

关于UKF方法的新探索及其在目标跟踪方面的应用

张树春, 胡广大, 刘思华

(哈尔滨工业大学 控制科学与工程系, 黑龙江 哈尔滨 150001)

摘要: 在跟踪和控制领域, 和被广泛采用的推广卡尔曼滤波(extended Kalman filter)方法相比较, 近年发展起来的Unscented卡尔曼滤波(Unscented Kalman filter)具有易于实现、计算量相当而精度较高等诸多优点. 本文深入探讨了这一方法, 并以目标跟踪为背景, 提出了两种基于Unscented变换的新的滤波方法, 分别在算法的精确和快速两个方向上进行了尝试, 仿真结果表明, 这种探索是行之有效的.

关键词: 非线性滤波; Unscented 变换; 迭代; 目标跟踪

中图分类号: TP202

文献标识码: A

New development of UKF and its applications in target tracking on re-entry

ZHANG Shu-chun, HU Guang-da, LIU Si-hua

(Department of Control Science and Engineering, Harbin Institute of Technology, Harbin Heilongjiang 150001, China)

Abstract: Compared with the widely used extended Kalman filter (EKF) in tracking and control community, the advantages of recently developed filtering algorithm called Unscented Kalman filter are significant with its ease to tune, better accuracy and same order of computational complexity. Based on the Unscented transformation, two new filtering algorithms are presented, intending to improve the precision and to raise the speed respectively. Performance and implementation in target tracking on reentry show their efficiency.

Key words: nonlinear filtering; Unscented transformation; iteration; target tracking

1 引言(Introduction)

从卡尔曼提出其著名的滤波方法以来, 线性系统的估计问题就已经得到了完美的解决. 但是从目标跟踪到飞行器导航, 从化工过程到图像处理——几乎所有的现实系统都包含这样或那样的非线性. 严格的非线性系统估计是一个十分困难的问题, 此问题在贝叶斯框架下最优解要求传递全概率密度函数(pdf), 由于此概率密度函数未加约束, 是不能用有限个参数来表示的, 因此任何实用的估计器必须采取某种逼近方法. 就目前来看, 所采用的逼近或者计算量大难以实现, 或者采用的假设过于简略不符合实际的过程和控制模型, 因此应用于线性系统的卡尔曼滤波仍是应用最为广泛的估计算法. 在将卡尔曼滤波推向非线性模型的应用过程中, 最常应用的方法就是将非线性模型线性化, 得到直接的结果就是推广卡尔曼滤波器和二阶滤波器^[1]. 但是几十年的应用经验表明, 推广卡尔曼滤波虽然保持了原滤波结构的优美形式, 但是精度不高, 只是在初始误差和噪声不大时, 才表现较好^[2]. 二阶滤波器虽然提高了精度, 但是由于要加入泰勒展开的二阶项, 因此滤

波方法显得愈加复杂而不实用.

和推广卡尔曼滤波的逼近非线性函数不同, SIMON J. JULIER等人提出的Unscented卡尔曼滤波采用了一种完全不同的思想, 即: 逼近一个概率分布比逼近一个非线性函数或变换要来得容易. 因而, 此方法采用一组满足特定条件(如满足给定的均值和方差)的点(sigma points), 这些点一一通过非线性变换, 然后再用经过变换的点逼近非线性变换的概率密度特性, 理论推导表明, 这种逼近对任意非线性都至少精确到二阶. 初看起来这种方法非常像粒子滤波, 但是: ① 这组点不是任意选定而是满足某些特定的性质, 和粒子滤波动辄成千上万的采样点数目相比, 此方法可以用非常少的一组点捕获到分布的高阶信息; ② 每个点都关联特定的权值, 这样的权值甚至不一定在(0,1)内取得^[3].

由于不必要计算非线性变换的导数而隐含具有二阶滤波器的精度, UKF算法短时间内在非线性滤波领域得到了广泛应用^[4~6]. ERICA.WAN等人又将此方法推广到机器学习领域用以训练神经网络, 同样取得令人满意的效果^[7]. UKF算法在国内也逐渐

被学所接受,目前见于报刊的学术成果主要是此非线性滤波方法替代推广卡尔曼滤波器在不同的应用领域内的体现.

作为UKF算法基础的Unscented变换(UT)思想是简单而巧妙的,在实际应用中更有着传统方法难以企及的优点,如何深入开发此算法,解决具体模型中特定的问题(即对精度和速度的具体要求),是一个新的挑战.

