第 23 卷第 4 期
2006 年 8 月

控 制 理 论 与 应 用
Control Theory & Applications

Vol. 23 No. 4
Aug. 2006

文章编号：1000−8152(2006)04−0606−05

不确定非线性切换系统的鲁棒H_∞控制

赵胜芝[1,2], 赵　军[1], 张庆灵[1], 付　俊[1]

(1. 东北大学 教育部暨辽宁省流程工业综合自动化重点实验室, 辽宁 沈阳 110004; 2. 辽宁大学 数学系, 辽宁 沈阳 110036)

摘要: 讨论了一类不确定非线性切换系统的鲁棒H_∞控制问题. 首先, 基于多Lyapunov 函数方法, 设计状态反馈控制器以及切换律, 使得对于所有允许的不确定性, 相应的闭环系统渐近稳定又具有指定的L_2-增益. 该问题可解的充分条件以一组含有纯量函数的偏微分不等式形式给出, 此偏微分不等式较一般Hamilton-Jacobi不等式更具可解性. 所提出的方法不要求任何一个子系统渐近稳定. 接着作为应用, 借助混杂状态反馈策略讨论了非切换不确定非线性系统的鲁棒H_∞控制问题. 最后通过一个简单例子说明了控制设计方法的可行性.

关键词: 非线性切换系统; H_∞控制; 多Lyapunov 函数

中图分类号: TP273　　**文献标识码**: A

Robust H-infinity control for uncertain switched nonlinear systems

ZHAO Sheng-zhi[1,2], ZHAO Jun[1], ZHANG Qing-ling[1], FU Jun[1]

(1. Key Laboratory of Process Industry Automation, Ministry of Education, Northeastern University, Shenyang Liaoning 110004, China;
2. Department of Mathematics, Liaoning University, Shenyang Liaoning 110036, China)

Abstract: The robust H-infinity control problem for uncertain switched nonlinear systems is discussed in this paper. First, based on multiple Lyapunov function technique, for all admissible uncertainties, the state feedback controllers for each subsystem and switching laws to guarantee both internal stability of the resulting closed-loop systems and prescribed L_2-gain from disturbance input to the controlled output are designed respectively. The sufficient condition for the problem to be solvable is also derived in terms of partial differential inequalities with scale functions, which are more feasible to be solved than general Hamilton-Jacobi inequalities. This method is suitable for the case where none of subsystems is asymptotically stable. Then, as an application, a hybrid state feedback technique to solve the robust H-infinity control problem for non-switched nonlinear systems is presented. Finally, a simple example is given to illustrate the proposed method.

Key words: switched nonlinear systems; H_∞ control; multiple Lyapunov functions

1　引言(Introduction)

切换系统是由一组连续子系统以及协调子系统间切换的切换规则组成. 由于许多实际系统本身就需要借助于几个动态系统来描述其行为, 以及切换控制器可以较一般单个连续控制器具有更强大的优势, 智能控制即是基于不同控制器间切换的思想. 因此许多研究集中于切换系统性能分析尤其是稳定性分析[1~4].

连续动态和离散动态之间的相互作用使得切换系统呈现出较为丰富与复杂的行为方式. 构造切换律使得切换系统渐近稳定是涉及切换系统稳定性的一个基本问题. 多Lyapunov 函数方法是分析切换系统在某一切换律下渐近稳定的最常用工具[5]. 粗略地说, 多Lyapunov 函数即是: 每个子系统对应一个函数, 该函数只有在该子系统被激活的时间段内是其Lyapunov函数, 只要在同一子系统被激活的相邻时间段上的初始点处相应的Lyapunov函数是单调降的, 就可保证切换系统渐近稳定. 这种方法只需各个子系统在其运行时存在Lyapunov 函数, 而不必在整个运行期间内存在Lyapunov 函数, 所以每个子系统都不必是稳定的. 由多Lyapunov 函数技术已派生出了各种各样的方法, 如锥切换方法[6], 驻留时间方法[7], 线性规划方法[8]等均用来讨论切换系统的稳定性.

