文章编号: 1000−8152(2006)06−1005−04

非线性仿射控制系统的C^0镇定性

陈少白[1], 谭光兴[2], 毛宗源[3]

(1. 武汉科技大学 理学院, 湖北 武汉 430081; 2. 广西工学院 管理工程系, 广西 柳州 545006;
3. 华南理工大学 自动化科学与工程学院, 广东 广州 510640)

摘要: 通过Lyapunov函数设计反馈控制器使得非线性仿射控制系统全局渐进稳定是一种有效的方法. 为了使得反馈控制器具有连续性, Sontag提出控制Lyapunov函数应具有小控制性, 即要求在原点连续反馈控制器存在, 该条件在实际中无法应用. 针对这一问题本文提出了聚点条件来保证反馈控制器具有连续性, 该条件直接对选择的控制Lyapunov函数进行检验, 并且聚点条件还是必要的; 文章将控制Lyapunov函数的严格不等式放宽为非严格的不等式, 提出非严格控制Lyapunov函数, 利用LaSalle定理得到: 采用满足聚点条件的非严格控制Lyapunov函数来设计连续反馈控制器, 非线性仿射控制系统是全局渐进稳定, 扩大了控制Lyapunov函数的寻找范围; 最后通过对一种带摩擦的弹簧系统进行验证.

关键词: 非线性仿射控制系统; C^0镇定; 控制Lyapunov函数; 非严格控制Lyapunov函数
中图分类号: TP273　　**文献标识码**: A

C^0-stabilizablity of nonlinear control-affine systems

CHEN Shao-bai[1], TAN Guang-xing[2], MAO Zong-yuan[3]

(1. College of Sciences,Wuhan University of Science and Technology, Wuhan Hubei 430081, China;
2. Management Engineering Department, Guangxi Univesity of Technology, Liuzhou Guangxi 545006, China:
3. College of Automation Science and Technology, South China University of Technology, Guangzhou Guangdong 510640, China)

Abstract: In order to eliminate the difficulty in the design of Lyapunov function proposed by Sontag, the C^0-stabilizablity of nonlinear affine control systems is studied in this paper. Firstly, the accumulation point condition is briefly introduced in order to ensure the continuity of the Sontag's formula. Secondly, the accumulation point condition is also proved to be necessary for the continuity of Sontag's formula. Thirdly, the strict control Lyapunov function is replaced by non-strict control Lyapunov function in the nonlinear affine control systems. Motivated by LaSalle theorem, the system with non-strict Lyapunov function which is said to satisfy the accumulation point condition is proved to be C^0-stabilizable, the optional range of Lyapunov function is thus extended. Finally, an example of frictional spring system is given to validate this theory.

Key words: nonlinear affine control system; C^0-stabilizable; control Lyapunov function; non-strict control Lyapunov function

1 引言(Introduction)

考虑如下非线性仿射控制系统
$$\dot{x} = f(x) + g(x)u. \tag{1}$$
其中: $x \in \mathbb{R}^n$为系统状态变量, 函数$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$与$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n\times m}$是连续函数, $u \in \mathbb{R}^m$是控制向量, 并且$f(0) = 0$.

如果能够找到一个连续的控制器$u = \alpha(x)$, 使得非线性仿射控制系统(1)是全局渐进稳定, 称系统是C^0 镇定的(C^0-stabilizable)[1]. 为了解决这个问题, Lyapunov 函数方法是一个有力工具.

考虑系统(1)的一个待选的Lyapunov函数$V : \mathbb{R} \to [0, \infty)$, 其对时间的导数
$$\dot{V} = L_f V + L_g V u. \tag{2}$$
其中: $L_f V = \dfrac{\partial V}{\partial x} f(x), L_g V = \dfrac{\partial V}{\partial x} g(x)$.

为使系统(1) C^0镇定, 需要确定两个函数, 一个连续的控制器$u = \alpha(x)$, 一个在该控制器下, 导函数负定的Lyapunov函数$V(x)$. 1983年Artstein[2]和Sontag[3] 同时提出了所谓控制Lyapunov函数(the control Lyapunov function)概念.

收稿日期: 2005−04−04; 收修改稿日期: 2006−01−16.

