

多变量数字鲁棒最优控制器的设计及应用

刘翔, 王文海, 孙优贤, 余涛

(浙江大学 工业控制技术国家重点实验室 现代控制工程研究所, 浙江 杭州 310027)

摘要: 针对线性多变量离散控制系统, 给出一种新的鲁棒最优控制器的设计方法. 该方法提出了多变量系统的行特征函数的设计新思想, 实现等价系统的动态解耦, 使闭环控制系统的传递函数矩阵为正规矩阵, 达到鲁棒 H_∞ 最优稳定; 进一步, 通过对等价解耦控制系统应用 l_∞ 最优控制方法, 又能使原闭环控制系统获得最优时域指标. 通过在某纸机3种定量和水分控制系统中的在线应用, 验证了数字控制器的最优性与鲁棒性.

关键词: 鲁棒性; 时域指标; 动态解耦; 正规矩阵; 行特征函数

中图分类号: TP13 **文献标识码:** A

Design and application of multivariable digital robust optimal controllers

LIU Xiang, WANG Wen-hai, SUN You-xian, YU Tao

(National Laboratory of Industrial Control Technology, Institute of Modern Control Engineering, Zhejiang University, Hangzhou Zhejiang 310027, China)

Abstract: For linear multivariable discrete-time control systems, a new design approach to robust optimal controllers is developed in this paper. By presenting a new design concept to select row characteristic functions for a multi-variable system, a robust decomposition method is built up to guarantee the normalization of the closed-loop transfer function matrix. The H_∞ robust stability and the optimal time domain indices for the closed-loop system are then achieved simultaneously by utilizing the l_∞ optimal control approach in its decoupling equivalent system. Finally, optimization and robustness of this digital controller are verified by an on-line application in a paper-making control system for three different indices of quantity and moisture.

Key words: robustness; time-domain indices; dynamic decoupling; normal matrix; row characteristic functions

1 引言(Introduction)

由线性系统理论^[1]可知, 对于一个由 $m \times m$ 维有理分式矩阵描述的线性多变量系统 $\hat{G}$, 存在单模矩阵 $\hat{U}$, $\hat{V}$, 使得 $\hat{P} = \hat{U}\hat{G}\hat{V}$ 成为Smith-McMillan标准形式. 由于这种分解是有理分式矩阵的一种规范形式, 因此, 许多研究多变量线性系统的优化问题都基于这样的分解方法, 如研究系统跟踪和抗干扰性能优化的 l_∞/l_1 优化问题^[2]. 然而, 由于单模矩阵不是酉矩阵, 因此, 这种规范形分解不适于鲁棒控制问题的研究. 文献[3]中指出, 由于正规矩阵的谱半径等于其最大奇异值, 如果能使系统的闭环传递函数为正规矩阵, 则系统能实现最优 H_∞ 范数鲁棒稳定性. 因此, 如何选择合适的补偿矩阵, 使得闭环系统矩阵为正规矩阵, 是设计鲁棒控制器的一个关键问题. 文献[3]给出的正规矩阵参数化设计方法, 可以使

闭环系统在达到 H_∞ 鲁棒稳定性的同时, 又具有满意的动态性能指标; 但是, 是否是系统能够得到的最优动态性能, 该方法不能保证. 如何使闭环系统既获得 H_∞ 鲁棒稳定性又有最优的 l_∞ 动态性能, 在已有的基于传递函数模型的设计方法中还没有直接的结果.

本文通过提出多变量系统行特征函数的设计思想, 引导对多变量系统的鲁棒结构分解, 得到一个与原系统等价的动态解耦系统, 从而分步实现多变量系统的 H_∞ 鲁棒稳定性和最优的 l_∞ 动态性能.

2 定义与引理(Definitions and lemma)

定义 1 (z 变换 $\hat{x}$) 一个因果序列 $x(n)$ 的 z 变换定义为

$$\hat{x} = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n}. \quad (1)$$

其中 z 是复变量. 因此, 一个 $m \times m$ 维线性离散系统的 z 传递函数可表示为 $\hat{P}$.

