

基于LMI的随动系统满意PID调节器设计

臧文利¹, 王远钢², 郭 治¹, 王艳霞¹

(1. 南京理工大学 自动化系, 江苏 南京 210094; 2. 南京理工大学 理学院, 江苏 南京 210094)

摘要: PID控制器在实际工程中应用广泛, 而且工程上对随动系统的性能要求往往是多方面的. 该文应用满意控制思想, 研究了期望指标: 扇形区域极点, 稳态输出方差和动态误差系数约束下随动系统的PID控制设计问题. 首先将PID控制参数设计转化为局部状态反馈问题, 导出了3项指标约束的双线性矩阵不等式(BMI)描述. 然后给出改进的迭代线性矩阵不等式(LMI)算法求解BMI可行解, 得到使闭环系统满足3项期望指标的PID参数. 最后给出了应用该方法数值算例.

关键词: PID; 线性矩阵不等式; 动态误差系数; 满意控制

中图分类号: TP13 **文献标识码:** A

Satisfactory PID design for servo systems based on iterative LMI technique

ZANG Wen-li¹, WANG Yuan-gang², GUO Zhi¹, WANG Yan-xia¹

(1. Department of Automation, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing Jiangsu 210094, China;

2. School of Science, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing Jiangsu 210094, China)

Abstract: In practical engineering, the PID controller is widely used to meet multiple system-specifications. Employing the idea of satisfactory control, the design of PID controller for a class of servo systems is investigated under desired indices in this paper. The desired indices include sector regional pole, steady output covariance and dynamical error coefficients. Firstly, the problem of PID design is transformed to one of partial state feedback, and the above three desired indices are formulated in terms of bilinear matrix inequality (BMI). An improved iterative linear matrix inequality (LMI) procedure is then presented to solve the BMI, and the resulting parameter of PID can also guarantee the closed-loop servo system satisfying the desired three indices. Finally, a numerical example is given to illustrate the proposed method.

Key words: PID; linear matrix inequality; dynamical error coefficients; satisfactory control

1 引言(Introduction)

PID调节器在实际工程中广泛应用, 据不完全统计, 在工业过程控制、航空航天控制等领域中, PID控制的应用占80%以上^[1]. 对于随动系统, 通常要求: 闭环系统的极点位于指定的扇形极点区域内, 以保证系统具有一定的稳定储备和暂态性能; 稳态误差系数小于允许值以保证系统对于确定性的, 预先未知的输入信号跟踪的稳态准确度; 随机作用下的稳态输出方差小于允许值以保证闭环系统的稳态精度. 为了得到控制器参数, 古典频域的设计方法通常有两种: 一是对高阶模型借助于伯德图、图表、仿真与模拟工具, 直至在实际系统上现场调试出合格的控制策略; 二是把实际对象简化为低阶模型, 可以

应用解析的方法设计, 但丢失了对对象某些特性, 使得把基于低阶模型设计的控制器应用于实际对象时, 达不到满意的控制效果. 上述方法都不利于控制系统设计自动化的实现, 现代控制理论及优化方法的飞速发展, 为研究随动系统PID调节器设计提供了新的工具. 满意控制^[2]要求多项具有工程意义的性能指标同时得到满足. 本文以状态空间为工具, 借助于满意控制的思想和方法, 研究了扇形极点区域, 稳态误差系数, 稳态输出方差约束指标下随动系统PID设计问题. 无需模型简化, 可以直接对高阶模型进行设计, 把约束指标转化为矩阵不等式描述, 利用迭代LMI算法得到同时满足3项约束指标的PID参数, 可以利用MATLAB软件中LMI工具箱自动求解, 便

于控制系统设计自动化的实现.

2 满意PID调节器问题的描述(Problem formulation of satisfactory PID regulator)

考虑图1所示结构的控制系统, $y(t)$ 是系统输出, $w(t)$ 是均值为零、强度为 W 且与初值无关的高斯白噪声干扰信号, $r(t)$ 为确定性的参考输入信号.