一个光滑、正定、一致无界函数$V(x)$称作是控制Lyapunov函数(简称clf), 如果满足条件

$$\inf_{u\in\mathbb{R}^m}\{L_fV+L_gVu\}<0,\ \forall x\neq 0, \tag{3}$$

条件(3)也可以替换为等价形式

$$L_gV=0\Rightarrow L_fV<0,\ \forall x\neq 0. \tag{4}$$

注 1 条件(3)表明对于所选择的Lyapunov函数$V(x)$, 应存在控制u, 使得它的导数$\dot V$在原点以外始终为负值. 当$L_gV\neq 0$时, 总可以取u使得$\dot V<0$, 而当$L_gV=0$时, 控制u不会对$\dot V$起作用, 因此式(4)表明要求选择的Lyapunov函数$V(x)$此时满足$L_fV<0$.

Sontag在文献[4]证明, 如果非线性仿射控制系统(1)存在一个控制Lyapunov函数$V(x)$, 那么就可以找到控制律u, 使得导数$\dot V$沿轨道是负定, 并且给出一个由控制Lyapunov函数$V(x)$确定的一般公式(Sontag's formula):

$$\alpha_s(x)=\begin{cases}\dfrac{L_fV+\sqrt{(L_fV)^2+(L_gV(L_gV)^{\mathrm T})^2}}{-L_gV(L_gV)^{\mathrm T}}(L_gV)^{\mathrm T}, & L_gV\neq 0,\\ 0, & L_gV=0.\end{cases} \tag{5}$$

为了保证Sontag公式在原点连续, Sontag对控制Lyapunov函数$V(x)$的选择提出进一步的要求:

一个控制Lyapunov函数$V(x)$称作具有小控制性[5], 如果存在$\mathbb{R}^n$上连续的控制律$\alpha_{\rm c}(x)$, 使得

$$L_fV+L_gV\alpha_{\rm c}<0,\ \forall x\neq 0. \tag{6}$$

同时给出下列定理:

定理(Sontag) 在连续的控制律下, 非线性仿射控制系统(1)镇定的充分必要条件是存在一个具有小控制性的控制Lyapunov函数.

控制Lyapunov函数$V(x)$具有小控制性表明, 如果所选的控制Lyapunov函数$V(x)$在$\mathbb{R}^n$上有连续的控制律$\alpha_{\rm c}(x)$使得$\dot V<0$, 则Sontag公式在$\mathbb{R}^n$上也是连续的. 为了保证由Sontag公式给出的控制律在原点连续, 又需要证明存在$\mathbb{R}^n$上连续的另外一个连续的控制律, 使得Sontag公式失去实际应用价值.

为解决上述问题, 本文的第一个工作是直接针对控制Lyapunov函数$V(x)$提出一个所谓聚点条件, 确保Sontag公式在$\mathbb{R}^n$上连续. 本文的另一项工作是将条件(4)中的严格小于零的不等式放宽为非严格小于零的不等式, 提出非严格控制Lyapunov函数概念, 利用LaSalle定理, 得到系统(1) C^0镇定的一个充分条件, 这样使得Lyapunov函数$V(x)$的选择范围得到扩大.

2 聚点条件(Accumulation point condition)

在欧氏空间中, 一个点x_0为一个集合H的聚点是指: 在x_0的任何邻域中, 总有集合H的无穷多个点. 如果集合H是区域, 则其边界点、内点均为集合H的聚点.

定义 1 一个控制Lyapunov函数$V(x)$称作满足聚点条件, 如果原点是集合

$$H=\{x\in\mathbb{R}^n: L_fV(x)>0, L_gV(x)\neq 0\} \tag{7}$$

的聚点, 则

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\in H}}\frac{L_fV(x)}{|L_gV(x)|}=0 \tag{8}$$

成立.

直观地讲, 针对$L_fV(x)>0$区域, $L_fV(x)$在原点是$L_gV(x)$的高阶无穷小.

定理 1 如果clf $V(x)$满足聚点条件, 那么它的Sontag公式在$\mathbb{R}^n$上连续.