为了提高对非线性分布函数的估计精度,首先想到的就是增加采样点数满足高阶分布信息,这一方面包括算法原作者在内的许多学者已经进行了探索,本文在提高算法精度上采用了新的思想,即不增加采样点数目,而是在用标准算法得到状态估计值的基础上进行迭代,进而构造出一种基于UKF的迭代算法IUKF(iterated UKF);另外提出了一种比标准算法选用采样点数较少的滤波器结构RUKF(reduced sigma points UKF),用以提高滤波速度.

2 问题描述和准备(Problem statement and preparation)

首先将系统的动态模型和量测模型描述如下:

$$x(k+1) = f[x(k), u(k)] + w(k), \quad (1)$$

$$z(k) = h[x(k), u(k)] + \nu(k). \quad (2)$$

这里: $x(k)$ 是系统的状态, $u(k)$ 是输入向量, $w(k)$ 是由扰动和模型误差引起的过程噪声, $z(k)$ 是观测量, $\nu(k)$ 是加性的量测噪声. 假设噪声项 $w(k)$ 和 $\nu(k)$ 零均值并且 $\forall i, j$,

$$\begin{cases} E[w(i)w^T(j)] = \delta_{ij}Q(i), \\ E[\nu(i)\nu^T(j)] = \delta_{ij}R(i), \\ Ew(i)\nu(j) = 0. \end{cases} \quad (3)$$

最小均值平方误差(MMSE)估计 $x(k)$ 是一种条件均值. 令 $\hat{x}(i|j)$ 为在得到一直到观测量 j 条件下的 $x(i)$ 的均值,

$$\hat{x}(i|j) = E[x(i)|Z^j]. \quad (4)$$

此处 $Z^j = [z(1), \dots, z(j)]$, 这一估计的方差表示为 $P(i|j)$.

卡尔曼滤波器递归地传递 $x(k)$ 分布的前两阶矩, 在理想情况下, 预测量为

$$\hat{x}(k+1|k) = E[f[x(k), u(k)]|Z^k], \quad (5)$$

$$P(k+1|k) = E\{x(k+1) - \hat{x}(k+1|k)\} \times \{x(k+1) - \hat{x}(k+1|k)\}^T | Z^k. \quad (6)$$

在计算其均值和方差时所要用到的分布函数不能用有限个参数表示出来, 所以通常情况下要采取

一些逼近方法. 如果假设在任何时刻 k 的分布都是高斯的, 预测的更新按下式给出:

$$\begin{aligned} \hat{x}(k+1|k+1) = \\ \hat{x}(k+1|k) + W(K+1)V(k+1), \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} P(k+1|k+1) = \\ P(k+1|k) - W(k+1)P_{zz}(k+1|k)W^T(k+1). \end{aligned} \quad (8)$$

这里

$$\begin{aligned} V(k+1) &= z(k+1) - \hat{z}(k+1|k), \\ W(k+1) &= P_{zz}(k+1|k)P_{zz}^{-1}(k+1|k). \end{aligned}$$

注意到状态的方差和估计误差的方差是一致的, 这是因为估计是条件均值的原因.

推广卡尔曼滤波(EKF)在计算预测中的误差 $\tilde{x}(i|j) = x(i) - \hat{x}(i|j)$ 时, 采用的方法为将系统(1)在估计点 $\hat{x}(k|k)$ 上进行泰勒展开, 将展开式在一阶处截断得到

$$\tilde{x}(k+1|k) \approx \nabla f_x \tilde{x}(k|k) + w(k). \quad (9)$$

这里: ∇f_x 是 $f[\cdot]$ 关于 $x(k)$ 的雅可比矩阵, $w(k)$ 是过程噪声. 使用这一逼近, 状态预测方程为

$$\hat{x}(k+1|k) = f[\hat{x}(k|k), u(k)], \quad (10)$$

$$P(k+1|k) = \nabla f_x P(k|k) \nabla f_x^T + Q(k+1). \quad (11)$$

和EKF一样, UKF也是一种递归的MMSE估计器, 但是和前者不同, 它采用了一种完全不同的思想来逼近状态向量的后验分布. 状态仍然假设为高斯分布, 但是状态由 $2n_x + 1$ 个确定选择的采样点 (n_x 是状态向量的维数, 在本文以后出现也代表同样的意义). 这些采样点完全捕获了高斯随机向量的均值和方差, 当通过非线性系统, 采样点对后验均值和方差的逼近在任何非线性上都可以至少精确到二阶. 通用的UKF算法可以归纳为以下步骤:

1) 初始化. 给定

$$x_0 = E[x(0)], P_0 = E[(x(0) - x_0)(x(0) - x_0)^T]$$

的基础上, 按照如下规则选取采样点和它们的权值:

$$\begin{cases} \chi_0 = x_0, \omega_0 = \kappa / (n_x + \kappa), i = 0, \\ \chi_i = x_0 + (\sqrt{(n_x + \kappa)P_0})_i, \omega_i = 1 / [2(n_x + 1)], \\ i = 1, \dots, n_x \\ \chi_i = x_0 - (\sqrt{(n_x + \kappa)P_0})_i, \omega_i = 1 / [2(n_x + 1)], \\ i = n_x + 1, \dots, 2n_x. \end{cases} \quad (12)$$

2) 将各个采样点分别通过非线性系统模型

$$\xi_{k+1|k}(i) = f[\chi_i, u]. \quad (13)$$

3) 计算预测状态均值和方差:

$$\begin{cases} \hat{x}(k+1|k) = \sum_{i=0}^{2n_x} \omega_i \xi_{k+1|k}(i), \\ P(k+1|k) = \\ Q + \sum_{i=0}^{2n_x} \omega_i [\xi_{k+1|k}(i) - \hat{x}(k+1|k)] \times \\ [\xi_{k+1|k}(i) - \hat{x}(k+1|k)]^T. \end{cases} \quad (14)$$

4) 预测量测量采样点:

$$\zeta_{k+1|k}(i) = h[\xi_{k+1|k}(i), u]. \quad (15)$$

5) 预测量测量、方差和其与状态的互协方差:

$$\begin{cases} \hat{z}(k+1|k) = \sum_{i=0}^{2n_x} \omega_i \zeta_{k+1|k}(i), \\ P_{zz} = R(k+1) + \sum_{i=0}^{2n_x} \omega_i [\zeta_{k+1|k}(i) - \hat{z}(k+1|k) \\ 1|k][\zeta_{k+1|k}(i) - \hat{z}(k+1|k)]^T, \\ P_{xz} = \sum_{i=0}^{2n_x} \omega_i [\zeta_{k+1|k}(i) - \hat{z}(k+1|k) \\ 1|k][\xi_{k+1|k}(i) - \hat{x}(k+1|k)]^T. \end{cases} \quad (16)$$

6) 计算UKF增益, 更新状态和方差:

$$\begin{cases} W(k+1) = P_{xz} P_{zz}^{-1}, \\ \hat{x}(k+1|k+1) = \\ \hat{x}(k+1|k) + W(k+1)[z(k+1) - \hat{z}(k+1|k)], \\ P(k+1|k+1) = \\ P(k+1|k) - W(k+1)P_{zz}W(k+1)^T. \end{cases} \quad (17)$$

和EKF方法相比, UKF更精确、方便并且二者的计算量相当。

3 基于Unscented变换的新算法(New algorithms based on UT)

虽然UKF具有二阶精度, 但并不保证在应用中能涵盖具体的非线性特性。从这一方法的本质来说, 如果先验了解非线性系统的高阶分布信息, 可以利用更多的采样点来捕捉系统的高阶信息^[3], 但是实际应用中满足这样要求的系统并不多见, 怎样从更普遍意义上提高对系统的估计精度, 同时使选取采样点的过程不变得更为复杂, 是一个有意义的课题。

本文在处理这一问题受到了迭代卡尔曼滤波(IKF)思想的启发。迭代卡尔曼滤波在计算更新状态时将其视为一种最大后验(MAP)估计, 在上次滤波得到的估计值的基础上进行线性化, 得到一种迭代卡尔曼滤波结构, 就是一种最大后验逼近, 可以

证明这种逼近和高斯-牛顿寻优方法是等价的^[8]。

先简要回顾一下IKF更新公式。对任何一个由先验知识或收敛标准确定的自然数 i , 有更新:

$$\hat{x}^+ = x(i+1), P^+ = P(i+1).$$

$x(i)$ 和 $P(i)$ 是这样定义的:

$$\begin{cases} x_0 = \hat{x}, P_0 = P, \\ x_{i+1} = \hat{x} + W_i(z - h(x_i) - H_i(\hat{x} - x_i)), \\ P_{i+1} = (I - W_i H_i)P. \end{cases} \quad (18)$$