与切换系统的稳定性结果相比, 关于切换系统H_∞控制问题的结果还十分有限. 文献[9]借助于多Lyapunov 函数方法以LMI形式针对线性切换系统讨论了H_∞控制问题. 只要不稳定子系统的停留

收稿日期: 2005−02−01; 收修改稿日期: 2005−10−18.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (60574013, 60274009); 辽宁省自然科学基金资助项目 (20032020).

时间相对短, 利用平均驻留时间方法, 就可保证子系统不全是Hurwitz稳定的切换系统的H_∞控制问题可解[10,11]. 文献[12]分别利用共同Lyapunov函数及单Lyapunov函数技术研究了一类级联非线性切换系统的H_∞控制问题.

本文讨论系统状态及输入通道均含有不确定性的非线性切换系统的鲁棒H_∞控制问题. 基于多Lyapunov函数方法, 通过设计状态反馈控制器以及设计切换律使得相应的切换系统渐近稳定同时具有指定的L_2–增益. 本文指出若一组含有纯量函数的偏微分不等式各自都有解, 则这类系统的H_∞控制问题可解. 由于连续状态反馈H_∞控制问题通常要求解Hamilton-Jacobi不等式, 而Hamilton-Jacobi不等式不易求解，且没有通用的解法, 故借助于混杂状态反馈策略本文又讨论了不确定非线性系统的鲁棒H_∞控制问题.

2　问题描述(Problem formulation)

考虑不确定系统

$$\begin{cases} \dot{x} = f_i(x) + \Delta f_i(x) + [g_i(x) + \\ \qquad \Delta g_i(x)]u_i + p_i(x)w, \\ z = h_i(x) + k_i(x)u_i, \\ i = 1, \cdots, m. \end{cases} \tag{1}$$

其中: $x \in \mathbb{R}^n$是状态, $z \in \mathbb{R}^s$为被控输出, $w_i \in \mathbb{R}^l$为干扰输入, $u_i \in \mathbb{R}^q$是控制输入, $f_i(x), g_i(x), p_i(x), h_i(x), k_i(x)$是已知的光滑函数,且$f_i(0) = 0, h_i(0) = 0, \Delta f_i(x), \Delta g_i(x)$是未知的光滑函数, $i = 1, \cdots, m$. 关于不确定性, 使用文献中常用的假设条件[13,14]:

假设 1　$\Delta f_i(x) = e_i(x)\delta_i(x)$, $\delta_i(0) = 0$, $\|\delta_i\|^2 \leqslant \|v_i\|^2$, δ_i是未知函数, v_i是已知光滑函数,$i = 1, \cdots, m$.

假设 2　$\Delta g_i(x)\Delta g_i^{\mathrm{T}}(x) \leqslant G_i(x)G_i^{\mathrm{T}}(x)$,　Δg_i是未知函数,G_i是已知光滑函数, $i = 1, \cdots, m$.

假设 3　$k_i^{\mathrm{T}}[h_i, k_i] = [0, I], i = 1, \cdots, m$.

本文讨论系统(1)的鲁棒H_∞控制问题, 即: 对任给的常数$r > 0$, 寻找非线性状态反馈$u_i(x), u_i(0) = 0(i = 1, \cdots, m)$, 设计切换律$\sigma(x(t)) : [0, +\infty) \to \underline{m} = \{1, \cdots, m\}$,使得对任何允许的不确定性，闭环系统

$$\begin{cases} \dot{x} = f_\sigma(x) + \Delta f_\sigma(x) + [g_\sigma(x) + \\ \qquad \Delta g_\sigma(x)]u_\sigma(x) + p_\sigma(x)w, \\ z = h_\sigma(x) + k_\sigma(x)u_\sigma \end{cases} \tag{2}$$

