本文提出了一类由模糊状态观测器和模糊调节器构成的输出反馈控制器稳定性分析和解析设计的新方法. 为了减小稳定性分析的保守性和难度, 本文充分利用了模糊规则前件变量模糊隶属度函数的结构信息, 对前件变量采用标准模糊分划的T-S模糊系统输出反馈控制器进行了研究, 获得了一些新的稳定性条件. 然后采用平行分布补偿法(PDC)和线性矩阵不等式方法(LMI), 研究了该类输出反馈控制器的解析设计方法. 通过一个非线性质量块-弹簧-阻尼器系统输出反馈控制器的设计和计算机仿真, 验证了本文方法的有效性.

**关键词:** T-S模糊系统; 反馈控制; 系统化设计; 稳定性分析; 标准模糊分划

**中图分类号:** TP273 **文献标识码:** A

## Stability analysis and design of output feedback controllers for Takagi-Sugeno fuzzy systems

XIU Zhi-hong<sup>1,2</sup>, WANG Wei<sup>1</sup>

(1. Research Center of Information and Control, Dalian University of Technology, Dalian Liaoning 116024, China;

2. Department of Command Control, Dalian Naval Academy, Dalian Liaoning 116018, China)

**Abstract:** Output feedback control is an important approach to the design of Takagi-Sugeno (T-S) fuzzy control systems. New stability analysis and analytical design methods of output feedback controllers are proposed for T-S fuzzy systems in this paper. The output feedback controller is constructed with a fuzzy regulator and a fuzzy observer. In order to use the structural information in the rule base to decrease the conservatism of the stability analysis, the standard fuzzy partition (SFP) is employed on the premise variables of T-S fuzzy systems. New stability conditions are also obtained by relaxing the stability conditions derived in previous papers. The concept of parallel distributed compensation (PDC) and linear matrix inequality (LMI) are employed to design an output feedback controller for T-S fuzzy models. The output feedback controller design and simulation results of a nonlinear mass-spring-damper mechanical system show that these methods are effective.

**Key words:** T-S fuzzy model; feedback control; systematic design; stability analysis; standard fuzzy partition

### 1 引言(Introduction)

近年来, Takagi-Sugeno (T-S) 型模糊系统成为模糊控制领域中一个非常活跃的研究方向<sup>[1~15]</sup>. 文[3~6]采用平行分布补偿法(PDC)为T-S模糊对象模型设计状态反馈控制器. 在实际应用中, 许多系统的状态变量不是全部可测的, 因此采用输出反馈控制器是T-S模糊控制系统设计的另一种重要的方法<sup>[7~11]</sup>. Yoneyama等人<sup>[8,9]</sup>研究了基于模糊状态观测器和模糊调节器的输出反馈控制器, 并指出当模糊状态观测器和模糊状态反馈控制器分别为二次稳定(或收敛)时, 该类输出反馈控制器总能实现对T-S模糊系统的镇定.

现有的研究成果<sup>[2~11]</sup>中, 大多数模糊控制器设计没有考虑模糊规则前件变量模糊隶属度函数的结构信息. 而在实际应用中, 模糊控制系统前件变量的隶属度函数一般采用有限支集的形式, 各局部子系统只在一定区域内起作用. 作者在前期工作<sup>[12,13]</sup>中, 通过总结工程应用中大多数模糊系统前件变量模糊隶属度函数的共同特点, 详细定义了标准模糊分划, 并深入研究了前件变量采用标准模糊分划的模糊系统的性质, 提出了一种判定T-S模糊控制系统稳定的新方法. 该方法充分利用了模糊规则前件变量模糊隶属度函数的结构信息, 减小了以往稳定性判定方法的保守性和难度. 文[13]还研究了模糊状态反馈控

制器的系统化设计方法. 本文在文[12,13]研究成果的基础上, 进一步研究了T-S模糊系统输出反馈控制器稳定性分析和解析设计方法.

## 2 T-S模糊系统状态反馈控制器设计和稳定性分析(Stability analysis and design of state feedback controllers for T-S fuzzy systems)

T-S模糊系统是用一组采用线性子系统作为后件的IF-THEN模糊规则来描述的非线性系统. 根据文[7~9]的研究结果, 如果T-S模糊系统的前件变量依赖于状态观测器所估计的系统状态, 输出反馈控制器的设计和稳定性分析将比较复杂, 而如果前件变量直接采用系统的输出, 则输出反馈控制器的设计和稳定性分析要相对简单一些. 由于在实际应用中, 大多数系统的输出值可以容易测到, 因此本文主要研究前件变量采用系统输出的T-S模糊系统输出反馈控制器.

### 2.1 前件变量采用系统输出的T-S模糊系统模型(Model of T-S fuzzy systems whose premise variables adopt output variables)

前件变量采用系统输出的T-S模糊系统模型为

$$\begin{aligned} \text{IF } y_1 \text{ is } M_1^i \text{ and } \cdots \text{ and } y_p \text{ is } M_p^i \\ \text{THEN } \dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i u(t), y(t) = C_i x(t), \\ i = 1, 2, \cdots, l. \end{aligned} \quad (1)$$

其中:  $l$ 为模糊规则数,  $y(t) = [y_1, y_2, \cdots, y_p]^T \in \mathbb{R}^p$  为系统输出, 同时也作为规则的前件变量,  $M_j^i (j = 1, 2, \cdots, p)$ 为前件变量的模糊集,  $x(t) = [x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)]^T, x \in \mathbb{R}^n$  为系统的状态向量,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  为系统输入,  $A_i, B_i, C_i$  为T-S模糊系统中各局部子系统的参数矩阵.

