文章编号：1000−8152(2007)01−0059−05

# 通信带宽有限的重置控制系统

郭　戈

(大连海事大学 自动化学院, 辽宁 大连 116026)

**摘要**: 针对经由具有通信带宽限制的网络通道构成反馈的重置控制系统, 讨论了时变网络化控制系统的建模与镇定问题, 利用Lyapunov方法获得了这类系统的指数稳定性判据, 并将该结论推广到有界摄动条件下的鲁棒稳定性问题. 随后又利用Riccati矩阵微分方程方法, 得到了一种更加实用的指数稳定性条件, 并证明该结论对于渐进跟踪问题和扰动抑制问题仍然成立.

**关键词**: 重置控制; 网络化控制系统; 指数稳定性

**中图分类号**: TP273　　　**文献标识码**: A

# Reset-control systems with restricted communication bandwidth

GUO Ge

(School of Automation, Dalian Maritime University, Dalian Liaoning 116026, China)

**Abstract:** The modeling and stabilization of time-varying networked reset-control systems closed via a channel with restricted communication bandwidth are studied in this paper. Exponential stability criteria for such systems are obtained using Lyapunov method, which is further extended to the case of robust stability of such systems with bounded perturbation. Then a more easily testable exponential stability condition is derived based on Riccati matrix differential equation. This result is proved to be applicable to the asymptotic tracking and disturbance rejection problems of such systems.

**Key words:** reset-control; networked control systems; exponential stability

## 1　引言 (Introduction)

重置控制系统指的是当控制器输入为零时系统的状态或部分状态重置为零的线性系统, 这一点与切换控制、继电器控制以及滑模控制类似, 即都采用一个用来强制改变控制信号的切换平面. 重置控制的思想主要是为了克服由Bode增益-相角关系所确定的线性反馈控制系统的不足[1,2]. 为了使系统在低频和高频段满足Bode稳定性以及波形指标, 通常需要设计一个线性补偿器, 而重置控制器则是为了使系统进而满足超调要求.

有关重置单元和重置控制的研究开始于20世纪50年代. 1958年, Clegg提出了重置积分器的概念[3], (称作Clegg积分器,CI), 其描述函数类似于线性积分器的频率相应, 只是相角滞后比后者小得多. 大约20年后, Horowitz等[4]重新展开该问题的研究, 他们的主要贡献是将Clegg的CI概念推广到一阶重置单元(FORE), 并把它们引入控制系统设计之中. 具体来说, 他们主要研究如何设计重置控制器, 使系统实现用线性补偿器无法实现的性能指标, 特别是超调量指标, 并对重置控制器与线性补偿器之间的关系进行了研究. Bobrow等[5]研究了CI控制器作用下二阶系统的稳定性问题, 并得到了内部稳定的充分必要条件. 只是该结论并不是便于判断稳定性的一般结论. 近来, Beker等[6] 提出了一种易于理解的Lyapunov稳定性条件. 文献 [7,8]等研究了重置控制的实际应用问题.

有关网络环境下控制系统的建模、分析和控制的研究已成为热点研究问题之一. 网络化控制系统的主要难点之一是由网络引起的延迟, 如传感器-控制器延迟以及控制器–执行器延迟等, 它们使系统性能恶化甚至不稳定. 迄今为止, 该领域的研究主要集中于传统的线性控制系统[9~12]. 这些针对线性系统而得到的结果不一定适用于重置控制系统. 为此, 此前研究了定常网络化重置控制系统的稳定性问题[13], 得到了这种系统的指数稳定性条件. 本文旨在探讨网络化时变重置系统的稳定性.

本文主要内容安排如下. 第2部分给出了重置控制系统的基本概念、网络延迟对系统动态性能的影

收稿日期: 2005−02−04; 收修改稿日期: 2006−02−23.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(60504017); 新世纪优秀人才支持计划资助项目(NCET-04-0982).

响以及一些必要的假设. 第3部分分析了网络化时变重置控制系统的指数稳定性. 第4部分基于Riccati微分方程给出了一种更为实用的稳定性条件. 第5部分为本文的结论.