定义2 (行特征函数) 对于一个 $m \times m$ 维线性离散系统 $\hat{P}$, 其某一行的行特征函数是指反映该行元素中公有特性的有理真分式; 一般应包含该行中的所有非最小相位零点公因子的分子多项式和所有不稳定极点的分母多项式组成的有理真分式行公因子等.

对于多变量控制系统, 行特征函数很重要, 它的选取是否合理, 对鲁棒控制器的简约性有很大影响.

引理 对于在复平面单位圆外没有极点并且特征函数相同的诸函数矩阵, 正规的函数矩阵的 H_∞ 范数最小.

定理证明参见文献[3]中的引理5.7.4.

3 鲁棒最优控制系统设计(Design of a robust optimal controller)

设计鲁棒最优控制系统的目标是使多变量控制系统既获得鲁棒稳定性, 又获得最优时域指标. 设一个 $m \times m$ 维线性离散系统为 $\hat{P}$, $m \times m$ 维数字控制器为 $\hat{K}$, 控制系统是一个标准的反馈控制系统. 如果 $\hat{P}$ 是一个因果系统, 则 $\hat{P}$ 是一个有理真分式复矩阵.

定理 一个 $m \times m$ 维有理真分式非奇异复矩阵 $\hat{P}$ 恒可分解为

$$\hat{P} = \hat{U} \hat{T}_1 \hat{L}. \quad (2)$$

其中: $\hat{U}$ 是实常数酉矩阵, $\hat{T}_1$ 是对角的有理真分式复矩阵, $\hat{L}$ 是非奇异有理分式复矩阵.

证 $\hat{P}$ 的右MFD分解为 $\hat{P} = \hat{N} \hat{D}^{-1}$; $\hat{N}$, $\hat{D}$ 是复多项式矩阵. 总可以选择一个合适的实常数酉矩阵 $\hat{U}$, 特别地, 可选择 $\hat{U} = I$, 使得

$$\hat{N} = \hat{U} \hat{T}_0.$$

其中 $\hat{T}_0$ 是 $\hat{N}$ 经 $\hat{U}$ 简约后的非奇异复多项式矩阵.

从矩阵 $\hat{T}_0 \hat{D}^{-1}$ 的各行中分别取出合适的行特征函数, 得到对角阵 $\hat{T}_1$, 即

$$\hat{T}_0 \hat{D}^{-1} = \hat{T}_1 \hat{L}.$$

$\hat{L}$ 是非奇异有理分式复矩阵, $\hat{T}_1$ 是对角的有理真分式复矩阵. 进而得到

$$\hat{P} = \hat{D} \hat{T}_1 \hat{L}.$$

应用定理, $m \times m$ 维线性离散系统 $\hat{P}$ 可分解为

$$\hat{P} = \hat{D} \hat{T}_1 \hat{L}.$$

其中: $\hat{U}$ 是实常数酉矩阵, $\hat{T}_1$ 是对角的有理真分式复矩阵, $\hat{L}$ 是非奇异有理分式复矩阵.

闭环系统传递函数阵为

$$\hat{Q} = (I + \hat{P} \hat{K})^{-1} \hat{P} \hat{K} = (I + \hat{U} \hat{T}_1 \hat{L} \hat{K})^{-1} \hat{U} \hat{T}_1 \hat{L} \hat{K}. \quad (3)$$

另一方面, 如果控制对象是 $\hat{T}_1$, 而控制器是

$$\hat{K}_1 = \hat{L} \hat{K} \hat{U}. \quad (4)$$

闭环系统传递函数阵为

$$\begin{aligned} \hat{Q}_1 &= (I + \hat{T}_1 \hat{K}_1)^{-1} \hat{T}_1 \hat{K}_1 = \\ &= (I + \hat{T}_1 \hat{L} \hat{K} \hat{U})^{-1} \hat{T}_1 \hat{L} \hat{K} \hat{U} = \\ &= \hat{U}^{-1} (\hat{U}^{-1} + \hat{T}_1 \hat{L} \hat{K})^{-1} \hat{T}_1 \hat{L} \hat{K} \hat{U} = \\ &= \hat{U}^{-1} (I + \hat{U} \hat{T}_1 \hat{L} \hat{K})^{-1} \hat{U} \hat{T}_1 \hat{L} \hat{K} \hat{U}, \end{aligned} \quad (5)$$