采用单点模糊法、Sum-Product推理、重心法去模糊, T-S模糊系统的总体模型为

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^l h_i(y) \{A_i x(t) + B_i u(t)\}, \quad (2)$$

$$y(t) = \sum_{i=1}^l h_i(y) C_i x(t). \quad (3)$$

其中:  $w_i(y) = \prod_{k=1}^p M_k^i(y_k(t))$  为第 $i$ 条规则的激活度, 且 $h_i(y) = w_i(y) / \sum_{i=1}^l w_i(y)$ .

### 2.2 状态反馈控制器设计和稳定性分析(analysis and design of state feedback controllers)

对于式(1)所示控制对象的T-S模型, 利用平行分布补偿(PDC)原理设计模糊控制器是一种简便有效的方法<sup>[3,4]</sup>. 对于式(1)所示的系统, 其相应的模糊状态反馈控制规则为

$$\begin{aligned} \text{IF } y_1 \text{ is } M_1^i \text{ and } \cdots \text{ and } y_p \text{ is } M_p^i \\ \text{THEN } u(t) = -K_i x(t), i = 1, 2, \cdots, l. \end{aligned} \quad (4)$$

模糊状态反馈控制器的总体模型为

$$u(t) = -\sum_{i=1}^l h_i(y) K_i x(t). \quad (5)$$

将式(5)代入式(2)可得控制系统的总体模型为

$$\begin{aligned} \dot{x} = \left\{ \sum_{i=1}^l \sum_{k=1}^l h_i h_k G_{ik} \right\} x = \\ \left\{ \sum_{i=1}^l h_i^2 G_{ii} + 2 \sum_{i < k} h_i h_k \left( \frac{G_{ik} + G_{ki}}{2} \right) \right\} x. \end{aligned} \quad (6)$$

其中 $G_{ik} = A_i - B_i K_k$ .

文[13]提出了一个判定采用状态反馈控制器的闭环T-S模糊控制系统稳定的充分条件:

**定理1** 对于式(6)所示T-S模糊控制系统, 如果各前件变量均采用标准模糊分划, 则闭环系统在平衡状态大范围渐近稳定的充分条件是: 在每个最大交叠规则组中都存在一个公共的正定矩阵 $P_j$ 满足条件C1)或C2):

$$\begin{aligned} \text{C1) } G_{ik}^T P_j + P_j G_{ik} < 0, i, k \in L_j; j = 1, 2, \cdots, \\ \prod_{r=1}^p (m_r - 1); \\ \text{C2) } G_{ii}^T P_j + P_j G_{ii} < 0, i \in L_j; \left( \frac{G_{ik} + G_{ki}}{2} \right)^T P_j + \\ P_j \left( \frac{G_{ik} + G_{ki}}{2} \right) < 0, i, k \in L_j \text{ 且 } i < k; j = \\ 1, 2, \cdots, \prod_{r=1}^p (m_r - 1). \end{aligned}$$

其中(以及在本文后面的讨论中):  $L_j = \{\text{第}j\text{个最大交叠规则组包含的规则序号}\}$ ,  $m_r$ 为第 $r$ 个前件变量的模糊分划数.

为了进一步减小稳定性分析的保守性, 受文[6]的启发, 本文研究得到了一个新的判定式(6)所示T-S模糊控制系统稳定的充分条件:

**定理2** 对于式(6)所示T-S模糊控制系统, 如各前件变量均采用标准模糊分划, 则闭环系统在平衡状态大范围渐近稳定的充分条件是: 在每个最大交叠规则组中都存在一个公共的正定矩阵 $P_j$ 满足式(7).

$$\begin{pmatrix} \Lambda_{d_1 d_2}^T P_j + P_j \Lambda_{d_1 d_1} & \Lambda_{d_1 d_2}^T P_j + P_j \Lambda_{d_1 d_2} & \cdots & \Lambda_{d_1 d_s}^T P_j + P_j \Lambda_{d_1 d_s} \\ \Lambda_{d_1 d_2}^T P_j + P_j \Lambda_{d_1 d_2} & \Lambda_{d_2 d_2}^T P_j + P_j \Lambda_{d_2 d_2} & \cdots & \Lambda_{d_2 d_s}^T P_j + P_j \Lambda_{d_2 d_s} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \Lambda_{d_1 d_s}^T P_j + P_j \Lambda_{d_1 d_s} & \Lambda_{d_2 d_s}^T P_j + P_j \Lambda_{d_2 d_s} & \cdots & \Lambda_{d_s d_s}^T P_j + P_j \Lambda_{d_s d_s} \end{pmatrix} < 0, \quad j = 1, 2, \dots, \prod_{r=1}^p (m_r - 1), \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \dot{V}_j(x) &= \dot{x}^T P_j x + x^T P_j \dot{x} = \left( \sum_{i=1}^{s(j)} \sum_{k=1}^{s(j)} h_{d_i} h_{d_k} G_{d_i d_k} x \right)^T P_j x + x^T P_j \left( \sum_{i=1}^{s(j)} \sum_{k=1}^{s(j)} h_{d_i} h_{d_k} G_{d_i d_k} x \right) = \\ &= \sum_{i=1}^{s(j)} h_{d_i}^2 \{ x^T (G_{d_i d_i}^T P_j + P_j G_{d_i d_i}) x \} + 2 \sum_{i < k \leq s(j)} h_{d_i} h_{d_k} \{ x^T \left( \frac{G_{d_i d_k} + G_{d_k d_i}}{2} \right)^T P_j + P_j \left( \frac{G_{d_i d_k} + G_{d_k d_i}}{2} \right) x \} = \\ &= \begin{pmatrix} h_{d_1} x \\ h_{d_2} x \\ \vdots \\ h_{d_{s(j)}} x \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \Lambda_{d_1 d_1}^T P_j + P_j \Lambda_{d_1 d_1} & \Lambda_{d_1 d_2}^T P_j + P_j \Lambda_{d_1 d_2} & \cdots & \Lambda_{d_1 d_{s(j)}}^T P_j + P_j \Lambda_{d_1 d_{s(j)}} \\ \Lambda_{d_1 d_2}^T P_j + P_j \Lambda_{d_1 d_2} & \Lambda_{d_2 d_2}^T P_j + P_j \Lambda_{d_2 d_2} & \cdots & \Lambda_{d_2 d_{s(j)}}^T P_j + P_j \Lambda_{d_2 d_{s(j)}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \Lambda_{d_1 d_{s(j)}}^T P_j + P_j \Lambda_{d_1 d_{s(j)}} & \Lambda_{d_2 d_{s(j)}}^T P_j + P_j \Lambda_{d_2 d_{s(j)}} & \cdots & \Lambda_{d_{s(j)} d_{s(j)}}^T P_j + P_j \Lambda_{d_{s(j)} d_{s(j)}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_{d_1} x \\ h_{d_2} x \\ \vdots \\ h_{d_{s(j)}} x \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} h_{d_1} x & h_{d_2} x & \cdots & h_{d_{s(j)}} x \end{pmatrix}^T. \end{aligned} \quad (8)$$

其中:  $s = 2^p$ ,  $\Lambda_{d_i d_i} \equiv G_{d_i d_i} (d_i \in L_j)$ ,  $\Lambda_{d_i d_k} \equiv \left( \frac{G_{d_i d_k} + G_{d_k d_i}}{2} \right) (d_i, d_k \in L_j \text{ 且 } i < k)$ .

**证** 设系统共有  $r$  个交叠规则组,  $l_j = \{\text{第 } j \text{ 个交叠规则组包含的规则序号}\}$ , 各交叠规则组的作用域为  $S_j (j = 1, 2, \dots, r)$ .

在第  $j$  个交叠规则组的作用域上选择  $V_j(x) = x^T P_j x$  为局部 Lyapunov 函数, 可以得到式(8). 其中:  $s(j)$  为第  $j$  个交叠规则组中包含的规则数,  $d_i, d_k \in l_j$ , 且  $i < k$ .

其余的证明过程与文献[13]中的定理2相同.

### 3 输出反馈控制器设计(Design of output feedback controllers)

本文研究的T-S模糊系统输出反馈控制器由模糊状态观测器和模糊调节器构成. 其中调节器采用式(6)所示的模糊状态反馈控制器的形式, 观测器采用与模糊对象模型相同的规则前件, 结构为式(6)所示的状态反馈控制器的对偶形式, 因此其收敛条件可以由定理1, 2直接推出.

#### 3.1 状态观测器的收敛性(Convergence of fuzzy observers)

模糊状态观测器的规则形式如下:

$$\begin{aligned} \text{IF } y_1 \text{ is } M_1^i \text{ and } \cdots \text{ and } y_p \text{ is } M_p^i \\ \text{THEN } \hat{x}(t) &= A_i \hat{x}(t) + B_i u(t) + F_i (y(t) - \hat{y}(t)) \\ i &= 1, 2, \dots, l. \end{aligned} \quad (9)$$

其中:  $\hat{x}(t)$  为估计的状态向量,  $\hat{y}(t) = \sum_{i=1}^l h_i(y) C_i \hat{x}(t)$ .

模糊状态观测器的总体模型为

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) &= \sum_{i=1}^l h_i(y) \{ A_i \hat{x}(t) + B_i u(t) \} + \\ &= \sum_{i=1}^l h_i(y) F_i (y(t) - \hat{y}(t)). \end{aligned} \quad (10)$$

在设计时笔者希望找到所有的  $F_i$  满足: 当  $t \rightarrow \infty$  时  $e(t) = x(t) - \hat{x}(t) \rightarrow 0$ .

