

n 涡卷 Chua 电路的混沌控制

邹艳丽^{1,2}, 朱 杰¹, 罗晓曙²

(1. 上海交通大学 电子工程系, 上海 200240; 2. 广西师范大学 物理与信息工程学院, 广西 桂林 541004)

摘要: 首先根据 n 涡卷 Chua 电路中不稳定不动点处 Jacobian 矩阵特征根的性质将不动点分为两类. 然后应用一阶低通滤波器法分别研究了这两类不动点的控制问题. 理论研究发现 n 涡卷 Chua 电路的第 1 类不稳定不动点可以通过稳的一阶低通滤波器控制, 而第 2 类不稳定不动点需要采用不稳定的一阶低通滤波器控制. 并且在一定的控制参数取值下, 受控系统可以产生 Hopf 分岔. 数值仿真证实了理论分析的正确性和控制方法的有效性.

关键词: n 涡卷 Chua 电路; 混沌控制; 一阶低通滤波器; Hopf 分岔

中图分类号: O415 **文献标识码:** A

Chaos control in the n -scroll Chua's circuit

ZOU Yan-li^{1,2}, ZHU Jie¹, LUO Xiao-shu²

(1. Department of Electronic Engineering, Shanghai Jiao Tong University, Shanghai 200240, China;

2. College of Physics and Information Engineering, Guangxi Normal University, Guilin Guangxi 541004, China)

Abstract: The chaos control problem in the n -scroll Chua's circuit is studied. At first, the unstable fixed points in the n -scroll Chua's circuit are classified into two types according to the characteristics of the eigenvalues of the linearized system matrix at the fixed points. Next, a low-pass first order filter is applied to stabilize the two types of fixed points. Theoretical analysis shows that the first type of fixed points can be stabilized by using a stable low-pass filter and the second type of fixed points can be stabilized by using an unstable one, and with some appropriately chosen feedback parameters, Hopf bifurcation can be generated. Finally, numerical simulations are performed to verify the correctness and validity of the proposed chaos control method.

Key words: n -scroll Chua's circuit; chaos control; low-pass first order filter; Hopf bifurcation

1 引言(Introduction)

近年来, 混沌控制与同步由于其潜在的巨大应用前景而受到国内外科研工作者的广泛关注. 人们已经提出了多种混沌控制和同步方法. 其中基于一个简单的低通滤波器的动力控制器在多个不同领域的混沌控制实验中得到成功应用^[1~4]. 然而这种简单的动力学控制器具有一定的局限性, 它不能稳定具有奇数个正实特征根的不稳定不动点^[5]. 最近, Pyragas 等^[6]提出了应用不稳定的一阶低通滤波器稳定这种具有奇数个正实特征根的不稳定不动点的方法. 但文中只讨论了不动点的稳定而没有讨论周期轨道的控制. 文献[7,8]中设计并实现了一种 n 涡卷 Chua 电路, 笔者在文献[9]中研究了这种 n 涡卷 Chua 电路的混沌控制问题. 在文献[9]中将这种电路中的不稳定不动点分为两类, 并采用比例微分

控制器实现了第 1 类不稳定不动点和相应各种周期轨道的稳定控制, 但是文中采用的控制方法不能稳定第 2 类不动点.

本文研究了 n 涡卷 Chua 电路的混沌控制问题. 研究发现: 采用稳定的一阶低通滤波器可以稳定第 1 类不稳定不动点, 采用不稳定的一阶低通滤波器可以稳定第 2 类不稳定不动点. 并且, 在某些反馈参数取值下, 可以控制系统产生 Hopf 分岔, 得到多种稳定的周期轨道.

2 n 涡卷 Chua 电路(n -scroll Chua's circuit)

n 涡卷 Chua 电路的无量纲形式描述如下:

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha[y - f(x)], \\ \dot{y} = x - y + z, \\ \dot{z} = -\beta y. \end{cases} \quad (1)$$

式中

$$f(x) = \begin{cases} \frac{b\pi}{2a}(x - 2ac), & x \geq 2ac, \\ -b \sin(\frac{\pi x}{2a} + d), & -2ac < x < 2ac, \\ \frac{b\pi}{2a}(x + 2ac), & x < -2ac. \end{cases} \quad (2)$$

当系统参数取值为

$$\alpha = 10.814, \beta = 14.0, a = 1.3, b = 0.11, \quad (3)$$

$$n = c + 1, \quad (4)$$

$$d = \begin{cases} \pi, & n \text{ 是奇数}, \\ 0, & n \text{ 是偶数}. \end{cases} \quad (5)$$

系统可以产生 n 涡卷吸引子,例如当 $c = 7, d = 0$ 时,可以产生如图1所示的8涡卷吸引子.