因此得到

$$\hat{Q}_1 = \hat{U}^{-1} \hat{Q} \hat{U} = \hat{U}^* \hat{Q} \hat{U}. \quad (6)$$

$\hat{U}^*$ 是 $\hat{U}$ 的共轭转置矩阵. 称 $\hat{Q}_1$ 是 $\hat{Q}$ 的等价闭环系统.

以上分析可以看出, 对于对角的 $m \times m$ 维对象 $\hat{T}_1$, 如果设计控制器 $\hat{K}_1$ 为 $m \times m$ 维对角矩阵, 则等价闭环系统 $\hat{Q}_1$ 的传递函数矩阵也是对角矩阵; 由(6)式可知, 闭环系统 $\hat{Q}$ 的传递函数矩阵为正规矩阵, 根据引理, 只要等价闭环系统 $\hat{Q}$ 稳定, 则闭环系统 $\hat{Q}$ 实现 H_∞ 范数最小; 而且, 为保证系统的最优时域性能, $\hat{U}$ 应选为实常数酉矩阵; 应用中, 也可选为实常数正交矩阵. $\hat{T}_1$ 阵的选取很重要, 不仅要尽可能地反映系统特征, 还要兼顾到矩阵 $\hat{L}$ 的繁简.

对于 $m \times m$ 维对角的控制对象 $\hat{T}_1$, 如何设计 $m \times m$ 维对角控制器 $\hat{K}_1$, 使得闭环系统稳定且具有最优时域指标, 可参阅文献[4,5]介绍的线性规划设计方法, 因为等价闭环系统 $\hat{Q}_1$ 已经完全动态解耦, 可依照单变量的情形逐一设计. 综合以上, 多变量鲁棒最优数字控制器的设计算法可归纳如下:

1) 用定理给出的方法或其他合适的方法, $m \times m$ 维线性离散系统 $\hat{P}$ 可分解为

$$\hat{P} = \hat{U} \hat{T}_1 \hat{L}.$$

其中: $\hat{U}$ 是实的酉矩阵, $\hat{T}_1$ 是由 $\hat{U}^* \hat{P}$ 的各行特征函数组成的对角的有理真分式复矩阵, $\hat{L}$ 是非奇异有理分式复矩阵. 设计中应尽可能使矩阵 $\hat{L}$ 的阶次最小.

2) 对于 $m \times m$ 维对角的控制对象 $\hat{T}_1$, 按单变量时

域最优控制器的线性规划设计方法, 设计 $m \times m$ 维对角的最优控制器 $\hat{K}_1$, 参阅文献[4,5].

3) 计算 $\hat{U}^{-1}$, $\hat{L}^{-1}$.

4) 适当修正 $\hat{K}_1$ 的阶次, 保证鲁棒最优数字控制器

$$\hat{K} = \hat{L}^{-1} \hat{K}_1 \hat{U}^{-1} = \hat{L}^{-1} \hat{K}_1 \hat{U}^* \quad (7)$$

是 $m \times m$ 维有理真的复矩阵.

为保证矩阵 $\hat{L}$ 非奇异, 要求系统 $\hat{P}$ 非奇异, 这在工程实践中差不多总是成立的.