这里

$$H_i = h'(x_i), W_i = P H_i S^{-1}, S = H_i P H_i^T + R.$$

上面的方法如果只进行一次迭代就是EKF。从IKF方法可以看出重新进行线性化的点的精度很大程度决定了IKF方法的精度和在同一标准下的收敛速度, 笔者已经知道经过EKF方法得到的估计精度不高, 如果利用本文提到的UT方法, 利用其在精度和方便上面的优势, 给出一种基于Unscented变换的迭代滤波结构, 将是一种不错的选择。下面给出算法思路(具体参见图1)。

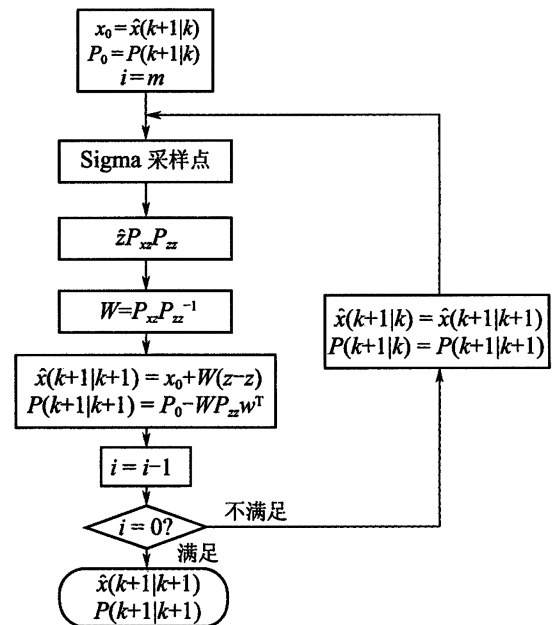


图1 算法流程

Fig. 1 Flowchart of the algorithm

考虑到标准UKF方法, 同样分为预测和更新两个阶段, 可以这样认为, 预测得出的一组sigma点已经是对非线性系统状态概率密度函数的逼近, 而在更新过程中, 利用得到的观测量和观测模型对预测值进行矫正, 如果对量测函数关系的设定和量测传感器的性能参数(在量测模型中表现为量测噪声)的先验了解是正确的, 那么这种矫正是有有效的, 即: 更新

值是对非线性系统状态概率密度函数更准确的逼近, 以此更新值所产生的sigma点作为预测值, 重新经过观测模型利用卡尔曼滤波机制得到的滤波值一定要优于不经迭代的滤波值. 算法流程图(见图1)中假定已经得到预测值, m 为滤波器迭代次数.

在讨论算法快速的问题上, 笔者回到UT的原始思想上来, 即UKF计算量完全取决于所取采样点数的多少, 这里结合减少的采样数点UT^[9]和卡尔曼滤波思想, 提出一种快速滤波算法RUKF. 理论上 $n_x + 1$ 个采样点可以捕获 n_x 维向量的均值和方差, 但是在应用中, 考虑到工程应用中高阶分布信息(这里主要是三阶中心矩)共性存在的问题, 采用 $n_x + 2$ 个点在满足均值方差的基础上, 来使三阶中心矩最小, 问题可以归结为: 给出一组权值点 $S = \{\omega_i, \chi_i\}$, $P_x(x)$ 代表概率密度函数, 满足

$$g[S, p_x(x)] = 0,$$

$$g[S, p_x(x)] = \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^p \omega_i - 1 \\ \sum_{i=0}^p \omega_i \chi_i - \bar{x} \\ \sum_{i=0}^p \omega_i \{\chi_i - \bar{x}\} \{\chi_i - \bar{x}\} - P_{xx} \end{bmatrix}, \quad (19)$$

$$\min_S c[S, p_x(x)]. \quad (20)$$

$c[S, p_x(x)]$ 是和三阶矩相关联的惩罚函数. 当然在确定惩罚函数的时候标准不一, 这里采用文献[3]的方法, 它选取采样点的时候从标量到高维向量, 每次在满足式(19)的基础上, 只使三阶矩中有限项为零, 避免了烦冗的向量求优过程. 选择完采样点后, 滤波器实现和标准的UKF是一样的.