由式(2)(10), 可以得到观测器的误差为

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= \sum_{i=1}^l \sum_{k=1}^l h_i(y) h_j(y) (A_i - F_k C_i) e(t) = \\ &= \sum_{i=1}^l h_i^2(y) \tilde{G}_{ii} e(t) + 2 \sum_{i < k}^l h_i(y) h_k(y) \left( \frac{\tilde{G}_{ik} + \tilde{G}_{ki}}{2} \right) e(t). \end{aligned} \quad (11)$$

其中  $\tilde{G}_{ik} = A_i - F_k C_i$ .

式(11)所示的误差系统是式(6)的对偶形式, 因此当  $t \rightarrow \infty$  时  $e(t) \rightarrow 0$  的充分条件如下:

**定理3** 对于式(11)所示模糊状态观测器的误差系统, 如果各前件变量均采用标准模糊分划, 则误差系统在  $e(t) = 0$  处大范围渐近稳定的充分条件是: 在每个最大交叠规则组中都存在一个公共的正定矩阵  $\tilde{P}_j$  满足条件C3)或C4):

$$\begin{aligned} \text{C3) } \tilde{G}_{ik}^T \tilde{P}_j + \tilde{P}_j \tilde{G}_{ik} &< 0, i, k \in L_j; \quad j = 1, 2, \\ \cdots, \prod_{r=1}^p (m_r - 1). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{C4) } \tilde{G}_{ii}^T \tilde{P}_j + \tilde{P}_j \tilde{G}_{ii} &< 0, i \in L_j; \left( \frac{\tilde{G}_{ik} + \tilde{G}_{ki}}{2} \right)^T \tilde{P}_j + \\ \tilde{P}_j \left( \frac{\tilde{G}_{ik} + \tilde{G}_{ki}}{2} \right) &< 0, i, k \in L_j \text{ 且 } i < k, j = \end{aligned}$$

$1, 2, \dots, \prod_{r=1}^p (m_r - 1).$

证 可以直接根据定理1导出.

**定理4** 对于式(11)所示模糊状态观测器的误差系统, 如果各前件变量均采用标准模糊分划, 则误差系统在 $e(t) = 0$ 处大范围渐近稳定的充分条件是: 在每个最大交叠规则组中都存在一个公共的正定矩阵 $\tilde{P}_j$ 满足式(12).

$$\begin{pmatrix} \tilde{A}_{d_1 d_1}^T \tilde{P}_j + \tilde{P}_j \tilde{A}_{d_1 d_1} & \tilde{A}_{d_1 d_2}^T \tilde{P}_j + \tilde{P}_j \tilde{A}_{d_1 d_2} & \cdots & \tilde{A}_{d_1 d_s}^T \tilde{P}_j + \tilde{P}_j \tilde{A}_{d_1 d_s} \\ \tilde{A}_{d_2 d_1}^T \tilde{P}_j + \tilde{P}_j \tilde{A}_{d_2 d_1} & \tilde{A}_{d_2 d_2}^T \tilde{P}_j + \tilde{P}_j \tilde{A}_{d_2 d_2} & \cdots & \tilde{A}_{d_2 d_s}^T \tilde{P}_j + \tilde{P}_j \tilde{A}_{d_2 d_s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{A}_{d_s d_1}^T \tilde{P}_j + \tilde{P}_j \tilde{A}_{d_s d_1} & \tilde{A}_{d_s d_2}^T \tilde{P}_j + \tilde{P}_j \tilde{A}_{d_s d_2} & \cdots & \tilde{A}_{d_s d_s}^T \tilde{P}_j + \tilde{P}_j \tilde{A}_{d_s d_s} \end{pmatrix} < 0, j = 1, 2, \dots, \prod_{r=1}^p (m_r - 1). \quad (12)$$

其中:  $s = 2^p$ ,  $\tilde{A}_{d_i d_i} \equiv \tilde{G}_{d_i d_i} (d_i \in L_j)$ ,  $\tilde{A}_{d_i d_k} \equiv (\frac{\tilde{G}_{d_i d_k} + \tilde{G}_{d_k d_i}}{2})$ ,  $(d_i, d_k \in L_j \text{ 且 } i < k)$ .

证 可以直接根据定理2导出.

### 3.2 输出镇定与分离设计原理(Output stabilization and the separation principle)

在线性系统理论中, 将一个稳定的状态反馈控制器(调节器)与一个收敛的状态观测器结合可以获得一个稳定的输出反馈控制器, 因此状态观测器和调节器可以分别设计, 这就是著名的“分离设计原理”<sup>[16,17]</sup>. 根据文献[8, 9]的研究成果, 尽管式(1)所示的T-S模糊系统本质上是非线性的, 如果采用式(9)所示的模糊状态观测器和式(4)所示的模糊调节器, “分离设计原理”依然成立.