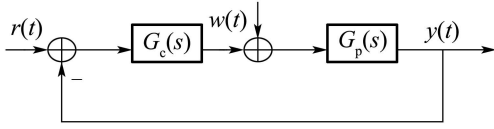


图1 闭环系统传递函数

Fig. 1 Transfer-function of closed-loop system

设研究对象由如下传递函数描述:

$$G_p(s) = \frac{b_{n-1}s^{n-1} + b_{n-2}s^{n-2} + \cdots + b_1s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1s + a_0}. \quad (1)$$

PID调节器

$$G_c(s) = k_P + \frac{k_I}{s} + k_D s, \quad (2)$$

则开环传递函数为

$$G(s) = \frac{b_{n-1}k_D s^{n+1} + \cdots + (b_0k_P + b_1k_I)s + b_0k_I}{s(s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1s + a_0)}. \quad (3)$$

用 c_0, c_1, c_2 表示动态误差系数的前3项.

当 $a_0 = 0$ 时,

$$c_0 = c_1 = 0, \quad (4)$$

$$c_2 = \frac{a_1}{b_0k_I}; \quad (5)$$

当 $a_0 \neq 0$ 时,

$$c_0 = 0, \quad (6)$$

$$c_1 = \frac{a_0}{b_0k_I}, \quad (7)$$

$$c_2 = \frac{(a_1b_0 - a_0b_1)k_I - a_0b_0k_P - a_0^2}{b_0^2k_I^2}. \quad (8)$$

被控对象 $G_p(s)$ 的可控标准型描述为

$$\dot{x}_P = A_P x_P(t) + B_P v(t), \quad (9)$$

$$y(t) = C_P x_P(t), \quad (10)$$

$$A_P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix},$$

$$B_P^T = [0 \quad \cdots \quad 0 \quad 1],$$

$$C_P = [b_0 \quad b_1 \quad \cdots \quad b_{n-2} \quad b_{n-1}],$$

$$v(t) = -k_P y(t) - k_I \int_0^t y(\tau) d\tau - k_D \dot{y}(t),$$

$$x_I = \int_{t_0}^t y(\tau) d\tau, \quad x(t) = [x_P^T \quad x_I^T]^T,$$

$$A \triangleq \begin{bmatrix} A_P & 0 \\ C_P & 0 \end{bmatrix}, \quad B \triangleq \begin{bmatrix} B_P \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & \cdots & b_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0b_{n-1} & b_0 - a_1b_{n-1} & \cdots & b_{n-2} - a_{n-1}b_{n-1} & 0 \end{bmatrix},$$

可得闭环方程

$$\dot{x}(t) = (A - BKC)x(t) + Dw(t), \quad (11)$$

$$A_c \triangleq A - BKC,$$

$$K \triangleq [k_P \quad k_I \quad k_D],$$

$$D = B, \quad D_1 \triangleq [C_P \quad 0].$$

此时, PID调节器参数设计被转化为局部状态反馈问题.

当系统(11)渐近稳定时, 稳态状态方差 X 为

$$X \triangleq \lim_{t \rightarrow \infty} E\{x(t)x^T(t)\},$$

且为如下代数Lyapunov方程唯一正定解

$$A_c X + X A_c^T + D W D^T = 0, \quad (12)$$

则稳态输出方差定义为

$$Y = D_1 X D_1^T. \quad (13)$$

本文目的是设计PID调节器参数满足

① 闭环系统极点位于如图2所示阴影扇形区域 $S(q, \theta)$ 内.

