文章编号: 1000−8152(2006)06−1001−04

一类线性不确定切换时滞系统的可靠保成本控制

汪 锐, 刘建昌, 赵 军

(东北大学 信息科学与工程学院, 辽宁 沈阳 110004)

摘要: 研究了一类含有故障执行器的线性不确定切换时滞系统的可靠保成本鲁棒控制问题. 当执行器发生“严重失效”—-未失效执行器不能镇定原系统时, 基于多Lyapunov 函数的方法, 以线性矩阵不等式(LMIs)的形式给出了状态反馈可靠保成本控制器存在的充分条件, 同时对于闭环系统的成本函数进行了优化. 最后用仿真结果验证了所设计方法的有效性.

关键词: 切换系统; 时滞系统; 可靠保成本; 多Lyapunov 函数

中图分类号: TP13 **文献标识码**: A

Reliable guaranteed-cost control for a class of uncertain switched linear systems with time-delay

WANG Rui, LIU Jian-chang, ZHAO Jun

(School of Information Science and Engineering, Northeastern University, Shenyang Liaoning 110004, China)

Abstract: The problem of the reliable guaranteed -cost robust control for a class of uncertain switched linear time-delay systems with actuator failures is addressed in this paper. When actuators suffer from “serious failure”, the survived actuators can not stabilize the given system. Based on multiple Lyapunov function technique, we derived a sufficient condition for the existence of state feedback reliable guaranteed-cost controller in terms of linear matrix inequalities (LMIs). The cost function of the closed-loop system is also optimized via quadratic index. Finally, a numerical example illustrates the effectiveness of the proposed approach.

Key words: switched systems; time-delay systems; reliable guaranteed-cost; multiple-Lyapunov function

1 引言(Introduction)

切换系统由于其广泛的应用背景, 近年来引起了人们极大的关注[1~4]. 稳定性问题仍然是研究最为集中的问题, 其中多Lyapunov 函数方法是分析切换系统在某一切换策略下渐近稳定的常用工具. Branicky 利用多Lyapunov 函数方法给出了切换系统稳定性的结果[1], 在文献[5]中, Michel 等人在削弱能量函数的保守性上做了许多有意义的工作, 使多Lyapunov 函数方法使用范围更广泛. 但利用该方法研究切换时滞系统的文献还比较少见.

另一方面, 在实际控制系统中, 执行器发生失效的情况往往是难以避免的. 在这种情况下, 怎样使得闭环系统渐近稳定并且满足一定的性能指标是一个十分有意义的课题. 自1972年Chang 和Peng[6]提出参数不确定系统保成本控制问题以来, 不确定系统的可靠保成本控制取得了很大的进展[7,8]. 但这些传统的可靠保成本控制设计方案都有一个基本假设：未失效执行器部分必须能镇定原系统. 这显然是一个理想的设计条件. 在实际中, 执行器常常会发生“严重失效”—-未失效部分不能镇定系统, 这时传统的可靠保成本控制设计方案将无法使用.

本文针对一类不确定切换时滞系统, 研究这种执行器“严重失效”情况下的可靠保成本控制问题. 利用多Lyapunov 函数的方法, 以LMIs的形式给出了系统存在状态反馈可靠保成本控制器的充分条件, 并对闭环系统的成本函数做了优化处理.

2 问题描述(Problem formulation)

考虑如下一类线性不确定切换时滞系统

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (A_\sigma + \Delta A_\sigma)x(t) + (A_{h_\sigma} + \\ \qquad \Delta A_{h_\sigma})x(t-h) + B_\sigma u_{\sigma(t)}, \\ x_0(\theta) = \varphi(\theta), \theta \in [-h, 0]. \end{cases} \tag{1}$$

收稿日期: 2005−03−23; 收修改稿日期: 2005−12−05.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(60274009); 辽宁省自然科学基金资助项目(20032020).