证 考虑Sontag控制律$\alpha_s(x)$在任意点$x_0\in\mathbb{R}^n$的连续性.

分两种情形讨论:

如果$L_gV(x_0)\neq 0$, 根据函数$L_gV(x)$的连续性, 存在x_0的一个邻域, 使得在该邻域内$L_gV(x)\neq 0$, 由于函数$\alpha_s(x)$在该邻域上是一个初等函数表示, 所以$\alpha_s(x)$在点x_0连续.

如果$L_gV(x_0)=0$, 对于$x_0\neq 0$, 根据控制Lyapunov函数$V(x)$定义, $L_gV(x)<0$, 由函数$L_fV(x)$的连续性, 则存在x_0的一个邻域, 使得在该邻域上总有$L_fV(x)<0$, 注意到不等式

$$L_fV+\sqrt{(L_fV)^2+(L_gV(L_gV)^{\mathrm T})^2}\leqslant L_gV(L_gV)^{\mathrm T} \tag{9}$$

对于$L_fV\leqslant 0$成立, 于是

$$|\alpha_s(x)-\alpha_s(x_0)|=|\alpha_s(x)|\leqslant \begin{cases}\left|\dfrac{L_fV+\sqrt{(L_fV)^2+(L_gV(L_gV)^{\mathrm T})^2}}{L_gV(L_gV)^{\mathrm T}}\right||(L_gV)|, & L_gV\neq 0;\\ 0, & L_gV=0,\end{cases}\leqslant |L_gV(x)|. \tag{10}$$

由于当$x\to x_0$有$L_gV(x)\to 0$成立, $\alpha_s(x)$在x_0连续.

对于$x_0=0$, x趋近于0分3种情形:

情形 1 对于$x\in H, x\to 0$. 由聚点条件

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\in H}}|\alpha_s(x)-\alpha_s(0)|=\lim_{\substack{x\to 0\\ x\in H}}\left|\frac{L_fV+\sqrt{(L_fV)^2+(L_gV(L_gV)^{\mathrm T})^2}}{L_gV(L_gV)^{\mathrm T}}\right||(L_gV)|=0.$$

情形 2 对于$x\in\{x:L_fV(x)\leqslant 0, L_gV(x)\neq 0\}$,$x\to 0$. 由式(10), 当$x\in\{x:L_fV(x)\leqslant 0, L_gV(x)\neq 0\}$时,

$$|\alpha_s(x)-\alpha_s(0)|\leqslant|L_gV(x)|\to 0,\ (x\to 0).$$

情形 3 对于$x\in\{L_gV(x)=0\}$,$x\to 0$. 此时$\alpha_s(x)-\alpha_s(0)\equiv 0$. 因此$\alpha_s(x)$在$x_0=0$连续. 总之, $\alpha(x)$在$\mathbb{R}^n$上连续. 证毕.

保证Sontag控制律$\alpha_s(x)$在原点连续, 聚点条件还是必要的.

定理 2 如果clf $V(x)$的Sontag公式在$\mathbb{R}^n$上连续, 那么它满足聚点条件.

证 假设clf $V(x)$的Sontag公式$\alpha_s(x)$在$\mathbb{R}^n$上连续, 原点是集合H 的聚点, 则

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\in H}}|\alpha_s(x)-\alpha_s(0)|=0,$$

即

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\in H}}\left|\frac{L_fV+\sqrt{(L_fV)^2+(L_gV(L_gV)^{\mathrm{T}})^2}}{L_gV(L_gV)^{\mathrm{T}}}\right||(L_gV)|=0.$$

由不等式

$$\frac{|L_fV(x)|}{|L_gV(x)|}\leqslant \left|\frac{L_fV+\sqrt{(L_fV)^2+(L_gV(L_gV)^{\mathrm{T}})^2}}{L_gV(L_gV)^{\mathrm{T}}}\right||(L_gV)|,$$

知式(8)成立. clf $V(x)$满足聚点条件. 证毕.

推论 1 clf $V(x)$满足聚点条件的充分必要条件是$V(x)$具有小控制性.

推论 2 系统(1)是C^0-镇定的充分必要条件是存在一个满足聚点条件的clf $V(x)$.