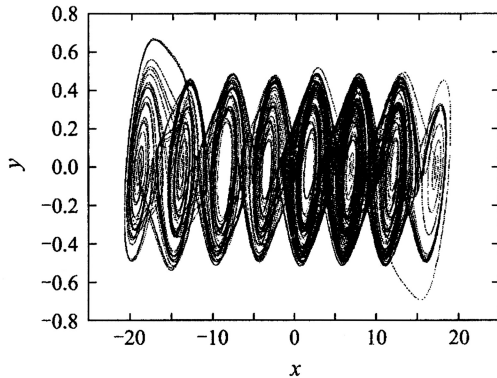


图1 $c = 7, d = 0$ 时的8涡卷吸引子

Fig.1 8-scroll attractor generated by Eqs.(1) and (2) with $c = 7, d = 0$

3 控制方法和理论分析(Control method and theoretical analysis)

系统(1)的不动点为 $(x_{eq}, 0, -x_{eq})$,

$$x_{eq} = 2am, m = 0, \pm 1, \dots, \pm c. \quad (6)$$

在不动点处的Jacobian矩阵为

$$J_1 = \begin{bmatrix} -\alpha f'(x_{eq}) & \alpha & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -\beta & 0 \end{bmatrix}. \quad (7)$$

将式(6)代入式(7),方程(1)(2)中的参数取式(3)~(5)对应的值,可以计算出方程(1)各不动点处Jacobian矩阵的特征值.根据不动点处Jacobian矩阵的特征值的性质,可以把不动点分成如下两类:

1) 当涡卷数 n 为偶数时, $x_{eq} = 2am, m$ 为奇数且 $m \leq |c|$;当涡卷数 n 为奇数时, $x_{eq} = 2am, m$ 为偶数且 $m \leq |c|$.上述两种情况所对应的不动点,称为第1类不动点.这一类不动点的特点是 J_1 的3个特征根中实根为负,共轭复根的实部为正.这一类不动

点对应着每个涡卷的中心;

2) 当涡卷数 n 为偶数时, $x_{eq} = 2am, m$ 为偶数且 $m < |c|$;当涡卷数 n 为奇数时, $x_{eq} = 2am, m$ 为奇数且 $m < |c|$.上述两种情况所对应的不动点,称为第2类不动点.这一类不动点的特点是其3个特征根中实根为正,共轭复根的实部为负.这一类不动点位于涡卷的边缘.

本文采用一阶低通滤波器控制 n 涡卷Chua电路中的两类不动点,在系统的不动点不是精确已知的情况下,本文的控制方法可以自动寻找并稳定不动点.具体控制方法如下:假定系统中状态变量 x 可测,将 x 作为原系统输出变量并经过一个一阶低通滤波器,一阶滤波器的输出变量 w 即为状态变量 x 的期望值.将滤波器输出量 w 和原系统的输出量 x 的偏差按一定比例反馈到原系统的第1个子系统.控制系统的框图如图2所示.

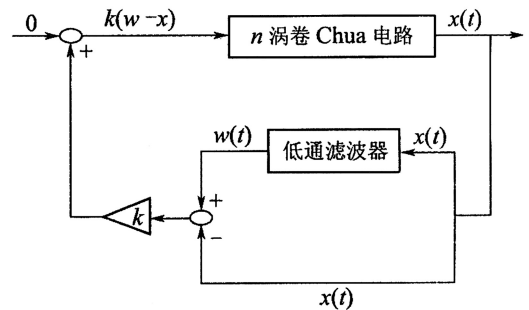


图2 一阶低通滤波器控制系统

Fig.2 Control scheme of the n -scroll Chua's circuit with a low pass filter applied

受控后系统的状态方程为

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha(y - f(x)) + k(w - x), \\ \dot{y} = x - y + z, \\ \dot{z} = -\beta y, \\ \dot{w} = \lambda_c(w - x). \end{cases} \quad (8)$$