其中: $x(t) \in \mathbb{R}^n$为状态向量; $\sigma(t):[0,+\infty) \to M=\{1,2,\cdots,m\}$是切换信号, 它通常是一个依赖于时间$t$或状态$x$ 的分段常值函数; $u_i \in \mathbb{R}^{k_i}$为控制输入向量; A_i, A_{h_i}, B_i为具有适当维数的常数矩阵; h为常数时滞; $\Delta A_i, \Delta A_{h_i}$ 为系统中的不确定矩阵, 具有如下结构:

$$[\Delta A_i, \Delta A_{h_i}] = D_i F_i(t)[E_i, E_{h_i}].$$

其中: D_i, E_i, E_{h_i}是具有适当维数的常数矩阵, $F_i(t)$是未知函数矩阵, 且满足

$$F_i^{\mathrm{T}}(t)F_i(t) \leqslant I.$$

将系统(1)中的执行器分成两部分: 第1部分$\Theta_i \subseteq \{1,2,\cdots,k_i\}(i \in M)$表示在系统运行中可能失效的全体执行器所组成的集合; 第2部分$\bar{\Theta}_i \subseteq \{1,2,\cdots,k_i\}-\Theta_i(i \in M)$则表示在系统运行中不出现失效的全体执行器所组成的集合, 于是对于B_i有下述分解:

$$B_i = B_{\bar{\Theta}_i} + B_{\Theta_i}, i \in M.$$

其中$B_{\bar{\Theta}_i}, B_{\Theta_i}$是分别将$B_i$对应于$\Theta_i, \bar{\Theta}_i$ 的列向量取0得到.

定义系统运行中实际失效的执行器的集合为$\omega_i, \omega_i \subseteq \Theta_i, \bar{\omega}_i$ 为实际未失效的执行器集合, 则有下列不等式成立:

$$B_{\bar{\Theta}_i}B_{\bar{\Theta}_i}^{\mathrm{T}} \leqslant B_{\bar{\omega}_i}B_{\bar{\omega}_i}^{\mathrm{T}},\ B_{\omega_i}B_{\omega_i}^{\mathrm{T}} \leqslant B_{\Theta_i}B_{\Theta_i}^{\mathrm{T}}. \tag{2}$$

对系统(1)定义二次型性能指标

$$J = \int_0^{\infty}[x^{\mathrm{T}}(t)Qx(t) + u_{\sigma(t)}^{\mathrm{T}}Ru_{\sigma(t)}]\mathrm{d}t. \tag{3}$$

其中Q和R为正定加权矩阵.

下面给出切换时滞系统(1)的可靠保成本控制的定义.

定义 1 对系统(1)和性能指标(3), 如果存在一个状态反馈控制律$u_{\sigma(t)}^*$ 和一个正数J^*, 使得对所有允许的不确定性和所有可能的执行器失效, 闭环系统是渐近稳定的, 并且其闭环性能指标满足$J \leqslant J^*$, 则J^* 称为不确定切换系统(1)的一个性能上界, $u_{\sigma(t)}^*$称为不确定切换系统(1)的一个状态反馈可靠保成本(性能)控制律.

3 主要结果(Main result)

考虑切换时滞系统(1), 令

$$u_\sigma = K_\sigma x. \tag{4}$$

下面给出使系统(1)满足可靠保成本控制的一个充分条件.

定理 1 若存在同时非负实数β_{ij}(或同时非正), 及正常数ε_i 以及对称正定矩阵$P_i>0, S>0$, 使得下面矩阵不等式组

$$\begin{pmatrix} \Sigma_i & P_iA_{h_i}+\varepsilon_iE_i^{\mathrm{T}}E_{h_i} \\ * & -S+\varepsilon_iE_{h_i}^{\mathrm{T}}E_{h_i} \end{pmatrix} < 0 \tag{5}$$

对$\forall i \in M$都成立, 其中

$$\Sigma_i = \Pi_i + \sum_{j=1}^m \beta_{ij}(P_i - P_j),$$

$$\begin{aligned}\Pi_i = {} & Q + S + P_iA_i + A_i^{\mathrm{T}}P_i + \\ & \varepsilon_i^{-1}P_iD_iD_i^{\mathrm{T}}P_i - \\ & P_iB_{\bar{\Theta}_i}R^{-1}B_{\bar{\Theta}_i}^{\mathrm{T}}P_i + \varepsilon_iE_i^{\mathrm{T}}E_i,\end{aligned}$$

则对任何相应于$\omega_i \subseteq \Theta_i$的执行器失效, 存在控制增益为$K_i = -R^{-1}B_i^{\mathrm{T}}P_i$的状态反馈控制器(4)使系统(1)满足可靠保成本控制. 当β_{ij} 同为非负时, 性能上界是

$$J^* = \max_{i \in M}\{\varphi^{\mathrm{T}}(0)P_i\varphi(0) + \int_{-h}^0 \varphi^{\mathrm{T}}(\theta)S\varphi(\theta)\mathrm{d}\theta\}; \tag{6}$$