对于式(1)所示的系统, 采用式(9)所示的状态观测器, 且调节器为

$$u(t) = - \sum_{i=1}^l h_i(y) K_i \hat{x}(t). \quad (13)$$

由式(2)(3)和式(10)可得

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l h_i(y) h_j(y) H_{ij} \tilde{x}(t). \quad (14)$$

其中

$$\tilde{x}(t) = [x(t)^T, e(t)^T]^T, \\ H_{ij} = \begin{bmatrix} A_i - B_i K_j & B_i K_j \\ 0 & A_i - F_j C_i \end{bmatrix}.$$

由定理1和定理3, 可以得到以下结论:

**定理5** 如果系统(6)满足定理1的条件且状态观测器的误差系统(11)满足定理3的条件, 那么式(14)所示采用输出反馈控制器的闭环T-S模糊控制系统是大范围渐近稳定的.

证 可以直接根据文献[8]的定理4.1导出.

由定理2和定理4, 可以得到以下结论:

**定理6** 如果系统(6)满足定理2的条件且状态观测器的误差系统(11)满足定理4的条件, 那么式(14)所示采用输出反馈控制器的闭环T-S模糊控

制系统是大范围渐近稳定的.

证 可以直接根据文献[8]的定理4.1导出.

### 3.3 输出反馈控制器的解析设计方法 (Analytical design of output feedback controller)

采用由模糊观测器和模糊调节器构成的输出反馈控制器的T-S模糊控制系统结构如图1所示.

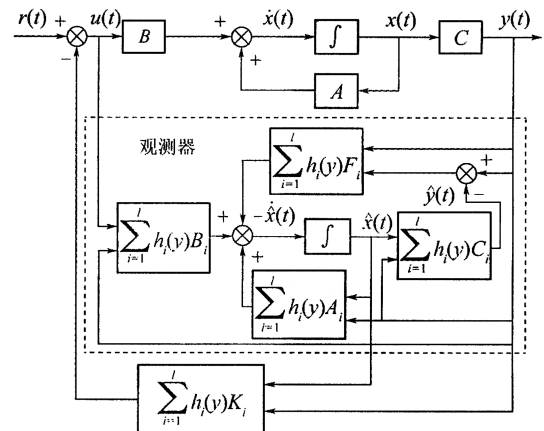


图1 采用输出反馈控制器的T-S模糊控制系统的结构

Fig. 1 Structure of a T-S fuzzy control system with an output feedback controller

根据定理5,6, 在设计输出反馈控制器时可以分别设计模糊观测器和模糊调节器, 因此, 输出反馈控制器的解析设计步骤如下:

**步骤1** 采用式(1)所示的T-S模糊模型为被控对象建模, 建模的具体方法可参考文献[1].

**步骤2** 对于式(1)所示的T-S模糊对象模型, 验证各线性子系统的可控性和可观测性, 即

$$\text{rank}(B_i, A_i B_i, \dots, A_i^{n-1} B_i) = n, i = 1, \dots, l, \\ \text{rank}(C_i, C_i A_i, \dots, C_i A_i^{n-1})^T = n, i = 1, \dots, l.$$

**步骤3** 应用线性系统理论, 根据期望的闭环控制系统的性能指标, 选取各局部线性子系统通过状态反馈后的闭环极点位置.

**步骤4** 采用Achermann公式, 计算每一个局部线性子系统的状态反馈矩阵 $K_i$ , 并计算 $G_{ij} = A_i - B_i K_j$ .

**步骤5** 根据文献[12]中的定理2.2找出系统所有的最大交叠规则组,应用定理1,2检验闭环T-S模糊控制系统的稳定性.如果在某一最大交叠规则组内不满足定理1,2的条件,应回到步骤3重新配置相应子系统的闭环极点位置,直到满足条件.

**步骤6** 应用线性系统理论,根据期望的观测器收敛速度,选取各局部线性子系统观测器的闭环极点位置.

**步骤7** 采用Achermann公式,计算每一个局部线性子系统的状态观测器的反馈矩阵 $F_i$ .

**步骤8** 应用定理3,4检验模糊状态观测器误差系统的稳定性.如果在某一最大交叠规则组内不满足定理3,4的条件,应回到步骤6重新配置相应局部线性子系统观测器的闭环极点位置,直到满足条件.

**步骤9** 按式(13)将各局部线性子系统的状态反馈控制器合成模糊调节器的总体模型,按式(10)将各局部线性子系统的状态观测器合成模糊状态观测器的总体模型,最后合成系统的输出反馈控制器.通过计算机仿真或实际试验,如果达到预期的控制效果则输出反馈控制器设计结束;否则回到步骤3重新设计模糊调节器和模糊状态观测器,直到达到预期的控制效果.

#### 4 设计和仿真示例(Example of design and simulation)

为了验证上面提出的T-S模糊系统输出反馈控制器的稳定性分析及解析设计方法的有效性,本文采用文献[3]中非线性质量块-弹簧-阻尼器系统为研究对象,进行了输出反馈控制器的设计和仿真.

##### 4.1 被控对象的模糊建模(Fuzzy modelling of the plant)

文献[3]中非线性质量块-弹簧-阻尼器系统的微分方程为

$$\ddot{z} = -(1 + 0.2z)\dot{z} - (0.01 + 0.1z)z + (1 + 0.13z^3)u. \quad (15)$$

其中:  $z \in [-1.5 \ 1.5], \dot{z} \in [-1.5 \ 1.5]$ . 令  $x_1 = z, x_2 = \dot{z}$ , 则系统的状态向量为  $x = [x_1 \ x_2]^T$ .