4 造纸机定量与水分控制系统中的应用 (Applications in the quantity and moisture control system of a paper-making machine)

某纸厂生产书写纸的纸机, 要求严格控制纸张的定量与水分. 通过机理分析与实验, 得到如下数学模型:

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{1.0k_1 e^{-s}}{T_1 s + 1} & \frac{0.35k_2}{T_2 s + 1} \\ \frac{0.5k_1 e^{-s}}{T_1 s + 1} & \frac{K_2}{T_2 s + 1} \end{bmatrix}. \quad (8)$$

其中被控变量为成纸的定量和水分. 控制变量为浆门开度和蒸气阀门开度. 该纸机常生产 100 g/m^2 , 80 g/m^2 , 和 120 g/m^2 3种不同定量规格的纸种. 经测定, 3种不同定量规格下的模型参数如表1所示.

表1 3种不同定量规格下的模型参数测定值

Table 1 Measure values of model parameters for three quantity standards

纸种规格 ($\text{g} \cdot \text{m}^{-2}$)	K_1	K_2	T_1	T_2
100	2.0	3.0	4.0	10.0
80	1.5	4.0	5.0	10.0
120	2.5	2.0	3.0	10.0

采样周期为1 min, 选择定量为 100 g/m^2 的模型为标称模型, 离散化后的模型为

$$\hat{G} = \begin{bmatrix} \frac{0.4424}{z(z-0.7788)} & \frac{0.0999}{z-0.9048} \\ \frac{0.2212}{z(z-0.7788)} & \frac{0.2856}{z-0.9048} \end{bmatrix}.$$

设计步骤:

1) 取酉矩阵 $\hat{U} = I$, $\hat{G}$ 可分解为

$$\hat{G} = \hat{U} \hat{T}_1 \hat{L},$$

$$\hat{T}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{z-0.7788} & 0 \\ 0 & \frac{1}{z-0.9048} \end{bmatrix},$$

$$\hat{L} = \begin{bmatrix} 0.4424/z & \frac{0.0999(z-0.7788)}{z-0.9048} \\ \frac{0.2212(z-0.9048)}{z(z-0.7788)} & 0.2856 \end{bmatrix};$$

2) 按文献[4]介绍的时域最优控制器的设计方法, 对于单位阶跃信号的输入, 设计最优控制器

$$\hat{k}_1 = \begin{bmatrix} \frac{z-0.7788}{z-1} & 0 \\ 0 & \frac{z-0.9048}{(z-1)} \end{bmatrix};$$

3) 计算 $\hat{L}^{-1}$:

$$\hat{L}^{-1} = \begin{bmatrix} 2.7395z & \frac{-0.9583z(z-0.7788)}{z-0.9048} \\ \frac{-2.1218(z-0.9048)}{z-0.7788} & 4.2436 \end{bmatrix};$$

4) 考虑到控制器的可实现性及系统响应的快速性, 添加因子 $1/(z+1)$, 得到鲁棒最优数字控制器

$$\hat{K} = \hat{L}^{-1} \hat{K}_1 =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{2.7395z(z-0.7788)}{(z-1)(z+1)} & \frac{-0.9583z(z-0.7788)}{(z-1)(z+1)} \\ \frac{-2.1218(z-0.9048)}{(z-1)(z+1)} & \frac{4.2436(z-0.9048)}{(z-1)(z+1)} \end{bmatrix}.$$

5) 控制结果(见图1).

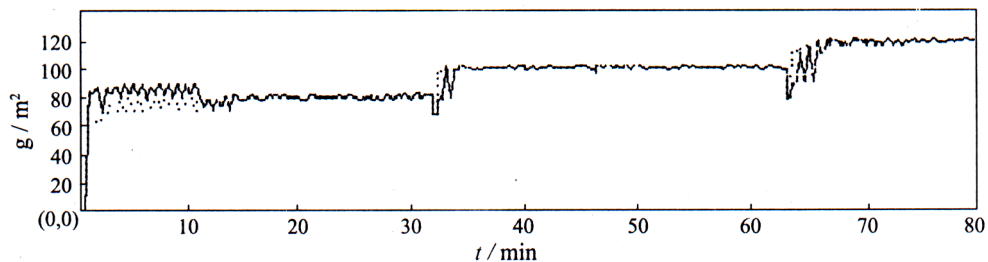


图1 纸机生产3种定量规格纸种的在线控制响应曲线

Fig. 1 On-line response curves of a paper-making machine for three quantity standards