满足

i) 当$w \equiv 0$时, 渐近稳定;

ii) 当$x(0) = 0$时, 从干扰输入到被控输出的L_2–增益不大于r, 即

$$\|z\|_T \leqslant r\,\|w\|_T\,,\ \forall w \in L_2(0, T).$$

符号$\|x\|^2, \|x\|_T$分别表示$x^{\mathrm{T}}x, [\int_0^T x^{\mathrm{T}}x\mathrm{d}t]^{1/2}$, $L_2(0, T)$表示满足$\|x(t)\|_T < \infty$的向量值函数的集合. 记$V(x(t_i))$为$V(t_i)$,$i = 0, 1, 2, \cdots$.

若有一个子系统的鲁棒H_∞控制问题可解, 则切换系统(1)的鲁棒H_∞控制问题就是平凡的. 故假设每个子系统的鲁棒H_∞控制问题都不可解.

3　主要结果(Main results)

定理 1　若假设1～3成立,且存在标量函数$\lambda_i(x) > 0$, $\xi_i(x) > 0$, $\beta_{ij}(x) \geqslant 0(i, j = 1, 2, \cdots, m)$和正定径向无界光滑函数$V_i(x)(i = 1, 2, \cdots, m)$满足

$$\frac{\partial V_i}{\partial x}f_i + \frac{\partial V_i}{\partial x}(\frac{1}{4\lambda_i^2}e_ie_i^{\mathrm{T}} + \frac{1}{4r^2}p_ip_i^{\mathrm{T}} + \frac{1}{4\xi_i^2}G_iG_i^{\mathrm{T}} - \frac{1}{4(1+\xi_i^2)}g_ig_i^{\mathrm{T}})\frac{\partial^{\mathrm{T}}V_i}{\partial x} + (\lambda_i^2v_i^{\mathrm{T}}v_i + h_i^{\mathrm{T}}h_i) + \sum_{j=1}^{m}\beta_{ij}(V_i - V_j) < 0, \forall x \neq 0, \tag{3}$$

则切换系统(1)的鲁棒H_∞控制问题可解.

证　对$i = 1, \cdots, m$, 取

$$u_i(x) = -\frac{1}{2(1+\xi_i^2)}g_i^{\mathrm{T}}(x)\frac{\partial V_i^{\mathrm{T}}(x)}{\partial x}. \tag{4}$$

令

$$\begin{cases} \Omega_i = \{x \in \mathbb{R}^n \,|V_i(x) \geqslant V_j(x), \forall j \in \underline{m}, x \neq 0\}, \\ i = 1, \cdots, m. \end{cases} \tag{5}$$

对$\forall x \in \mathbb{R}^n\backslash\{0\}$, 取$i = \arg\max\limits_{j\in\underline{m}}\{V_j(x)\}$, 则$x \in \Omega_i$. 易知$\mathbb{R}^n\backslash\{0\} = \bigcup\limits_{i\in\underline{m}}\Omega_i$. 令$\tilde{\Omega}_1 = \Omega_1$, $\tilde{\Omega}_i = \Omega_i - \bigcup\limits_{j=1}^{i-1}\tilde{\Omega}_j$, $i = 2, \cdots, m$. 则有$\tilde{\Omega}_i \cap \tilde{\Omega}_j = \phi$, $\forall i, j \in \underline{m}, i \neq j, \mathbb{R}^n\backslash\{0\} = \bigcup\limits_{i\in\underline{m}}\tilde{\Omega}_i$.当$x \in \tilde{\Omega}_i$时,由不等式(3)有

$$\frac{\partial V_i}{\partial x}f_i + \frac{\partial V_i}{\partial x}(\frac{1}{4\lambda_i^2}e_ie_i^{\mathrm{T}} + \frac{1}{4r^2}p_ip_i^{\mathrm{T}} + \frac{1}{4\xi_i^2}G_iG_i^{\mathrm{T}} - \frac{1}{4(1+\xi_i^2)}g_ig_i^{\mathrm{T}})\frac{\partial^{\mathrm{T}}V_i}{\partial x} + (\lambda_i^2v_i^{\mathrm{T}}v_i + h_i^{\mathrm{T}}h_i) < 0. \tag{6}$$