容易验证如果不加控制器,该系统在  $x = [0 \ 0]^T$  处是不稳定的.

式(15)所示的系统可以用以下T-S模糊系统模型来近似:

$$\begin{cases} R_1: \text{IF } y \text{ is } M^1 \text{ THEN } \dot{x} = A_1x + B_1u, y = C_1x, \\ R_2: \text{IF } y \text{ is } M^2 \text{ THEN } \dot{x} = A_2x + B_2u, y = C_2x, \\ R_3: \text{IF } y \text{ is } M^3 \text{ THEN } \dot{x} = A_3x + B_3u, y = C_3x, \\ R_4: \text{IF } y \text{ is } M^4 \text{ THEN } \dot{x} = A_4x + B_4u, y = C_4x, \\ R_5: \text{IF } y \text{ is } M^5 \text{ THEN } \dot{x} = A_5x + B_5u, y = C_5x. \end{cases} \quad (16)$$

其中系统输出为  $y = z$ , 并作为T-S模糊规则的前件变量,其模糊分划  $\{M^i, i = 1, 2, \dots, 5\}$  采用如图2所示的三角形隶属度函数.

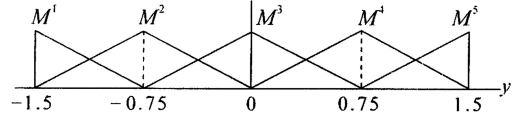


图2 前件变量的模糊隶属度函数

Fig. 2 Membership functions of the premise variable  $y$

各局部线性子系统的参数矩阵为

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0.14 & -0.7 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0.065 & -0.85 \end{bmatrix},$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.01 & -1 \end{bmatrix}, A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.085 & -1.15 \end{bmatrix},$$

$$A_5 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.16 & -1.3 \end{bmatrix},$$

$$B_1 = [0 \ 0.56]^T, B_2 = [0 \ 0.945]^T, B_3 = [0 \ 1]^T,$$

$$B_4 = [0 \ 1.055]^T, B_5 = [0 \ 1.439]^T,$$

$$C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = C_5 = C = [1 \ 0].$$

由图2可以看到,该T-S模糊系统的前件变量采用标准模糊分划,一共有4个最大交叠规则组,其作用域分别用  $S_1 \sim S_4$  表示:  $S_1$  包含  $R_1, R_2$  两条规则;  $S_2$  包含  $R_2, R_3$  两条规则;  $S_3$  包含  $R_3, R_4$  两条规则;  $S_4$  包含  $R_4, R_5$  两条规则.

##### 4.2 输出反馈控制器的设计和仿真(Design and simulation of the output feedback controller)

可以验证式(16)所示的T-S模糊对象模型中所有的线性子系统都是可控且可观的.

首先,进行模糊调节器设计.选择通过状态反馈后5个局部子系统的闭环极点位置为

$$p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = p_5 = [-2.0 \ -2.0].$$

通过Ackermann公式,可得局部线性子系统的状态反馈矩阵  $K_i$  分别为

$$K_1 = [7.3929 \ 5.8929], K_2 = [4.3016 \ 3.3333],$$

$$K_3 = [3.9900 \ 3.0000], K_4 = [3.7109 \ 2.7014],$$

$$K_5 = [2.6685 \ 1.8763].$$

计算出所有的  $G_{ij} = A_i - B_i K_j, i = 1, 2, \dots, 5, j = 1, 2, \dots, 5$ , 并且在系统的4个最大交叠规则组  $S_1 \sim S_4$  内通过LMI方法可以找到如下满足定理1,2条件的4个公共正定矩阵:

$$P_1 = \begin{bmatrix} 1.4776 & 0.1777 \\ 0.1777 & 0.2436 \end{bmatrix}, P_2 = \begin{bmatrix} 1.3460 & 0.1490 \\ 0.1490 & 0.1910 \end{bmatrix},$$

$$P_3 = \begin{bmatrix} 1.3545 & 0.1500 \\ 0.1500 & 0.1922 \end{bmatrix}, P_4 = \begin{bmatrix} 1.3228 & 0.1409 \\ 0.1409 & 0.1834 \end{bmatrix}.$$

因此可以判定通过状态反馈  $u = -K_i x (i =$

1, 2, \dots, 5), 式(16)所示T-S模糊控制系统是稳定的。

然后, 进行模糊观测器设计. 选择5个局部子系统的状态观测器误差系统的闭环极点位置分别为

$$\tilde{p}_1 = \tilde{p}_2 = \tilde{p}_3 = \tilde{p}_4 = \tilde{p}_5 = [-3.0 \quad -3.0].$$

通过Ackermann公式, 可以计算出局部子系统状态观测器的反馈矩阵 $F_i$ 分别为

$$\begin{aligned} F_1 &= [5.3000 \quad 5.4300]^T, F_2 = [5.1500 \quad 4.6875]^T, \\ F_3 &= [5.0000 \quad 3.9900]^T, F_4 = [4.8500 \quad 3.3375]^T, \\ F_5 &= [4.7000 \quad 2.7300]^T. \end{aligned}$$