当β_{ij}同为非正时, 性能上界是

$$J^* = \min_{i \in M}\{\varphi^{\mathrm{T}}(0)P_i\varphi(0) + \int_{-h}^0 \varphi^{\mathrm{T}}(\theta)S\varphi(\theta)\mathrm{d}\theta\}. \tag{7}$$

证 不妨设β_{ij}同为非负. 令

$$V_i(x_t) = x^{\mathrm{T}}(t)P_ix(t) + \int_{t-h}^t x^{\mathrm{T}}(\theta)Sx(\theta)\mathrm{d}\theta.$$

P_i, S为满足式(5)的对称正定矩阵. 构造切换律$\sigma = \arg\max\{x^{\mathrm{T}}P_ix, i \in M\}$.

利用多Lyapunov 函数方法,结合式(5)和式(2), 易得到切换系统(1)渐近稳定性的证明. 由于篇幅有限, 此证明略去.

下面说明式(6)是相应的闭环性能指标的一个上界. 不失一般性, 假设$x_0^{\mathrm{T}}P_{i_0}x_0 = \max\limits_{i_k \in M}\{x_0^{\mathrm{T}}P_{i_k}x_0\}$, 根据式(5)不难得到

$$\begin{aligned} J = {} & \\ & \sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^{\infty}\int_{t_{i_j}}^{t_{i_j+1}}[x^{\mathrm{T}}(t)Qx(t) + u_i^{\mathrm{T}}Ru_i + \\ & \dot{V}_i(x(t))]\mathrm{d}t - \sum_{k=0}^{\infty}\int_{t_k}^{t_{k+1}}\dot{V}_{i_k}(x(t))\mathrm{d}t \leqslant \\ & -\sum_{k=0}^{\infty}\int_{t_k}^{t_{k+1}}\dot{V}_{i_k}(x(t))\mathrm{d}t = \\ & V_{i_0}(x(t_0)) = \\ & \varphi^{\mathrm{T}}(0)P_{i_0}\varphi(0) + \int_{-h}^0 \varphi^{\mathrm{T}}(\theta)S\varphi(\theta)\mathrm{d}\theta. \end{aligned}$$

当β_{ij}同为非正时, 同理可证.

注 1 对于任意给定的矩阵H_i, 由Schur补引理,

式(5)可以转化为如下LMIs的形式:

$$\begin{pmatrix} \Xi_i & P_iA_{h_i}+\varepsilon_iE_i^{\mathrm{T}}E_{h_i} & P_iD_i \\ * & -S+\varepsilon_iE_{h_i}^{\mathrm{T}}E_{h_i} & 0 \\ * & 0 & -\varepsilon_iI \end{pmatrix}<0,\ i\in M. \tag{8}$$

其中:

$$\Xi_i=Q+S+P_iA_i+A_i^{\mathrm{T}}P_i+H_iB_{\bar\Theta_i}R^{-1}B_{\bar\Theta_i}^{\mathrm{T}}H_i^{\mathrm{T}}-H_iB_{\bar\Theta_i}R^{-1}B_{\bar\Theta_i}^{\mathrm{T}}P_i-P_iB_{\bar\Theta_i}R^{-1}B_{\bar\Theta_i}^{\mathrm{T}}H_i^{\mathrm{T}}+\varepsilon_iE_i^{\mathrm{T}}E_i+\sum_{j=1}^{m}\beta_{ij}(P_i-P_j).$$

考虑系统(1)和性能指标(3), 不失一般性, 当β_{ij}同为非负时, 令$\int_{-h}^{0}\varphi(\theta)\varphi^{\mathrm{T}}(\theta)\mathrm{d}\theta=NN^{\mathrm{T}}$, 如果下面优化问题

$$\min_{p_1,p_2,\cdots,p_m}\sum_{i=1}^{m}\varphi^{\mathrm{T}}(0)P_i\varphi(0)+\mathrm{tr}\,W \tag{9}$$

s.t. i) 式(8),

ii) $N^{\mathrm{T}}SN<W$

有可行解$P_1,P_2,\cdots,P_m$, 则存在使性能指标(6)次优化的状态反馈控制器$u_{\sigma(t)}^*=\hat K_{\sigma(t)}x(t)$, 次优系统成本上界为

$$J^*<\varphi^{\mathrm{T}}(0)\hat P\varphi(0)+\mathrm{tr}\,W.$$

其中: $\hat P=P_{\sigma(t_0)},\sigma(t_0)=\arg\max\limits_{i\in M}\{\varphi^{\mathrm{T}}(0)P_i\varphi(0)\}$, 控制增益$\hat K_i=-R^{-1}B_i^{\mathrm{T}}\hat P$.