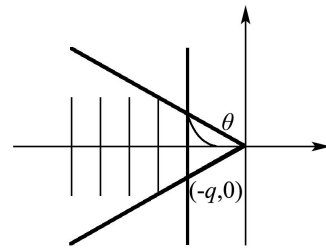


图2 扇形极点区域

Fig. 2 Sector pole region

② 闭环系统稳态输出方差满足

$$Y \leq \sigma^2.$$

③ 闭环系统稳态误差系数满足

$$c_0 = 0, \quad |c_1| \leq c_{1g}, \quad |c_2| \leq c_{2g}.$$

这里: $q > 0, \theta \in [0, 90^\circ), \sigma^2, c_{1g}, c_{2g}$ 为系统的设计参数, 由设计者给出.

定义 1 如果存在PID调节器参数满足设计指标①②和③, 则称其为满意的PID调节器.

如果存在满意的PID调节器参数同时满足①②和③3项要求, 则称指标是相容的.

3 主要结果(Main results)

定理 1 对于 $a_0 = 0$ 的控制系统, 当且仅当存在 $P_1 > 0, P_2 > 0$ 和矩阵 K 满足

$$A_c P_1 + P_1 A_c^T + 2qP_1 < 0, \quad (14)$$

$$\begin{bmatrix} \sin \theta (A_c P_1 + P_1 A_c^T) & \cos \theta (A_c P_1 - P_1 A_c^T) \\ \cos \theta (P_1 A_c^T - A_c P_1) & \sin \theta (A_c P_1 + P_1 A_c^T) \end{bmatrix} < 0, \quad (15)$$

$$A_c P_2 + P_2 A_c^T + D W D^T < 0, \quad (16)$$

$$D_1 P_2 D_1^T < \sigma^2, \quad (17)$$

$$K e_2 > m \text{ 或 } K e_2 < -m, \quad (18)$$

则闭环系统满足给定指标①和②, 并且 $c_0 = c_1 = 0, |c_2| < c_{2g}$. 其中: $m = \left| \frac{a_1}{b_0 c_{2g}} \right|, e_i$ 表示第 i 个元素为1的列向量, $i = 1, \dots, 3$, 例如 e_2 表示向量 $[0 \ 1 \ 0]^T$.

证 充分性. 由文献[3], 由不等式(14)(15)保证指标①得到满足. 应用李雅普诺夫稳定性理论, 比较式(12)和(13)与(16)和(17)可知, 指标②得到满足. 式(18)等价于

$$k_1 > \left| \frac{a_1}{b_0 c_{2g}} \right|, \quad k_1 < -\left| \frac{a_1}{b_0 c_{2g}} \right|.$$

由式(4)(5)可知定理结论成立.

必要性. 类似于充分性的证明可得定理必要性

$$\begin{bmatrix} A P_1 + P_1 A^T + 2qP_1 - B K K^T B^T - P_1 C^T C P_1 & (B K - P_1 C^T) \\ (B K - P_1 C^T)^T & -I \end{bmatrix} < 0. \quad (25)$$

设 V_1, V_2 为适维矩阵. 由式(24)可得

$$-B K K^T B^T \leq -B K V_1^T - V_1 K^T B^T + V_1 V_1^T, \quad (26)$$

$$-P_1 C C^T P_1 \leq -P_1 C V_2^T - V_2 C^T P_1 + V_2 V_2^T. \quad (27)$$

把式(25)中的 $-B K K^T B^T$ 和 $-P_1 C C^T P_1$ 分别用不等式(26)和(27)的右侧项代替, 式(25)就转化为了线性矩阵不等式.

当 $B K = V_1, P_1 C = V_2$ 时, 式(26)和(27)变为等式. 式(25)和把式(25)中 $-B K K^T B^T$ 和 $-P_1 C C^T P_1$ 用(26)和(27)的右侧项代替后所得不等式是等

成立.