考虑系统(2), 取切换律为

$$\text{当}x(t) \in \tilde{\Omega}_i\text{时}, \sigma(x(t)) = i. \tag{7}$$

按照切换律(7), 设以$x(0)$为初始状态的切换序列为

$$\Sigma = \{x(0),(i_0,t_0),(i_1,t_1),\cdots,(i_j,t_j),\cdots \\ |i_j \in \{1,\cdots,m\}\ ,j\in N\}, \tag{8}$$

它表示在t_j时刻, 第i_j个子系统被激活. 对$\forall j = 0,1,\cdots$, 当第i_j个子系统被激活时, 注意到式(4) (6)和假设1~3, 有

$$\begin{aligned}
&z^{\mathrm T}z - r^2w^{\mathrm T}w + \dot V_{i_j} = \\
&\frac{\partial V_{i_j}}{\partial x}(f_{i_j} + \Delta f_{i_j} + (g_{i_j} + \Delta g_{i_j})u_{i_j} + p_{i_j}w) + \\
&h_{i_j}^{\mathrm T}h_{i_j} + u_{i_j}^{\mathrm T}u_{i_j} - r^2w^{\mathrm T}w \leqslant \\
&\frac{\partial V_{i_j}}{\partial x}f_{i_j} + \frac{1}{4\lambda_{i_j}^2}\frac{\partial V_{i_j}}{\partial x}e_{i_j}e_{i_j}^{\mathrm T}\frac{\partial^{\mathrm T}V_{i_j}}{\partial x} + \lambda_{i_j}^2v_{i_j}^{\mathrm T}v_{i_j} + \\
&\frac{1}{4r^2}\frac{\partial V_{i_j}}{\partial x}p_{i_j}p_{i_j}^{\mathrm T}\frac{\partial^{\mathrm T}V_{i_j}}{\partial x} + r^2w^{\mathrm T}w - r^2w^{\mathrm T}w + h_{i_j}^{\mathrm T}h_{i_j} + \\
&\frac{\partial V_{i_j}}{\partial x}g_{i_j}u_{i_j} + \frac{1}{4\xi_{i_j}^2}\frac{\partial V_{i_j}}{\partial x}G_{i_j}G_{i_j}^{\mathrm T}\frac{\partial^{\mathrm T}V_{i_j}}{\partial x} + \xi_{i_j}^2u_{i_j}^{\mathrm T}u_{i_j} + u_{i_j}^{\mathrm T}u_{i_j} \leqslant \\
&\frac{\partial V_{i_j}}{\partial x}f_{i_j} + \frac{1}{4\lambda_{i_j}^2}\frac{\partial V_{i_j}}{\partial x}e_{i_j}e_{i_j}^{\mathrm T}\frac{\partial^{\mathrm T}V_{i_j}}{\partial x} + \lambda_{i_j}^2v_{i_j}^{\mathrm T}v_{i_j} + \\
&\frac{1}{4r^2}\frac{\partial V_{i_j}}{\partial x}p_{i_j}p_{i_j}^{\mathrm T}\frac{\partial^{\mathrm T}V_{i_j}}{\partial x} + h_{i_j}^{\mathrm T}h_{i_j} + (1+\xi_{i_j}^2)[u_{i_j} + \\
&\frac{1}{2(1+\xi_{i_j}^2)}g_{i_j}^{\mathrm T}\frac{\partial^{\mathrm T}V_{i_j}}{\partial x}]^{\mathrm T}[u_{i_j} + \frac{1}{2(1+\xi_{i_j}^2)}g_{i_j}^{\mathrm T}\frac{\partial^{\mathrm T}V_{i_j}}{\partial x}] - \\
&\frac{1}{4(1+\xi_{i_j}^2)}\frac{\partial V_{i_j}}{\partial x}g_{i_j}g_{i_j}^{\mathrm T}\frac{\partial^{\mathrm T}V_{i_j}}{\partial x} + \frac{1}{4\xi_{i_j}^2}\frac{\partial V_{i_j}}{\partial x}G_{i_j}G_{i_j}^{\mathrm T}\frac{\partial^{\mathrm T}V_{i_j}}{\partial x} \leqslant \\
&\frac{\partial V_{i_j}}{\partial x}f_{i_j} + \frac{\partial V_{i_j}}{\partial x}(\frac{1}{4\lambda_{i_j}^2}e_{i_j}e_{i_j}^{\mathrm T} + \frac{1}{4r^2}p_{i_j}p_{i_j}^{\mathrm T} + \\
&\frac{1}{4\xi_{i_j}^2}G_{i_j}G_{i_j}^{\mathrm T} - \frac{1}{4(1+\xi_{i_j}^2)}g_{i_j}g_{i_j}^{\mathrm T})\frac{\partial^{\mathrm T}V_{i_j}}{\partial x} + \\
&(\lambda_{i_j}^2v_{i_j}^{\mathrm T}v_{i_j} + h_{i_j}^{\mathrm T}h_{i_j}) < 0,
\end{aligned}$$