4 重入大气层目标跟踪问题(Target tracking on re-entry)

本部分以重入大气层目标跟踪问题为例^[1,2], 将两种新算法和非线性滤波中常用的EKF, UKF, IKF进行应用和比较. 几何关系见图2.

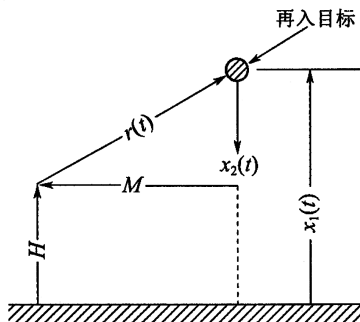


图2 跟踪问题的几何关系

Fig. 2 Geometrical relationship of the problem

$x_1(t)$ 为高度, $x_2(t)$ 为速度, m 为质量(constant), C_D 为阻力系数(constant), A 为物体参考面积(constant), ρ 为大气密度, H 为雷达高度, M 为雷达和落地点水平距离, $r(t)$ 为雷达距离物体实际距离.

假设重力的影响忽略不计, 空气密度 $\rho = \rho_0 e^{-\gamma x_1(t)}$, 其中 $\gamma = 5 \times 10^{-5}$, 定义弹道参数 $x_3 \triangleq C_D A \rho_0 / 2m$ 为常数. 在这些假设下, 状态方程可以表示为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 \triangleq f_1(x), \\ \dot{x}_2 = -e^{-\gamma x_1} x_2^2 x_3 \triangleq f_2(x), \\ \dot{x}_3 = 0 \triangleq f_3(x). \end{cases} \quad (21)$$

输出方程 $r(t)$ 为

$$r(t) = \sqrt{M^2 + [x_1(t) - H]^2}. \quad (22)$$

在离散时刻量测方程是

$$z_k = \sqrt{M^2 + [x_1(t) - H]^2} + \nu_k. \quad (23)$$

这里 ν_k 是离散高斯噪声零均值常方差, $E\{\nu_k^2\} = R$. 很明显, 状态方程和量测方程都具有严重的非线性. 设定弹道目标初始轨道初值 $x(0) = [3 \times 10^5 \quad 2 \times 10^4 \quad 10^{-3}]$, 初始估计和估计方差分别为

$$\hat{x}(0|0) = [3 \times 10^5 \quad 2 \times 10^4 \quad 3 \times 10^{-5}],$$

$$P(0|0) = \begin{bmatrix} 10^6 & 0 & 0 \\ 0 & 4 \times 10^6 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}.$$

初始方差阵表示的是对初始估计的不确定度, 在实际应用中, 他的选取往往取决于交接数据的传感器的性能(如位置雷达和测速雷达的性能参数). 雷达位于高度 $H(100000 \text{ ft})$, 离落地点水平距离 $M(100000 \text{ ft})$. 微分方程利用四阶龙格库塔方法进行数值积分, 步长 $h = 1/64 \text{ s}$, 每整秒时刻进行观测, 共取50次观测值. 量测噪声方差 $R = 10000 \text{ ft}^2$, 由于易掩盖线性化误差, 故过程噪声未被引入. IKF迭代9次, UIKF迭代2次. 通过50次蒙特卡洛仿真, 得到5种滤波器的性能表现(和参考文献[1, 2]对应, 文中计量单位采用英制单位, 单位符号ft表示英尺, s表示秒).

输出非线性最严重表现在10 s左右的时刻上(见图3~5), 在此处系统几乎是不可观的, 因此在此时刻附近所有滤波器估计误差都非常大. 可以看到, 整个估计过程中, EKF引入了估计偏差, 只是在后半段才缓慢趋于零偏, 这是在非线性处理中采用低阶精度线性化的结果, 同样的原因, IKF在误差估计中也

表现出类似的情况,但由于采用迭代逼近方法,其性能表现要好于EKF;由于隐含的二阶精度,UKF的表现要明显好于前两种滤波器;RUKF的表现要略逊于标准算法,一般来讲,虽然状态初始设定是高斯的,但是经过非线性变换,系统状态的其他时刻事实上也不是高斯分布的,因此无论标准算法的零三阶矩假定,还是RUKF的三阶矩最小假定,都不一定符合实际情况,但是标准算法的假定在统计上更符合随机事件的规律,因而在实际中更容易表现出好的性质。但这种表现并不是绝对的,因此在性能表现的某些时段上,RUKF并不比UKF差(如对 x_3 的性能估计),考虑到所采用采样点数和系统维数的关系(分