从系统(8)可以看出受控后系统为4维系统,其不动点为 $(x_{eq}, 0, -x_{eq}, x_{eq})$,

$$x_{eq} = 2am, m = 0, \pm 1, \dots, \pm c. \quad (9)$$

在不动点处系统在原3维空间的投影不变,即控制的加入不改变原系统的平衡状态.受控后系统(8)在不动点处的Jacobian矩阵为

$$J_2 = \begin{bmatrix} -\alpha f'(x_{eq}) - k & \alpha & 0 & k \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -\beta & 0 & 0 \\ -\lambda_c & 0 & 0 & \lambda_c \end{bmatrix}. \quad (10)$$

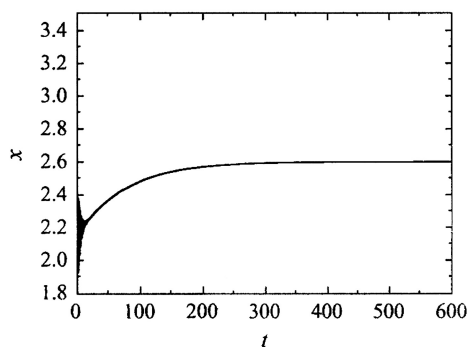
系统(8)在不动点处的特征方程为

$$|sI - J_2| = s^4 + (\alpha f'(x_{eq}) + k + 1 - \lambda_c)s^3 + (\beta + \alpha f'(x_{eq}) + k - \alpha - \lambda_c \alpha f'(x_{eq}) - \lambda_c)s^2 + (\beta \alpha f'(x_{eq})) + \beta k - \lambda_c \beta - \lambda_c \alpha f'(x_{eq}) + \alpha \lambda_c)s - \lambda_c \beta \alpha f'(x_{eq})s^0 = 0. \quad (11)$$

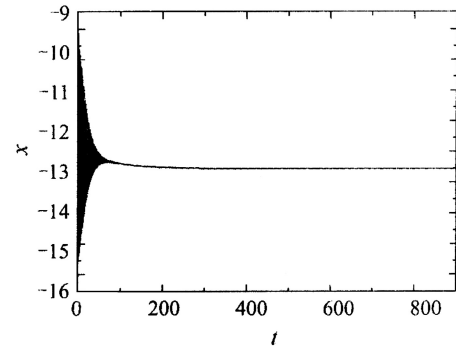
在第1类不动点处, $f'(x_{eq}) = b\pi/(2a)$. 根据Routh-Hurwitz准则, 只有当 $\lambda_c < 0$ 时, s^0 项的系数大于零, 通过选择反馈增益 k 的值, 这类不动点才可能可控. 也就是说, 第1类不动点只能用稳定的一阶低通滤波器控制; 在第2类不动点处, $f'(x_{eq}) = b\pi/(2a)$. 根据Routh-Hurwitz准则, 只有当 $\lambda_c > 0$ 时, s^0 项的系数大于零, 通过选择反馈增益 k 的值, 这类不动点才可能可控. 也就是说, 第2类不动点只能用不稳定的一阶低通滤波器控制.

由于 n 涡卷Chua电路中的每一类不动点都有相同的可控性, 如果想把系统稳定到某个期望的不动点, 可以首先根据涡卷数将相空间划分为 n 个相应的子空间, 即 $V = V_1 \oplus V_2 \cdots \oplus V_j \cdots \oplus V_n$, V_j 代表第 j 个涡卷所在的子空间. 根据混沌运动的遍历性, 可以采用OGY方法中的守株待兔思想, 当混沌运动进入到相应的子空间时再施加控制, 就可以将系统稳定到该子空间中相应的不动点.

对于第1类不动点, 取 $\lambda_c = -0.2$, 当 $k > 7.7$ 时, 方程(11)的4个特征根都是负值, 此时系统的第1类不动点都是稳定的. 当滤波器的初始状态取不同子空间的值时, 混沌系统可以被稳定到相应子空间中的第1类不动点. 注意: 在 n 涡卷的稳定控制中, 系统的参数并不一定精确可知, 因为控制过程中并不需要系统不动点的精确值, 自适应控制可以自动找到系统的不动点并将其稳定. 例如对于8涡卷Chua电路, 当 $\lambda_c = -0.2$, $k = 20$, $w_0 = 2.1$ 时, 系统可以被稳定到不动点 $x_{eq} = 2.6$, 如图3(a)所示; $\lambda_c = -0.2$, $k = 10$, $w_0 = -12.5$ 时, 系统可以被稳定到不动点 $x_{eq} = -13$ 如图3(b)所示.