即

$$z^{\mathrm T}z - r^2w^{\mathrm T}w + \dot V_{i_j} < 0, \forall x \neq 0. \tag{9}$$

假设$t_0 = 0$, $x(0) = 0$, $T \in [t_M, t_{M+1})$, 令$J = \int_0^T(\|z\|^2 - r^2\|w\|^2)\mathrm{d}t$, 则

$$\begin{aligned}
J = &\sum_{j=0}^{M-1}[\int_{t_j}^{t_{j+1}}(z^{\mathrm T}z - r^2w^{\mathrm T}w + \dot V_{i_j})\mathrm{d}t + V_{i_j}(t_j) - \\
&V_{i_j}(t_{j+1})] + \int_{t_M}^{T}(z^{\mathrm T}z - r^2w^{\mathrm T}w + \dot V_{i_M})\mathrm{d}t + \\
&V_{i_M}(t_M) - V_{i_M}(T) = \\
&\sum_{j=0}^{M-1}\int_{t_j}^{t_{j+1}}(z^{\mathrm T}z - r^2w^{\mathrm T}w + \dot V_{i_j})\mathrm{d}t + \\
&\int_{t_M}^{T}(z^{\mathrm T}z - r^2w^{\mathrm T}w + \dot V_{i_M})\mathrm{d}t + \\
&\sum_{j=0}^{M-1}(V_{i_{j+1}}(t_{j+1}) - V_{i_j}(t_{j+1})) + V_{i_0}(t_0) - V_{i_M}(T),
\end{aligned}$$

由于在切换时刻有$V_{i_{j+1}}(t_{j+1}) = V_{i_j}(t_{j+1})(j = 0,1,\cdots,M-1)$, 以及$V_{i_0}(t_0) = 0$, 故

$$\begin{aligned}
J \leqslant &\sum_{j=0}^{M-1}\int_{t_j}^{t_{j+1}}(z^{\mathrm T}z - r^2w^{\mathrm T}w + \dot V_{i_j})\mathrm{d}t + \\
&\int_{t_M}^{T}(z^{\mathrm T}z - r^2w^{\mathrm T}w + \dot V_{i_M})\mathrm{d}t.
\end{aligned} \tag{10}$$

由式 (9) (10)有$J \leqslant 0$, 故 $\|z\|_T \leqslant r\|w\|_T$. 当 $w \equiv 0$时,由式 (9)有 $\dot V_{i_j} \leqslant z^{\mathrm T}z + \dot V_{i_j} < 0$, 又由式 (5) (7)易知$V_{\sigma(t_j)}(t_j) \leqslant \lim\limits_{t\to t_j^-}V_{\sigma(t)}(t)$, 所以切换系统 (2) (4) (7) 渐近稳定. 证毕.