别为 $2n_x + 1$ 和 $n_x + 2$ 个采样点),这种算法在高维系统里会表现出更大的快速优势;IUUKF是所有滤波器中表现最好的,只比标准算法多一次迭代,就可以得到更良好的滤波结果,效果非常理想,同时注意到由于只利用量测非线性变换在观测时刻进行有限次的迭代,对运算时间要求甚少,不会象增加采样点数捕捉高阶分布信息那样的算法在整个运算期间都占用计算资源。几种滤波器占用CPU时间的比较图也说明了这一点。图中: E_h 为高度绝对误差, E_v 为速度绝对误差, E_{x_3} 为 x_3 的绝对误差, C_t 为与EKF占用的时间之比, S_f 为滤波器类别。

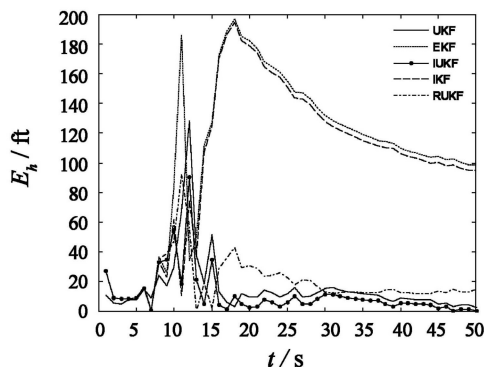


图3 位置估计误差的比较

Fig. 3 Comparison of the filter performances with respect to altitude estimation errors

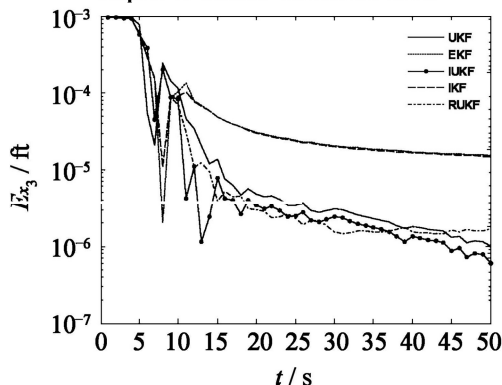
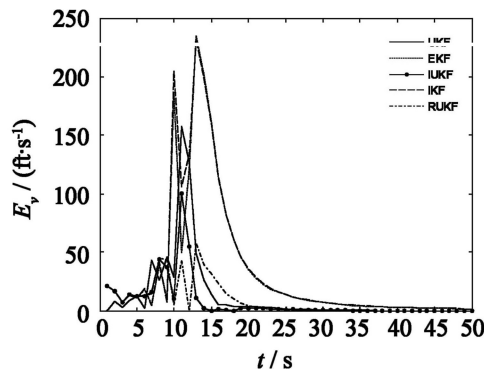
图5 参数 x_3 的估计误差比较Fig. 5 Comparison of the filter performances with respect to estimation errors in x_3 

图4 速度估计误差的比较

Fig. 4 Comparison of the filter performances with respect to velocity estimation errors

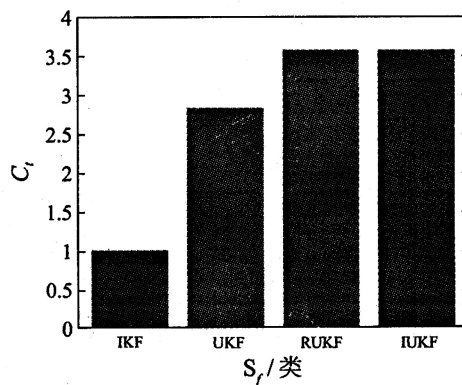


图6 滤波器算法复杂度的比较

Fig. 6 Comparison of the filter performances with respect to computational complexity