(a) 控制到不动点 $x_{eq} = 2.6$



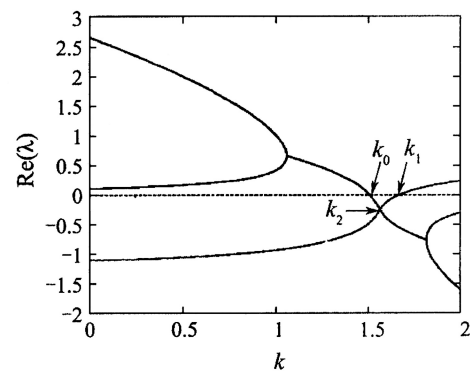
(b) 控制到不动点 $x_{eq} = -13$

图3 第1类不动点的稳定控制

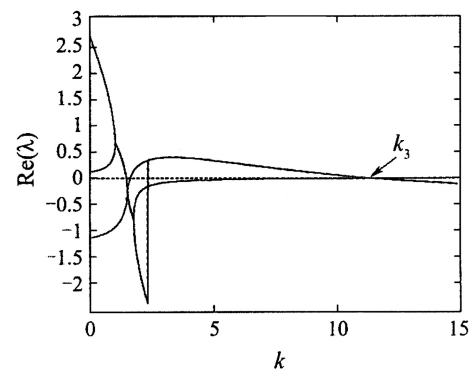
Fig. 3 Control results of the first type of fixed points

由于在文献[9]中已经详细讨论了第1类不动点及其相应周期轨道的稳定控制, 所以本文对此类不动点及相应周期轨道的控制不再详述. 下面着重讨论第2类不动点及其相应周期轨道的稳定控制.

通过对受控系统特征方程的分析可知, 只有当 $\lambda_c > 0$ 时, 系统的第2类不动点才可能可控. 在实施控制时, λ_c 一般取较小的正数, 为此笔者作了系统在第2类不动点处特征根实部随反馈增益变化的图形(如图4所示).



(a) 控制增益 $k \in [0, 2]$



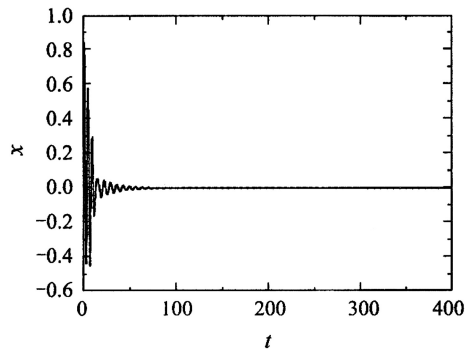
(b) 控制增益 $k \in [0, 15]$

图4 特征根实部随控制增益的变化图

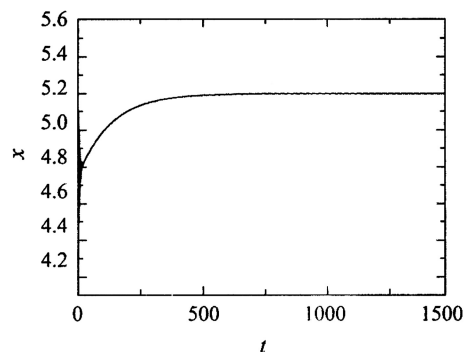
Fig. 4 Eigenvalues of the 8-scroll Chua's circuit as functions of the control gain k with $\lambda_c = 0.1$

图4中固定 $\lambda_c = 0.1$. 图4(a)(b)分别是在 $k \in [0, 2]$ 区间和 $k \in [0, 15]$ 区间, 受控系统在第二类不动点处的3个较大特征根实部的变化情况. 由图4(a)(b)可见, 当 $k_0 < k < k_1$ 和 $k > k_3$ 时, 在这类不动点处系统的4个特征根都是负的, 所以在这两个区间内系统的第二类不动点是可控的. 并且, 在 $k_0 < k < k_1$ 区间当 $k = k_2$ 时控制速度最快. 经过计算得到 $k_0 = 1.50571$, $k_1 = 1.67$, $k_2 = 1.563$, $k_3 = 11.17$.