注 1 由于引入了和式$\sum\limits_{j=1}^{m}\beta_{ij}(V_i - V_j)$, 而该和式会随着$x(t)$的不同而改变符号, 又由于纯量函数$\lambda_i(x), \xi_i(x)$的引入, 使得不等式(3)较一般Hamilton-Jacobi不等式更具可解性[13,14].

注 2 由定理1可知, 若对$\forall x \in \mathbb{R}^n/\{0\}$, 式(6)有解就能够使得第$i$个子系统的鲁棒$\mathrm{H}_\infty$控制问题可解. 而在定理1中, 只有当$x \in \tilde\Omega_i$时才保证式(6)成立. 这说明式(3)并不要求子系统的鲁棒H_∞控制问题可解. 即本文结果可以在子系统的鲁棒H_∞控制问题都不可解时成立. 同样道理定理1不要求任何一个子系统是渐近稳定的.

注 3 在线性切换系统情形，定理1与文献[10]中结果相吻合.

4 不确定非线性系统的混杂鲁棒H_∞控制(Hybrid robust H_∞control for uncertain nonlinear systems)

本节考虑不确定系统

$$\begin{cases}\dot x = f(x) + \Delta f(x) + [g(x) + \Delta g(x)]u + p(x)w, \\ z = h(x) + k(x)u\end{cases} \tag{11}$$

的混杂鲁棒H_∞控制问题, 其中: $x \in \mathbb{R}^n$是状态, $w \in \mathbb{R}^l$为干扰输入, $z \in \mathbb{R}^s$为被控输出,$f(x), g(x), p(x), h(x), k(x)$是已知的光滑函数,且 $f(0) = 0, h(0) = 0$. 系统 (11)满足下面条件:

假设 4 $\Delta f(x) = e(x)\delta(x), \delta(0) = 0, \|\delta\|^2 \leqslant \|v\|^2$, δ是未知函数, v是已知函数.

假设 5 $\Delta g(x)\Delta g^{\mathrm T}(x) \leqslant G(x)G^{\mathrm T}(x)$, Δg是未知函数,G是已知函数.

假设 6 $k^{\mathrm T}[h,k] = [0,I]$.

从文献[13]知, 若某个Hamilton-Jacobi不等式有解，则存在连续状态反馈使得系统(11)的鲁棒H_∞控制问题可解. 当Hamilton-Jacobi不等式不易求解或不可解时, 这里采用一种混杂状态反馈求解系统(11)的鲁棒H_∞控制问题，即: 对任给的常数$r > 0$, 寻找非线性状态反馈$u_i(x), u_i(0) = 0, i =$

$1,\cdots,m$,设计切换律$\sigma(x(t)):[0,+\infty)\to\underline{m}=\{1,\cdots,m\}$,使得对任何不确定性, 闭环系统

$$\begin{cases}\dot{x}=f(x)+\Delta f(x)+[g(x)+\Delta g(x)]u_\sigma(x)+p(x)w,\\ z=h(x)+k(x)u_\sigma\end{cases}\tag{12}$$

满足　i) 当 $w\equiv 0$时, 渐近稳定;

ii) 当 $x(0)=0$时, 从干扰输入到被控输出的L_2–增益不大于r, 即

$$\|z\|_T\leqslant r\,\|w\|_T,\ \forall w\in L_2(0,T).$$

由定理1容易得到下面结果.