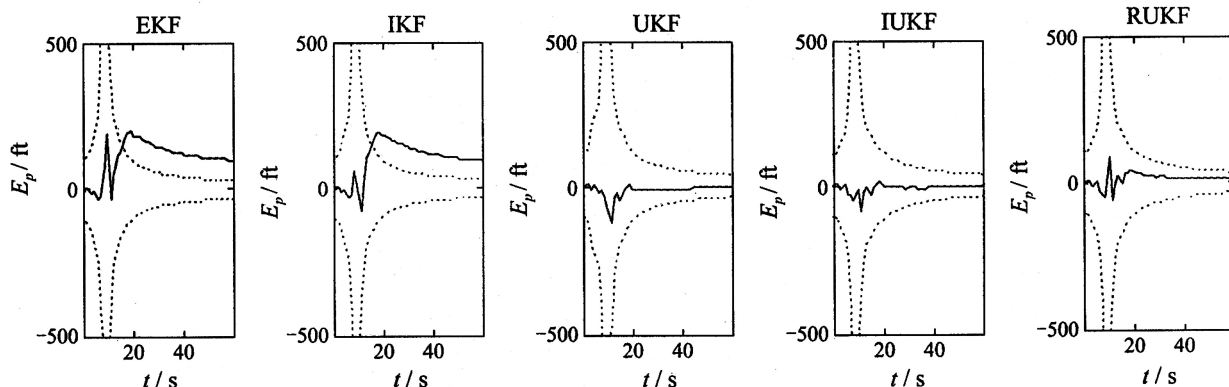


图7 5种滤波器的平均位置误差

Fig. 7 Mean position error of five filters

同时本文验证了滤波器的相容性质(见图7),在几个滤波器的估计中,取各个滤波器估计方差阵对角线的值开方,作为标准偏差界.如果滤波器是相容的,则估计误差95%的时间内应该位于此边界内.取位置估计作为评价标准.在图中可以看出,EKF的误差估计漂移出了边界,而在低阶线性化基础上进行迭代寻优的IKF方法在这种环境设定下也是不相容的,它们不适合在这种情况下的应用;其他3种基于UT的滤波器则表现了较好的相容性.图中 E_p 为位置误差.

5 结论(Conclusion)

UKF算法日益成为一种标准的非线性滤波算法,本文针对在非线形滤波问题中出现的进一步的要求,对算法的精确和快速两方面做了较深入的探讨,并将算法应用于重入大气层阶段的目标跟踪问题,仿真结果表明,所提出的算法是现实有效的.

参考文献(References):

- [1] ATHANS M, WISHNER R P, BERTOLINI A. Suboptimal state estimation for continuous-time nonlinear systems form discrete noise measurements [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1968, 13(5): 504 – 515.
- [2] BAR-SHALOM Y, LI X R. *Estimation with Applications to Tracking and Navigation*[M]. New York: John Wiley & Sons, 2001: 387.
- [3] JULIER S, UHLMANN J, DURRANT-WHITE H F. A new method for nonlinear transformation of means and covariances in filters and estimators [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2000,45(3): 477 – 482.
- [4] FARINA A, RISTIC B, BENVENUTI D. Tracking a ballistic target: comparison of several non-linear filters[J]. *IEEE Trans on Aerospace Electronic System*, 2002, 38(3): 854 – 867.
- [5] RISTIC B M, ARULAMPALAM S. *Tracking a maneuvering target using angle-only measurements: algorithms and performance*[EB/OL]. 2003. www.elsevier.com/locate/sigpro.
- [6] MINVIELLE P. Tracking a ballistic re-entry vehicle with a sequential Monte-Carlo filter[C] // *Proc of Aerospace Conference*. Toulouse, France: IEEE Press, 2002: 1773 – 1787.
- [7] WAN E A, van der MERWE R. The unscented Kalman filter for nonlinear estimation[C] // *Adaptive Systems for Signal Processing, Communications, and Control Symposium* 2000. Lake Louise, Aita, Canada: IEEE Press, 2000: 153 – 158.
- [8] BELL B M, CATHEY F W. The iterated kalman filter update as a Gauss-Newton method[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1993, 38(2): 294 – 297.
- [9] JULIER S, UHLMANN J. Reduced sigma point filters for the propagation of means and covariances through nonlinear transformations[C] // *Proc of American Control Conference*. Anchorage, Alaska: ACC Press, 2002: 887 – 892.

作者简介:

张树春 (1974—), 男, 博士研究生, 研究方向为信号处理与非线性滤波, E-mail: zsc8939@sina.com.cn;

胡广大 (1962—), 男, 教授, 博士生导师, 研究方向为计算机控制、非线性控制、控制系统数值仿真;

刘思华 (1971—), 男, 博士研究生, 研究方向为鲁棒控制与计算机控制.