3 非严格控制Lyapunov函数(Non-strict control Lyapunov function)

定义 2 一个光滑、正定、一致无界函数$V(x)$称作是一个非严格控制Lyapunov函数(简称nclf), 如果满足条件

$$\begin{cases}\inf\limits_{u\in\mathbb{R}^m}\{L_fV+L_gVu\}\leqslant 0,\\ \forall x\neq 0,\end{cases}\tag{11}$$

条件(4)也可以替换为等价形式

$$L_gV=0\Rightarrow L_fV\leqslant 0,\ \ \forall x\neq 0.\tag{12}$$

定义 3 非严格控制Lyapunov函数$V(x)$称作满足聚点条件, 如果元素x_0属于集合

$$S=\{x\in\mathbb{R}^n:L_fV(x)=0, L_gV(x)=0\},\tag{13}$$

同时又是集合

$$H=\{x\in\mathbb{R}^n:L_fV(x)>0, L_gV(x)\neq 0\}$$

的聚点, 则

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in H}}\frac{L_fV(x)}{|L_gV(x)|}=0.\tag{14}$$

定理 3 满足聚点条件的nclf $V(x)$其Sontag公式在$\mathbb{R}^n$上连续.

证 对于任意$x_0\in\mathbb{R}^n$, 分两种情形讨论:

如果$L_gV(x_0)\neq 0$, 证明同定理1.

如果$L_gV(x_0)=0$, 那么根据nclf $V(x)$条件知$L_fV(x_0)\leqslant 0$, 对于$L_fV(x_0)<0$, 证明同定理1; 对于$L_fV(x_0)=0$, x趋近于x_0分3种情形:

情形 1 对于$x\in H, x\to x_0$. 由聚点条件

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in H}}|\alpha_s(x)-\alpha_s(x_0)|=$$
$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in H}}\left|\frac{L_fV+\sqrt{(L_fV)^2+(L_gV(L_gV)^{\mathrm{T}})^2}}{L_gV(L_gV)^{\mathrm{T}}}\right||(L_gV)|=0.$$

情形 2 对于$x\in\{x:L_fV(x)\leqslant 0, L_gV(x)\neq 0\}$, $x\to x_0$. 由式(10)

$$|\alpha_s(x)-\alpha_s(x_0)|\leqslant|L_gV(x)|\to 0(x\to x_0).$$

情形 3 对于$x\in\{L_gV(x)=0\}$, $x\to x_0$. 此时$\alpha_s(x)-\alpha_s(x_0)\equiv 0$.

总之, $\alpha_s(x)$在$\mathbb{R}^n$上连续. 证毕.

同定理2一样, 如果nclf $V(x)$的Sontag公式在$\mathbb{R}^n$上连续那么nclf $V(x)$满足聚点条件.

定理 4 如果存在一个满足聚点条件的nclf $V(x)$, 并且在连续控制律$u=\alpha_s(x)$下, 系统(1)在集合$S=\{x\in\mathbb{R}^n:L_fV(x)=0, L_gV(x)=0\}$中没有非平凡解, 那么, 系统(1)是$C^0$-镇定的.

证 设nclf $V(x)$满足聚点条件, 其控制律取$u=\alpha_s(x)$(Sontag公式). 在控制律$u=\alpha_s(x)$下系统(1)的轨迹为$x(t)$, 考虑V对时间的导数

$$\dot V=L_fV(x)+L_gV(x)\alpha_s(x)=$$
$$\begin{cases}-\sqrt{(L_fV)^2+(L_gV(L_gV)^{\mathrm{T}})^2}, & L_gV\neq 0,\\ L_fV, & L_gV=0,\end{cases}$$

得到结论:

1) $\dot V(x)\leqslant 0$;

2) $\dot V(x)=0\Leftrightarrow L_fV(x)=0, L_gV(x)=0$.

如果轨迹$x(t)$保持在集合$\{x\in\mathbb{R}^n:\dot V=0\}$, 则$x(t)$保持在集合$S$中, 由定理条件, 集合$\{x\in\mathbb{R}^n:\dot V=0\}$中只有平凡解, 根据LaSalle定理, 系统(1)在连续控制律$u=\alpha_s(x)$下是全局渐进稳定的.