通过对非线性系统在不动点处的线性化矩阵来研究不动点的稳定性, 这种近似只有在系统轨迹非常靠近不动点时才成立. 通过数值仿真发现, 在稳定区间 $k_0 < k < k_1$ 内, 第二类不动点的吸引域是很小的, 即只有当系统轨迹充分靠近不动点时施加控制才能稳定这一类不动点, 否则, 正反馈的加入很容易使系统发散. 在稳定区间 $k > k_3$ 内, 随着反馈增益 k 的增大, 第二类不动点的吸引域会显著扩大, 但系统到达稳态的速度会减慢. 图5(a)控制到第二类不动点 $x_{eq} = 0$, 系统初值为 $(x_0, y_0, z_0, w_0) = (0.01, 0.1, 0.1, 0.1)$, 反馈增益为 $k = 1.52$, $\lambda_c = 0.1$; 图5(b)为控制到第二类不动点 $x_{eq} = 5.2$, 系统初值为 $(x_0, y_0, z_0, w_0) = (4, 0.1, 0.1, 4.8)$, 反馈增益为 $k = 20$, $\lambda_c = 0.1$.



(a) 稳定到不动点 $x_{eq} = 0$



(b) 稳定到不动点 $x_{eq} = 5.2$

图5 第二类不动点的稳定控制

Fig. 5 Control results of the second type of fixed points

由图4可见当反馈增益 $k = k_0$ 时, 系统的一对共轭复根由正半平面向负半平面穿越虚轴, 此时受控系统的4个特征根为 $\lambda_{1,2} = -0.4842 \pm 1.5019i$, $\lambda_{3,4} = 0 \pm 0.8990i$. 其中一对共轭复根 $\lambda_{3,4}$ 满足Hopf分岔条件^[10], 即

$$\operatorname{Re} \lambda|_{k=k_0} = 0, \operatorname{Im} \lambda|_{k=k_0} \neq 0, \frac{d\lambda}{dk}|_{k=k_0} \neq 0, \quad (12)$$

系统发生Hopf分岔. 图6是取 $w_0 = 0.1$, $\lambda_c = 0.1$, 在第二类不动点 $x_{eq} = 0$ 附近, 过 $y = 0$ 作的变量 x 的分岔图. 由图可见在 k_0 附近随着 k 的减小, 系统发生一系列分岔, 从而可以将系统稳定到不同的周期轨道. 图7为8涡卷Chua电路中反馈增益取 $k = 1.264$ 时, 系统被稳定到4p周期轨道的相图.

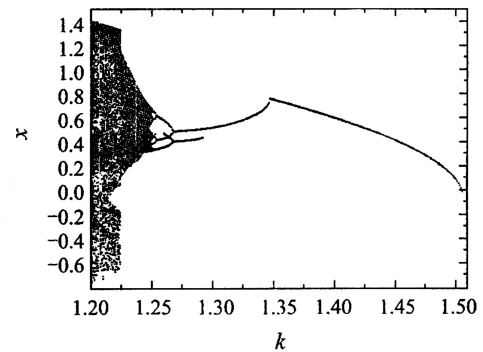


图6 系统分岔图

Fig. 6 Bifurcation diagram of the 8-scroll Chua's circuit near the second type of fixed point e_{eq}

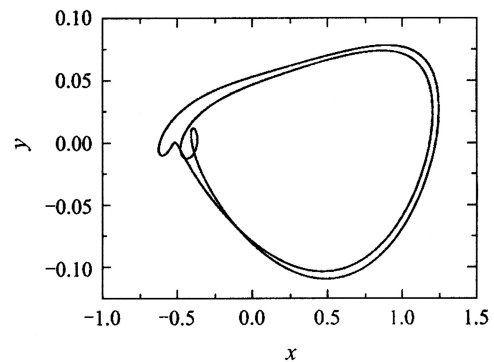


图7 控制系统到4p周期轨道 $k = 1.26$

Fig. 7 Control result of the orbit of period-4 with $k = 1.26$

应当指出的是在所有的子空间中第二类不动点附近都有类似的分岔现象. 取 w_0 为不同子空间中第二类不动点附近的值时, 反馈增益在小于 k_0 的附近取值, 可以将系统稳定到不同子空间中第二类不动点附近的周期轨道上, 并且, 研究发现这类周期轨道位于两个相邻涡卷所在的子空间中, 即周期轨道 $U_2 = \{x; x \in V_i \cup V_j, i - j = \pm 1, i, j = 1, 2, \dots, n\}$, 这

与文献[9]的控制结果不同. 文献[9]中控制得到的第1类不动点附近的周期轨道都是位于某一子空间内的, 即 $U_2 = \{x; x \in V_j, j = 1, 2, \dots, n\}$. 在图4所示的 k_1, k_3 点有和 k_0 相似的分岔现象发生, 在这些反馈增益附近取值也可以将系统稳定到不同的周期轨道上, 在此不再赘述.