计算出所有的 $\tilde{G}_{ij} = A_i - F_j C_i (i = 1, 2, \dots, 5, j = 1, 2, \dots, 5)$ , 并且在系统的4个最大交叠规则组 $S_1 \sim S_4$ 内通过LMI方法可以找到如下满足定理3,4条件的4个公共正定矩阵:

$$\begin{aligned} \tilde{P}_1 &= \begin{bmatrix} 0.3878 & -0.2850 \\ -0.2850 & 0.4243 \end{bmatrix}, \\ \tilde{P}_2 &= \begin{bmatrix} 0.3224 & -0.2382 \\ -0.2382 & 0.4072 \end{bmatrix}, \\ \tilde{P}_3 &= \begin{bmatrix} 0.2684 & -0.1942 \\ -0.1942 & 0.3871 \end{bmatrix}, \\ \tilde{P}_4 &= \begin{bmatrix} 0.2406 & -0.1643 \\ -0.1643 & 0.3894 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

因此可以判定模糊状态观测器的误差系统是稳定的。

接着, 根据式(10)和(13), 用模糊调节器和模糊状态观测器组成输出反馈控制器. 根据定理5, 6, 可以判定所设计的输出反馈控制器与T-S模糊对象模型组成的闭环控制系统是稳定的。

最后, 在各种初始条件下, 对式(15)所示的质量块-弹簧-阻尼器系统进行计算机仿真, 验证了采用输出反馈控制器的闭环系统在各种初始条件下状态都是稳定的. 图3、图4为初始条件为 $x_0 = [-1 \quad -1]^T, \hat{x}_0 = [-1 \quad 0]^T$ 时系统的状态响应曲线。

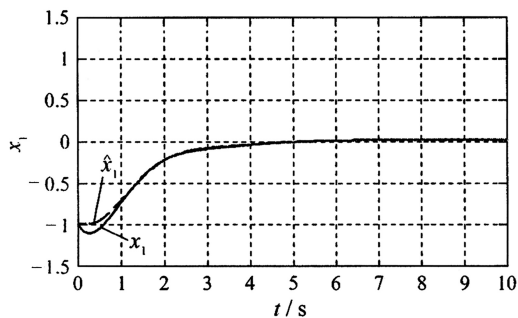


图3 状态变量 $x_1$ 及其观测值的响应曲线

Fig. 3 State and estimated state responses of  $x_1$

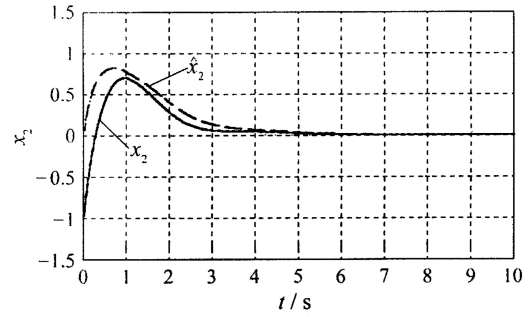


图4 状态变量 $x_2$ 及其观测值的响应曲线

Fig. 4 State and estimated state responses of  $x_2$

## 5 结论(Conclusion)

在笔者以前对标准模糊分划的定义和前件变量采用标准模糊分划的模糊系统性质的研究结果<sup>[12,13]</sup>基础上, 本文提出了一种T-S模糊系统输出反馈控制器稳定性分析和解析设计的新方法. 该输出反馈控制器由模糊状态观测器和模糊调节器构成, 在设计时采用了平行分布补偿法和线性矩阵不等式方法. 与以往的方法<sup>[7~11]</sup>相比, 本文提出的稳定性条件充分利用了模糊规则前件变量模糊隶属度函数的结构信息, 只需在各最大交叠规则组内分别寻找公共的正定矩阵, 减小了稳定性判定方法的保守性和难度. 通过对一个非线性质量块-弹簧-阻尼器系统的输出反馈控制器的设计和计算机仿真, 验证了本文方法的有效性. 由于篇幅所限, 本文只讨论了连续T-S模糊系统、离散T-S模糊系统输出反馈控制器的稳定性分析和解析设计方法可以直接由本文的研究结果改写得出。

## 参考文献(References):

- [1] TAKAGI T, SUGENO M. Fuzzy identification of systems and applications to modeling and control [J]. *IEEE Trans on Systems, Man and Cybernetics*, 1985, 15(1): 116 – 132.
- [2] TANAKA K, SUGENO M. Stability analysis and design of fuzzy control systems [J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 1992, 45(1): 135 – 156.
- [3] TANAKA K, IKEDA T, WANG H O. Robust stabilization of a class of uncertain nonlinear systems via fuzzy control: quadratic stability,  $H_\infty$  control theory and linear matrix inequalities [J]. *IEEE Trans on Fuzzy Systems*, 1996, 4(1): 1 – 13.
- [4] WANG H O, TANAKA K, GRIFFIN M F. An approach to fuzzy control of nonlinear systems: Stability and design issues [J]. *IEEE Trans on Fuzzy Systems*, 1996, 4(1): 14 – 23.
- [5] PARK J, KIM J, PARK D. LMI-based design of stabilizing fuzzy controllers for nonlinear systems described by Takagi-Sugeno fuzzy model [J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 2001, 122: 73 – 82.
- [6] KIM E, LEE H. New approaches to relaxed quadratic stability condition of fuzzy control systems [J]. *IEEE Trans on Fuzzy Systems*, 2000, 8(5): 523 – 534.
- [7] TANAKA K, IKEDA T, WANG H O. Fuzzy regulators and fuzzy observers: relaxed stability conditions and LMI-based designs [J]. *IEEE Trans on Fuzzy Systems*, 1998, 6(2): 250 – 265.