定理 2 对于 $a_0 \neq 0$ 的系统, 当存在 $P_1 > 0, P_2 > 0$ 和矩阵 K 满足式(14)~(17)和

$$K e_2 > s \text{ 或 } K e_2 < -s, \quad (19)$$

$$t_2 < (a_1 b_0 - a_0 b_1) K e_2 - a_0 b_0 K e_1 < t_1, \quad (20)$$

则闭环系统满足给定指标①~③. 其中

$$s = \left| \frac{a_0}{b_0 c_{1g}} \right|, \quad t_1 = a_0^2 + \frac{a_0^2 c_{2g}}{c_{1g}^2}, \quad t_2 = a_0^2 - \frac{a_0^2 c_{2g}}{c_{1g}^2}.$$

证 由式(14)~(17)可得指标①②得到满足. 由式(19)可得

$$|b_0 k_1| > \left| \frac{a_0}{c_{1g}} \right|. \quad (21)$$

由式(20)可得

$$\left| \frac{(a_1 b_0 - a_0 b_1) k_1 - a_0 b_0 k_p - a_0^2}{a_0^2} \right| < \frac{c_{2g}}{c_{1g}^2}. \quad (22)$$

由式(21)和(22)可得

$$\left| \frac{(a_1 b_0 - a_0 b_1) k_1 - a_0 b_0 k_p - a_0^2}{b_0^2 k_1^2} \right| < c_{2g}. \quad (23)$$

由式(7)和(8)可知指标③得到满足.

4 计算方法(Computation algorithm)

设 L, V 为适维矩阵, 由 $(L - V)(L - V)^T \geq 0$, 有

$$-V V^T \leq -L V^T - V L^T + L L^T. \quad (24)$$

定理1和定理2中的条件关于矩阵变量是双线性的, 本节将应用式(24)的结果以及文献[4]的思想, 将定理1和定理2中的条件转化为可用线性矩阵不等式描述的条件. 以式(14)为例, 说明其处理双线性矩阵项的方法. 应用舒尔补引理^[5], 式(14)即化为

价的.

下面给出求解定理1和定理2的迭代LMI算法:

Step 1 求算法的初值:

可行解 K : s.t. 式(19)(20);

可行解 P_1, P_2 : s.t. 式(14) ~ (16).

取 $P_1^{(0)} = P_1, P_2^{(0)} = P_2, K^{(0)} = K$ 作为初值.

Step 2 $j = 1, t = 0, N = 200$.

Step 3 迭代求取控制器参数.

Step 3.1 如果 $t < 0$ 得到满足, 结束, $K^{(j-1)}$ 即为期望的反馈增益;

Step 3.2 否则, 令 $M_1^{(j)} = (B K^{(j-1)})^T, M_2^{(j)} = C P_1^{(j-1)}, M_3^{(j)} = C P_2^{(j-1)}$,

$$\min t : P_1^{(j)}, P_2^{(j)}, K^{(j)}$$

$$\text{s.t.} \begin{bmatrix} S_6 & S_4 & \cos \theta B K^{(j)} & -P_1^{(j)} C^T & B K^{(j)} + P_1^{(j)} C^T & 0 \\ * & S_6 & P_1^{(j)} C^T & \cos \theta B K^{(j)} & 0 & B K^{(j)} + P_1^{(j)} C^T \\ * & * & -I & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -I & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -a & 0 \\ * & * & * & * & * & -a \end{bmatrix} < 0,$$

$$\begin{bmatrix} M_1 & B K^{(j)} - P_1^{(j)} C^T \\ (B K^{(j)} - P_1^{(j)} C^T)^T & -I \end{bmatrix} < 0,$$

$$\begin{bmatrix} S_2 & B K^{(j)} - P_2^{(j)} C^T \\ (B K^{(j)} - P_2^{(j)} C^T)^T & -I \end{bmatrix} < 0,$$

$$C P_2^{(j)} C^T < \sigma^2,$$

$$K^{(j)} e_2 > m \text{ 或 } K^{(j)} e_2 < -m.$$

其中:

$$M = A P_1^{(j)} + P_1^{(j)} A^T,$$

$$M_1 = M + 2q P_1^{(j)} - B K^{(j)} M_1^{(j)} - (B K^{(j)} M_1^{(j)})^T + M_1^{(j)T} M_1^{(j)} - P_1^{(j)} C^T M_2^{(j)} - (P_1^{(j)} C^T M_2^{(j)})^T + M_2^{(j)T} M_2^{(j)} - tI,$$