该2850纸机生产中应用该控制器后, 实现了3种定量规格纸种生产的在线转换, 大大提高了生产效率, 降低了控制成本, 成纸产量提高4.2%, 成纸定量偏差降低50%, 成纸水分偏差降低45%, 造纸蒸汽消耗降低11%, 控制结果图1所示, 在从定量80 g/m²的纸种转换到定量100 g/m²的纸种的定量与水分过渡过程达到了最优; 在其他两个纸种的生产转换中实现了鲁棒稳定及静态无差, 并控制了超调量。

5 结论(Conclusion)

本文给出了一种新的多变量鲁棒最优控制系统的设计方法。这种方法通过应用多变量系统的行特征函数的设计思路, 经过系统的等价补偿变换, 使闭环系统的传递函数阵为正规矩阵, 从而实现闭环系统的 H_∞ 鲁棒最优; 同时, 通过应用单变量时域 l_∞ 最优控制器的设计方法(限于篇幅, 本文略), 并限定系统的左标架矩阵为实常数酉矩阵, 多变量闭环系统又可以实现时域指标 l_∞ 最优。值得进一步研究的是如何选择最合理的行特征函数, 使右标架矩阵具有最简化形式, 进而得到最简化的多变量鲁棒最优控制器的计算方法。

参考文献(References):

- [1] KAILATH T. *Linear System*[M]. Engle-wood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1980.
- [2] DAHLEH M A, PEARSON J B. Optimal rejection of persistent disturbances, robust stability, and mixed sensitivity minimization[J]. *IEEE Trans on Automatica Control*, 1988, 33(5): 722 – 731.
- [3] 高黛陵, 吴麒. 多变量频率域控制理论[M]. 北京: 清华大学出版社, 1998.
(GAO Dailing, WU Qi. *Multivariable Frequency Domain Control Theory*[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 1998.)
- [4] 刘翔, 孙优贤. 具有最优动态性能的鲁棒镇定控制器设计[J]. 控制与决策, 2000, 1(15): 11 – 14.
(LIU Xiang, SUN Youxian. Robust stabilizing controller design for optimal dynamic performance indexes[J]. *Control and Design*, 2000, 1(15): 11 – 14.)
- [5] 刘翔, 王文海, 孙优贤, 等. 线性离散状态空间的最优 l_∞ 控制器设计[J]. 控制理论与应用, 2001, 1(18): 51 – 54.
(LIU Xiang, WANG Wenhai, SUN Youxian, et al. Optimal l_∞ controller design for linear discrete-time state space model[J]. *Control Theory & Applications*, 2001, 1(18): 51 – 54.)
- [6] 孙优贤. 造纸过程的建模与控制[M]. 杭州: 浙江大学出版社, 1993.
(SUN Youxian. *Modeling and Control in Paper-Making Process*[M]. Hangzhou: Zhejiang University Press, 1993.)

作者简介:

刘翔 (1964—), 男, 副教授, 1987年清华大学自动化系毕业, 1999年在浙江大学控制系获得博士学位, 感兴趣的研究领域包括规划控制、鲁棒控制、智能生产调度等, E-mail: hzlls@zju.edu.cn; xliu6928cn@sina.com;

王文海 (1967—), 男, 副研究员, 感兴趣的研究领域是分布式计算机控制系统、生产过程自动化等;

孙优贤 (1940—), 男, 教授, 博士生导师, 中间工程院院士, 现任浙江大学控制工程科学研究所所长, 工业控制研究所所长, 1984年至1987年获德国洪堡奖学金, 长期从事过程控制、鲁棒控制理论及应用、 H_∞ 控制理论与应用、容错控制理论及应用研究以及造纸过程模型化和计算机控制, 发表论文300多篇, 著作10余本, 获各类科技进步奖20多项;

余涛 (1981—), 男, 硕士研究生, 感兴趣的研究领域是时滞系统的鲁棒控制。