定理 2　若假设4∼6成立, 且存在标量函数$\lambda_i(x)>0,\xi_i(x)>0,\ \beta_{ij}(x)\geqslant 0(i,j=1,\cdots,m)$和正定径向无界光滑函数$V_i(x)(i=1,\cdots,m)$满足

$$\frac{\partial V_i}{\partial x}f+\frac{\partial V_i}{\partial x}(\frac{1}{4\lambda_i^2}ee^{\mathrm{T}}+\frac{1}{4r^2}pp^{\mathrm{T}}+\frac{1}{4\xi_i^2}GG^{\mathrm{T}}-\frac{1}{4(1+\xi_i^2)}gg^{\mathrm{T}})\frac{\partial^{\mathrm{T}}V_i}{\partial x}+(\lambda_i^2v^{\mathrm{T}}v+h^{\mathrm{T}}h)+\sum_{j=1}^{m}\beta_{ij}(V_i-V_j)<0,\ \forall x\neq 0,\tag{13}$$

则混杂状态反馈控制器 $u_i(x)=-\frac{1}{2(1+\xi_i^2)}g^{\mathrm{T}}(x)\frac{\partial V_i^{\mathrm{T}}(x)}{\partial x}(i=1,\cdots,m)$以及切换律 $\sigma(t)=\min_i\{i:i=\arg\max_{j\in\underline{m}}\{V_j(x(t))\}\}$使得系统(11)的鲁棒$H_\infty$控制问题可解.

5　例子(Example)

考虑系统

$$\begin{cases}\dot{x}=-x\,|x|+\Delta\delta+w+(\sqrt{3}+x^2)u,\\ z=u.\end{cases}\tag{14}$$

其中$|\Delta\delta|\leqslant|x|$. 利用Hamilton-Jacobi不等式不易求出该系统连续状态反馈H_∞控制问题的解. 实际上, 不等式

$$-x\,|x|\,\frac{\partial V}{\partial x}+\frac{1}{4}[2+\frac{1}{r^2}-(\sqrt{3}+x^2)^2](\frac{\partial V}{\partial x})^2+\frac{1}{2}x^2\leqslant 0\tag{15}$$

为系统(14)的Hamilton-Jacobi不等式. 若取$r=1$, 则上式为

$$-x\,|x|\,\frac{\partial V}{\partial x}+\frac{1}{4}[-(2\sqrt{3}x^2+x^4)](\frac{\partial V}{\partial x})^2+\frac{1}{2}x^2\leqslant 0.\tag{16}$$

由于V是光滑正定函数, 有$\frac{\partial V}{\partial x}|_{x=0}=0$, 显然式(16)无解.

以下借助第4节的方法为系统(14)设计混杂H_∞控制器. 当$x\leqslant 0$时, 令$V_1(x)=-x$; 当$x\geqslant 0$时, 令$V_2(x)=x$. 则当$x\leqslant 0$时, 有

$$-x\,|x|\,\frac{\partial V_1}{\partial x}-\frac{1}{4}(2\sqrt{3}x^2+x^4)(\frac{\partial V_1}{\partial x})^2+\frac{1}{2}x^2=-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{4}(2\sqrt{3}x^2+x^4)\leqslant 0.$$

当$x\geqslant 0$时, 有

$$-x\,|x|\,\frac{\partial V_2}{\partial x}-\frac{1}{4}(2\sqrt{3}x^2+x^4)(\frac{\partial V_2}{\partial x})^2+\frac{1}{2}x^2=-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{4}(2\sqrt{3}x^2+x^4)\leqslant 0.$$

由定理2, 混杂H_∞控制器

$$\begin{cases}u_1=-\frac{1}{2}g^{\mathrm{T}}\frac{\partial V_1}{\partial x}=\frac{1}{2}(\sqrt{3}+x^2),\ x\leqslant 0,\\ u_2=-\frac{1}{2}g^{\mathrm{T}}\frac{\partial V_2}{\partial x}=-\frac{1}{2}(\sqrt{3}+x^2),\ x\geqslant 0\end{cases}\tag{17}$$

和切换律

$$\sigma(x(t))=\begin{cases}1,\ x\leqslant 0,\\ 2,\ x\geqslant 0,\end{cases}$$

使得系统(14)内部稳定同时具有L_2–增益$r=1$.