- [8] YONEYAMA J, NISHIKAWA M, KATAYAMA H, et al. Output stabilization of Takagi-Sugeno fuzzy systems [J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 2000, 111: 253 – 266.
- [9] YONEYAMA J, NISHIKAWA M, KATAYAMA H, et al. Design of output feedback controllers for Takagi-Sugeno fuzzy systems [J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 2001, 121(1): 127 – 148.
- [10] TEIXEIRA M C M, ASSUNCAO E, AVELLAR R G. On relaxed LMI-based designs for fuzzy regulators and fuzzy observers [J]. *IEEE Trans on Fuzzy systems*, 2003, 11(5): 613 – 623.
- [11] KORBA P, BABUSKA R, VERBRUGGEN H B, et al. Fuzzy gain scheduling: Controller and observer design based on Lyapunov method and convex optimization [J]. *IEEE Trans on Fuzzy Systems*, 2003, 11(3): 285 – 298.
- [12] 修智宏,张运杰,任光. 输入采用标准模糊分划的模糊控制系统性质及稳定性分析[J]. 模糊系统与数学, 2004, 18(4): 99 – 106.  
(XIU Zhihong, ZHANG Yunjie, REN Guang. Properties and stability analysis of fuzzy control systems employing standard fuzzy partition inputs [J]. *Fuzzy Systems and Mathematics*, 2004, 18(4): 99 – 106.)
- [13] XIU Z H, REN G. Stability analysis and systematic design of Takagi-Sugeno fuzzy control systems [J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 2005, 151: 119 – 138.
- [14] CAO S G, REES N W, FENG G. Quadratic stability analysis and design of continuous-time fuzzy control systems [J]. *System Science*, 1996, 27(2): 193 – 203.
- [15] CAO S G, REES N W, FENG G. Further results about quadratic stability of continuous-time fuzzy control systems [J]. *System Science*, 1997, 28(4): 397 – 404.
- [16] D'AZZO J J, HOUPIIS C H. *Linear Control System Analysis and Design-Conventional and Modern* [M]. Fourth Edition. New York: McGraw-Hill Companies, 1995.
- [17] OGATA K. *Modern Control Engineering* [M]. Third Edition. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1998.

### 作者简介:

**修智宏** (1967—),男,海军大连舰艇学院作战指挥系高级工程师,现在大连理工大学控制科学与工程流动站做博士后研究工作,研究领域为模糊控制、混杂系统、作战指挥自动化, E-mail: xzhdy@126.com;

**王伟** (1955—),男,大连理工大学信息与控制研究中心教授,博士生导师,研究领域为自适应控制、模型预测控制、计算机控制, E-mail: wangwei@dlut.edu.cn.

### (上接第507页)

- [5] 王林,戴冠中. Internet拓扑中连接率的研究[J]. 复杂系统与复杂性科学, 2004, 1(2): 9 – 15.  
(WANG Lin, DAI Guanzhong. Research on the connectivity coefficients of Internet topology [J]. *Complex Systems And Complexity Science*, 2004, 1(2): 9 – 15.)
- [6] WANG Lin, DAI Guanzhong. Research on the connectivity coefficients of internet topology [C]//*Proc of IADIS Int Conf WWW/Internet 2004, Madrid, Spain*. Libon, Portugal: IADIS Press, 2004.
- [7] CHOU Hongsong. A note on power-laws of internet topology [DB/OL]. ArXiv:cs.NI/0012019.
- [8] BARABASI A L, ALBERT R. Emergence of scaling in random networks[J]. *Science*. 1999, 286(15): 509 – 512.
- [9] 王林,戴冠中. Internet拓扑结构的静态概率模型研究[J]. 西北工业大学学报, 2004, 23(3): 341 – 346.  
(WANG Lin, DAI Guan-zhong. Exploring global properties of Internet topology [J]. *J of Northwestern Polytechnical University*, 2005, 23(3): 341 – 346.)
- [10] 谭跃进,吴俊. 网络结构熵及其在非标度网络中的应用[J]. 系统工程理论与实践, 2004, 24(6): 1 – 3.  
(TAN Yuejin, WU Jun. Network structure entropy and its application [J]. *System Engineering Theory and Practice*, 2004, 24(6): 1 – 3.)

### 作者简介:

**王林** (1963—),男,西安理工大学教授,西北工业大学在职博士研究生,主要研究方向为复杂系统及控制理论, E-mail: wanglin@xaut.edu.cn;

**戴冠中** (1937—),男,西北工业大学教授,博士生导师,主要研究方向为复杂系统、控制及网络信息安全, E-mail: daigz@nwpu.edu.cn.