4 结论(Conclusion)

本文采用一阶低通滤波器控制 n 涡卷Chua电路中的混沌, 首先根据不动点处线性化矩阵特征根的性质将不动点分成两类, 然后分别研究了这两类不动点的控制问题. 研究表明: 系统的第1类不动点可以采用稳定的一阶低通滤波器控制, 而第2类不动点只能采用不稳定的一阶低通滤波器控制, 并且在某些反馈增益附近, 系统发生Hopf分岔和倍周期分岔, 从而可以得到一系列稳定的周期轨道, 这些周期轨道并不局限于某一子空间内部, 而是跨越相邻子空间的. 理论分析和数值仿真证实了本文方法的有效性和正确性. 由于低通滤波器容易实现, 稳定的一阶低通滤波器可以采用RC电路实现, 不稳定的一阶低通滤波器可以采用含有负电阻的RC电路实现. 所以本文的控制方法具有易于在工程中实现的特点.

参考文献(References):

- [1] NAMAJUNAS A, PYRAGAS K, TAMASEVICIUS A. Stabilization of an unstable steady state in a Mackey-Glass system [J]. *Physics Letters A*, 1995, 204(3/4): 255 – 262.
- [2] RULKOV N F, TSIMRING L S, ABARBANEL H D I. Tracking unstable orbits in chaos using dissipative feedback control[J]. *Physics Review E*, 1994, 50(1): 314 – 324.
- [3] CIOFINI M, LABATE A, MEUCCI R, et al. Stabilization of unstable fixed points in the dynamics of a laser with feedback[J]. *Physics Review E*, 1999, 60(1): 398 – 402.
- [4] SCHENCK zu SCHWEINSBERG A, DRESSLER U. Characterization and stabilization of the unstable fixed points of a frequency doubled Nd:YAG laser[J]. *Physics Review E*, 2001, 63(5): 056210.
- [5] PYRAGAS K, PYRAGAS V, KISS I Z, et al. Stabilizing and tracking unknown steady states of dynamical systems[J]. *Physica Review Letters*, 2002, 89(24): 244103.
- [6] PYRAGAS K, PYRAGAS V, KISS I Z, et al. Adaptive control of unknown unstable steady states of dynamical systems[J]. *Physica Review E*, 2004, 70: 026215.
- [7] SUYKENS J A K, VANDEWALLE J. Generation of n -double scrolls($n = 1, 2, 3, 4, \dots$)[J]. *IEEE Trans on Circuits System-I*, 1993, 40(11): 861 – 867.
- [8] TANG K S, ZHONG G Q, CHEN G, et al. Generation of n -scroll attractors via sine function[J]. *IEEE Trans on Circuits System-I*, 2001, 48(11): 1369 – 1372.
- [9] ZOU Y, LUO X, JIANG P, et al. Controlling the chaotic n -scroll Chua's circuit[J]. *Int J of Bifurcation and Chaos*, 2003, 13(9): 2709 – 2714.
- [10] ALLIGOOD, K T, SAUER T D, YORKE J A. *Chaos: An Introduction to Dynamical Systems*[M]. New York: Springer-Verlag, 1996.

作者简介:

邹艳丽 (1972—), 女, 上海交通大学电子工程系博士研究生, 研究方向为混沌系统的控制与同步, E-mail: zouyanli@sjtu.edu.cn;

朱杰 (1963—), 男, 教授, 现为上海交通大学电子工程系博士生导师, 研究方向为自动语音识别技术和DSP应用、多媒体通信与交互技术、自动测试系统;

罗晓曙 (1961—), 男, 教授, 广西师范大学物理与信息工程学院硕士生导师, 研究方向为混沌系统的控制与同步、Internet网络的拥塞控制.