6　结论(Conclusion)

本文利用多Lyapunov 函数方法, 讨论了不确定非线性切换系统的鲁棒H_∞控制问题. 在每个子系统的鲁棒H_∞控制问题都不可解时, 通过状态反馈控制设计, 同时设计切换律, 得到了鲁棒H_∞控制问题可解的充分条件. 该条件以一组偏微分不等方程形式给出. 进一步讨论了非切换非线性系统的混杂鲁棒H_∞控制问题.

参考文献(References):

[1] CHENG D, GUO L, HUANG J. On quadratic Lyapunov functions[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2003, 48(5): 885 – 890.

[2] LIBERZON D. *Switching in Systems and Control*[M]. Boston: Birkhäuser, 2003: 31 – 45.

[3] XIE G, WANG L. New results on stability of switched linear systems[C] // *Proc of the 42nd IEEE Conf on Decision and Control*. Hawaii, USA: IEEE Press, 2003: 6265 – 6270.

[4] ZHAO S, ZHAO J. Global stabilization of a class of cascade switched nonlinear systems[C] // *Proc of the 43rd IEEE Conf on Decision and Control*. Atlantis, Paradise Island, Bahamas: IEEE Press, 2004: 2817 – 2822.

[5] BRANICKY M S. Multiple Lyapunov functions and other analysis tools for switched and hybrid systems[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1998, 43(4): 475 – 482.

[6] XU X, ANTSAKLIS P J. Design of stabilizing control laws for second-order switched systems[C] // *Proc of the 14th IFAC World Congress*, Beijing, China: IFAC Press, 1999,Vol. C: 181 – 186.

[7] ZHAI G, HU B, YASUDA K, et al. Stability analysis of switched systems with stable and unstable subsystems: an average dwell time approach[J]. *Int J of Systems Science*, 2001, 32(8): 1055 – 1061.

[8] ZHAO J, DIMIROVSKI G M. Quadratic stability of a class of switched nonlinear systems[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2004, 49(4): 574 – 578.

[9] JI Z, WANG L. Disturbance attenuation of uncertain switched linear systems[C] // *Proc of the 43rd IEEE Conf on Decision and Control*. Atlantis, Paradise Island, Bahamas: IEEE Press, 2004: 3708 – 3713.

[10] ZHAI G, HU B, YASUDA K, et al. Disturbance attenuation properties of time-controlled switched systems[J]. *J of the Franklin Institute,* 2001, 338(7): 765 – 779.

[11] HESPANHA J P. Root-mean-square gains of switched linear systems[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2003, 48(11): 2040 – 2045.

[12] ZHAO Shengzhi, ZHAO Jun. H_∞ control for cascade minimum-phase switched nonlinear systems [J]. *J of Control Theory and Applications*, 2005, 3(2): 163 – 137.

[13] SHEN T, TAMURA K. Robust H_∞ control of uncertain nonlinear system via state feedback[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1995, 40(4): 766 – 768.

[14] LU G P, ZHENG Y F, HO D W C. Nonlinear robust H_∞ control via dynamic output feedback[J]. *Systems & Control Letters*, 2000, 39: 193 – 202.

作者简介:

赵胜芝 (1965—), 女, 副教授, 2005年毕业于东北大学信息科学与工程学院, 获工学博士学位, 主要研究方向为非线性切换系统、鲁棒控制, E-mail:zzsszz2002@163.com;

赵 军 (1957—),男, 东北大学教授, 博士生导师主要研究方向为非线性混杂系统、几何控制理论、切换控制及鲁棒控制;

张庆灵 (1956—), 男, 东北大学教授, 博士生导师, 主要研究方向为非线性广义系统、鲁棒控制;

付 俊 (1978—), 男, 东北大学博士研究生主要研究方向为非线性切换系统、鲁棒控制.