4 仿真例子(Simulation example)

考虑线性不确定切换时滞系统(1), 其中

$$A_1=\begin{pmatrix}-5&0\\-3&1\end{pmatrix},\ A_2=\begin{pmatrix}1&-2\\0&-3\end{pmatrix},$$

$$B_1=\begin{pmatrix}2&1\\1&0\end{pmatrix},\ B_2=\begin{pmatrix}3&1\\1&2\end{pmatrix},$$

$$A_{h_1}=\begin{pmatrix}1&0.2\\-0.1&0.6\end{pmatrix},\ A_{h_2}=\begin{pmatrix}0.5&0.1\\0.2&0.4\end{pmatrix},$$

$$E_1=\begin{pmatrix}0.2&0.5\\0.1&0\end{pmatrix},\ D_i=\begin{pmatrix}0&0.2\\0.5&0\end{pmatrix},$$

$$F_i(t)=\sin t,\ h=1,\ E_2=\begin{pmatrix}0&0.2\\0.4&0\end{pmatrix},$$

$$E_{h_i}=\begin{pmatrix}0.1&0\\0&0.1\end{pmatrix},\ B_{\bar\Theta_1}=\begin{pmatrix}2&0\\1&0\end{pmatrix},$$

$$B_{\bar\Theta_2}=\begin{pmatrix}0&1\\0&2\end{pmatrix},\ i\in M=\{1,2\}.$$

取成本函数(3)中的正定加权矩阵

$$Q=R=\begin{pmatrix}0.5&0\\0&0.5\end{pmatrix}.$$

当系统的执行器发生失效时, $(A_i,B_{\bar\Theta_i})(i=1,2)$是不可控的, 显然该系统的两个子系统是不稳定的. 若取$\beta_{12}=1,\beta_{21}=0.5$, 通过求解优化问题(9), 得到正定矩阵

$$P_1=\begin{pmatrix}1.7850&0.5029\\0.5029&0.1428\end{pmatrix},$$

$$P_2=\begin{pmatrix}0.1591&0.6715\\0.6715&2.8539\end{pmatrix},$$

$$S=\begin{pmatrix}0.2346&0.0515\\0.0515&0.0403\end{pmatrix}.$$

令$\Omega_1=\{x\in\mathbb{R}^n|x^{\mathrm{T}}(P_1-P_2)x\geqslant0,x\neq0\},\Omega_2=\{x\in\mathbb{R}^n|x^{\mathrm{T}}(P_2-P_1)x\geqslant0,x\neq0\}$, 则$\Omega_1\cup\Omega_2=\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$. 下面给出切换律的设计:

$$\sigma(t)=\begin{cases}1,\ x(t)\in\Omega_1,\\2,\ x(t)\in\Omega_2\backslash\Omega_1.\end{cases}$$

设计次优状态反馈控制器$u_i=\hat K_ix=-R^{-1}B_i^{\mathrm{T}}\hat Px$, 其中$\hat P=P_{\sigma(t_0)}$. 取$x_0(\theta)=(-1\ \ 2)^{\mathrm{T}}$, 由图1 可以看出, 在所设计的次优状态反馈控制器下, 系统是渐近稳定的, 并且得到一个次优成本上界

$$J^*=\varphi^{\mathrm{T}}(0)P_2\varphi(0)+\int_{-1}^{0}\varphi^{\mathrm{T}}(\theta)S\varphi(\theta)\mathrm{d}\theta=12.8887.$$

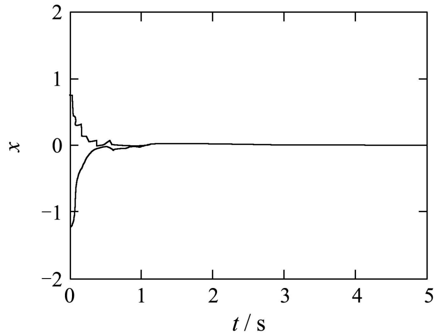

图 1 切换系统状态响应

Fig. 1 State responses of switched system

5 结论(Conclusion)

本文针对一类具有时变参数不确定性的线性切换时滞系统, 在系统执行器发生严重失效的情况下对保成本控制问题进行了研究. 利用多Lyapunov 函数的方法, 以LMIs 的形式给出了系统存在状态反馈可靠保成本控制器的设计方案, 使得闭环系统对所有可能的不确定性和所允许的执行器失效是渐近稳定的, 同时给出闭环系统的成本上界的优化方法.