4 举例(Example)

考虑带摩擦的弹簧控制系统

$$\begin{cases}\dot x_1=x_2,\\ \dot x_2=\sin x_2-x_1+u\sqrt{|x_2|}.\end{cases}\tag{15}$$

它是一个非线性仿射控制系统. 选择Lyapunov函数
$$V(x_1,x_2)=\frac{1}{2}(x_1^2+x_2^2),$$
其对时间的导数
$$\dot{V}=x_2\sin x_2+ux_2\sqrt{|x_2|}.$$
这里: $L_fV=x_2\sin x_2, L_gV=x_2\sqrt{|x_2|}$.

由于$L_gV = x_2\sqrt{|x_2|} = 0$时, $L_fV \leqslant 0$, 所以$V(x)$ 是非严格控制Lyapunov函数.

不难看出$S=\{x\in\mathbb{R}^2: x_2=0\}$是坐标轴$x_1$上的点组成的集合; 集合$S$中的每一个点都是集合$H=\{x\in\mathbb{R}^2: x_2\sin x_2>0, x_2\neq 0\}$的聚点; 对于任意$(a,0)\in S$
$$\lim_{\substack{x\to(a,0)\\ x\in H}}\frac{L_fV(x)}{|L_gV(x)|}=\lim_{\substack{x_1\to a\\ x_2\to 0}}\frac{x_2\sin x_2}{|x_2\sqrt{|x_2|}|}=0,$$
因此, nclf $V(x)$满足聚点条件, 由定理3得知nclf $V(x)$确定的Sontag控制律$\alpha_s(x)$是连续的. 经简单验证Sontag控制律
$$\alpha_s(x)=\begin{cases}\dfrac{x_2\sin x_2-\sqrt{(x_2\sin x_2)^2+x_2^6}}{-x_2\sqrt{|x_2|}}, & x_2\neq 0,\\ 0, & x_2=0\end{cases}$$
是连续的.

假定$x(t)=(x_1(t),x_2(t))^{\mathrm{T}}$是Sontag控制律$\alpha_s(x)$下系统(15)的轨迹, 并且$x(t)\in S$. 则有$x_2(t)\equiv 0$, 代入到式(15)中第2式, 有$x_1(t)\equiv 0$, 表明$S$中只有平凡解. 由定理4, 系统(15)在连续控制律$u=\alpha_s(x)$下是全局渐进稳定的.

5 结论(Conclusion)

本文研究了非线性仿射控制系统的C^0 镇定问题, 给出Sontag控制律连续的一个充分必要条件; 提出非严格控制Lyapunov函数概念, 从而扩大了在研究了非线性仿射控制系统的C^0 镇定问题时, 控制Lyapunov函数的寻找范围, 最后通过一个例子说明了这一点.

参考文献(References):

[1] MALISOFF M, SONTAG E D.Asymptotic controllability and input-to-state stabilization[J]. *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, 2004, 301(1): 155 – 172.

[2] ARTSTEIN Z. Stabilization with relaxed controls[J]. *Nonlinear Analysis*, 1983, 7(5): 1163 – 1173.

[3] SONTAG E D. A Lyapunov-like characterization of asymptotic controllability[J]. *SIAM J of Control and Optimization*, 1983, 21(3): 462 – 471.

[4] SONTAG E D.A ‘universal’ construction of Artstein's theorem on nonlinear stabilization[J]. *Systems & Control Letters*, 1989, 13(1): 117 – 123.

[5] KRSTIC M,HUA D. *Stabilization of Nonlinear Uncertain Systems*[M]. New York: Spring-Verlag, 1998: 2 – 15.

作者简介:

陈少白 (1957—), 男, 华南理工大学博士, 目前研究方向为人工智能、非线性控制系统, E-mail: chenshaobai71@163.com;

谭光兴 (1936—), 男, 博士, 目前研究方向为人工智能、非线性控制系统, E-mail: gxtancn@gmail.com;

毛宗源 (1967—), 男, 授, 博士生导师, 目前研究方向为现代控制理论及应用、电力电子技术, E-mail: auzymao@scut.edu.cn.