$$S_0 = A P_2^{(j)} + P_2^{(j)} A^T,$$

$$S_1 = -B K^{(j)} M_1^{(j)} - (B K^{(j)} M_1^{(j)})^T + M_1^{(j)T} M_1^{(j)} - tI,$$

$$S_2 = S_0 + D W D^T - B K^{(j)} M_1^{(j)} - (B K^{(j)} M_1^{(j)})^T + M_1^{(j)T} M_1^{(j)} - P_2^{(j)} C^T M_3^{(j)} - (P_2^{(j)} C^T M_3^{(j)})^T + M_3^{(j)T} M_3^{(j)} - tI,$$

$$S_3 = \sin \theta (A P_1^{(j)} + P_1^{(j)} A^T),$$

$$S_4 = \cos \theta (A P_1^{(j)} - P_1^{(j)} A^T), \quad a = (\sin \theta)^{-1},$$

$$S_5 = -P_1^{(j)} C^T M_2^{(j)} - (P_1^{(j)} C^T M_2^{(j)})^T + M_2^{(j)T} M_2^{(j)},$$

$$S_6 = S_3 + (\sin \theta + \cos^2 \theta) S_1 + (1 + \sin \theta) S_5.$$

矩阵的*部分可由对称性得到.

Step 1 如 $j \geq N$ (N 为控制迭带次数的适当大正整数), 结束, 说明给定迭带次数内, 本算法得不到期望控制器参数; 否则, $j = j + 1$, 返回Step 3.

5 数值算例(Numerical example)

设系统传递函数为

$$G_P(s) = \frac{1}{s(0.2s + 1)(0.5s + 1)},$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -10 & -7 & 0 \\ 10 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 10 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$q = 1, \theta = 60^\circ, c_{2g} = 0.3, \sigma^2 = 2, D = B, W = 50.$$

经过100次迭带求解, 可得控制器参数为

$$K = [5.6228 \quad 3.3589 \quad 2.5386].$$

系统闭环极点为 $\{-2.4632 + 4.2058i; -2.4632 - 4.2058i; -1.0368 + 0.5821i; -1.0368 - 0.5821i\}$.

闭环系统输出方差为 $Y = 1.9188$.

误差系数 $c_0 = c_1 = 0, c_2 = 0.2977$.

当 $r(t)$ 为单位斜坡输入时, 跟踪误差曲线如图3所示.

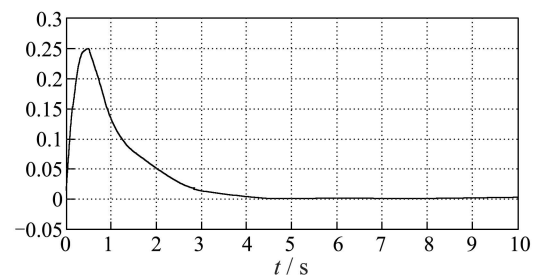


图3 斜坡跟踪误差曲线

Fig. 3 Tracking error curves of slope signal

6 结论 (Conclusion)

虽然本文研究的是随动系统中PID调节器的参数设计问题, 但文中的方法也可以推广到当控制策略是迟后—超前校正网络的情况; 同时, 多个矩阵不等式的叠加仍然是矩阵不等式, 故可引入更多能用矩阵不等式表示的期望指标, 如鲁棒、时延等, 以进一步提高系统的性能.

参考文献 (References):

- [1] 吴宏鑫, 沈少萍. PID 控制的应用与理论依据[J]. 控制工程, 2003, 10(1): 37-42.
(WU Hongxin, SHEN Shaoping. Basis of theory and applications on PID control[J]. Control Engineering of China, 2003, 10(1): 37-42.)