参考文献(References):

[1] BRANICKY M S. Multiple Lyapunov functions and other analysis tools for switched and hybrid systems[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1998, 43(4): 475 – 482.

[2] SUN Z D, GE S S. *Switched Linear Systems-Control and Design*[M]. New York: Springer -Verlag, 2004.

[3] ZHAO J, DIMIROVSKI G M. Quadratic stability of a class of switched nonlinear systems[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2004, 49(4): 574 – 578.

[4] 孙洪飞, 赵军. 切换对称组合系统的稳定性[J]. 控制理论与应用, 2003, 20(3): 441 – 444.
(SUN Hongfei, ZHAO Jun. Stability of a class of switched symmetric composite systems[J]. *Control Theory & Applications*, 2003, 20(3): 441 – 444.)

[5] MICHEL A N. Recent trends in the stability analysis of hybrid dynamical systems[J]. *IEEE Trans on Circuits System-I*, 1999, 46(1): 120 – 134.

[6] CHANG S S L, PENG T K C. Adaptive guaranteed cost control of systems with uncertain parameters[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1972, 17(4): 474 – 483.

[7] YANG G H, WANG J L, YENG C S. Reliable guaranteed cost control for uncertain nonlinear systems[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2000, 45(11): 2188 – 2192.

[8] 贾新春, 郑南宁, 张元林. 线性不确定时滞系统的可靠保性能鲁棒控制[J]. 自动化学报, 2003, 29(6): 971 – 975.
(JIA Xinchun, ZHEN Nianning, ZHANG Yuanlin. Reliable guaranteed cost robust control for linear uncertain time-delay systems[J]. *Acta Automatica Sinica*, 2003, 29(6): 971 – 975.)

作者简介:

汪 锐 (1977—), 女, 博士研究生, 主要从事切换系统、容错控制方面的研究, E-mail: ruiwang01@126.com;

刘建昌 (1960—), 男, 教授, 博士生导师, 研究领域为智能控制理论与应用、复杂过程控制技术, E-mail: liujianchang@ise.neu.edu.cn;

赵 军 (1957—), 男, 教授, 博士生导师, 1991 年于东北大学信息科学与工程学院获博士学位, 1998–1999 年作为高级访问学者赴美国Illinois(Urbana-Champaign)研修, 从2003年10月至2004年10月, 作为高级访问学者在香港城市大学研修, 现为中国自动化学会控制理论委员会委员,《控制理论与应用》编委, 主要研究方向为复杂非线性系统结构、切换系统等, E-mail: zhaojun@ise.neu.edu.cn.

(上接第1000页)

[7] GU D W, POON F W. Authors' reply [comment on "a robust state oberserver scheme"][J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2003, 48(7): 1293 – 1294.

[8] 程云鹏, 张凯院, 徐仲. 矩阵论[M]. 西安: 西北工业大学出版社, 2000.
(CHENG Yuanpeng, ZHANG Kaiyuan, XU Zhong. *Matrix Theory* [M]. Xi'an: Northwest Polytechnical University Press, 2000.)

[9] KHALIL H K. *Nonlinear Systems*[M]. 3rd edition. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 2002.

[10] POON F W. *Observer based robust fault detection:theory and rolling mill case study*[D]. UK: Univerdity of Leicester, 2000.

[11] GAHINET P, NEMIROVSKI A, LAUB A J, et al. *LMI Control Toolbox* [M]. Natick, MA: The Math Work Inc, 1995.

作者简介:

项 基 (1974—), 男, 讲师, 主要研究领域为滑模控制和复杂系统;

苏宏业 (1969—), 男, 教授, 博士生导师, 主要研究方向为现代控制理论与应用;

褚 健 (1963—), 男, 教授, 博士生导师, 主要研究领域为自动控制理论及应用、先进过程控制和现场总线控制系统等.