(下转第975页)

参考文献(References):

- [1] LAKSHMIKANTHAM V, BAINOV D D, SIMENOV P S. *Theory of Impulsive Differential Systems* [M]. Singapore: World Scientific, 1989.
- [2] LIU X Z. Stability theory for impulsive differential equations in terms of two different measures[M]//*Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics*. New York: Marcel Dekker, 1991, 127: 375 – 384.
- [3] YE H, MICHEL A N, HOU L. Stability analysis of systems with impulse effects[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1998, 43(12): 1719 – 1723.
- [4] 关治洪, 廖俊峰, 廖锐全. 不确定脉冲系统的鲁棒 H_∞ 控制[J]. 控制理论与应用, 2002, 19(4): 623 – 626.
(GUAN Zhihong, LIAO Junfeng, LIAO Ruiquan. Robust H_∞ control of uncertain impulsive systems[J]. *Control Theory & Applications*, 2002, 19(4): 623 – 626.)
- [5] CHANG S, PENG T. Adaptive guaranteed cost control of systems with uncertain parameters[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1972, 17(4): 474 – 483.
- [6] PETERSON I R, MCFARLANE D C. Optimal guaranteed cost control and filtering for uncertain linear system[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1994, 39(9): 1971 – 1977.
- [7] BOYD S, GHAOUIL L E, FERON E, et al. Linear matrix inequalities in system and control theory[C] //*Proc of Annual Allerton Conf*

on Communication, Control and Computing. Monticello: Allerton House, 1993: 237 – 246.

- [8] 俞立. 线性不确定系统的最优保性能控制——线性矩阵不等式处理方法[J]. 控制理论与应用, 2000, 17(3): 423 – 428.
(YU L. Optimal guaranteed cost control of linear uncertain system: an LMI approach[J]. *Control Theory & Applications*, 2000, 17(3): 423 – 428.)
- [9] 倪国熙. 常用的矩阵理论和方法[M]. 上海: 上海科学技术出版社, 1984: 130 – 131.
(NI Guoxi. *General Theory and Measures of Matrix*[M]. Shanghai: Shanghai Scientific and Technical Publisher, 1984: 130 – 131.)

作者简介:

黄 剑 (1975—), 男, 讲师, 主要研究方向为管控一体化、网络控制系统的分析与建模、生物信息与控制技术, E-mail: huang_jian531@126.com;

关治洪 (1955—), 男, 教授, 博士生导师, 主要研究方向为脉冲系统、时滞系统、非线性复杂系统控制, E-mail: zhguan@mail.hust.edu.cn;

王仲东 (1944—), 男, 教授, 主要研究方向为管控一体化、智能仪器仪表研制.

(上接第970页)

- [2] GUO Zhi. A survey of satisfying control and estimation [C]// Han-Fu CHEN. *Proc of the 14th IFAC Congress*. Beijing: Tsinghua University Press, 1999: 443 – 447.
- [3] CHILALI M, GAHINET P. H_∞ design with pole placement constraints: an LMI approach [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1996, 41(3): 358 – 366.
- [4] SHIMOMURA T, FUJII T. Multi-objective control design via successive over-bounding of quadratic terms[C]//*Proc of the 39th IEEE Conf on Decision and Control*. [s.l.]: [s.n.], 2000: 2763 – 2768.
- [5] BOYD S, GHAOUIL L E, FERON E, et al. *Linear Matrix Inequalities in Systems and Control Theory*[M]. Philadelphia, PA: SIAM, 1994.

作者简介:

臧文利 (1979—), 男, 博士研究生, 主要研究方向为满意控制及应用、信号与信息处理, E-mail: zwl1024@sina.com;

王远钢 (1964—), 男, 副教授, 主要研究方向为控制与估计中性能指标的相容性研究;

郭 治 (1937—), 男, 教授, 博士生导师, 目前主要研究领域为满意控制与估计、火力控制;

王艳霞 (1976—), 女, 博士研究生, 主要研究方向为满意控制及其应用.