## 2 问题描述 (Problem description)

### 2.1 重置控制基础 (Basics of reset-control)

重置控制器可用如下形式的微分方程来描述:

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}_{\rm r}(t)=A_{\rm r}(t)\boldsymbol{x}_{\rm r}(t)+B_{\rm r}(t)\boldsymbol{e}_{\rm r}(t),\ \boldsymbol{e}_{\rm r}(t)\neq 0, \\ \boldsymbol{x}_{\rm r}(t_i^+)=A_{\rm rq}\boldsymbol{x}_{\rm r}(t_i),\ \boldsymbol{e}_{\rm r}(t_i)=0, \\ \boldsymbol{u}_{\rm r}(t)=C_{\rm r}(t)\boldsymbol{x}_{\rm r}(t)+D_{\rm r}(t)\boldsymbol{e}_{\rm r}(t). \end{cases} \tag{1}$$

其中: 状态$\boldsymbol{x}_{\rm r}(t)$为$n_{\rm r}$维, $\boldsymbol{u}_{\rm r}(t)$和$\boldsymbol{e}_{\rm r}(t)$的维数分别为$p$和$q$, $A_{\rm r}(t)$, $B_{\rm r}(t)$, $C_{\rm r}(t)$及$D_{\rm r}(t)$为相应维的矩阵函数, $t_i\in\mathbb{R}^+$为重置时间, 与初始条件和外部输入信号有关. 重置区间定义为:

$$\hat{t}_1=t_1,\ \hat{t}_{i+1}=t_{i+1}-t_i.$$

$A_{\rm rq}$为常数矩阵, 它决定着待重置的状态. 不失一般性, 本文假设该矩阵为分块对角形式

$$A_{\rm rq}=\begin{bmatrix} I_{r_1} & 0 \\ 0 & 0_{r_2} \end{bmatrix},\ r_1+r_2=n_{\rm r}.$$

即有$r_2$个状态分量被重置.

假设线性时变连续系统为

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}_{\rm p}(t)=A_{\rm p}(t)\boldsymbol{x}_{\rm p}(t)+B_{\rm p}(t)\boldsymbol{u}_{\rm p}(t), \\ \boldsymbol{y}_{\rm p}(t)=C_{\rm p}(t)\boldsymbol{x}_{\rm p}(t). \end{cases} \tag{2}$$

其中: $\boldsymbol{y}_{\rm p}(t)$为$q$维输出向量, $\boldsymbol{x}_{\rm p}(t)$为$n_{\rm p}$维状态向量, $\boldsymbol{u}_{\rm p}(t)$为$p$维控制向量, $A_{\rm p}(t)$, $B_{\rm p}(t)$和$C_{\rm p}(t)$为适当维数的矩阵函数, $t$为连续时间变量. 则闭环重置控制系统可写为

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}_{\rm r}(t)=A_{\rm cl}(t)\boldsymbol{x}(t)+B_{\rm cl}(t)\boldsymbol{r}(t),\ \boldsymbol{x}(t)\notin M(t), \\ \boldsymbol{x}(t^+)=A_{\rm q}\boldsymbol{x}(t),\ \boldsymbol{x}(t)\in M(t), \\ \boldsymbol{y}(t)=C_{\rm cl}(t)\boldsymbol{x}(t). \end{cases} \tag{3}$$

其中$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_{\rm p}^{\rm T} & \boldsymbol{x}_{\rm r}^{\rm T}\end{bmatrix}^{\rm T}$, $\boldsymbol{r}(t)$表示闭环系统的参考输入, 该系统中的矩阵分别如下:

$$A_{\rm cl}(t)=\begin{bmatrix} A_{\rm p}(t) & B_{\rm p}(t)C_{\rm r}(t) \\ -B_{\rm r}(t)C_{\rm p}(t) & A_{\rm r}(t) \end{bmatrix}, A_{\rm q}=\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & A_{\rm rq} \end{bmatrix},$$

$$B_{\rm cl}(t)=\begin{bmatrix} 0 \\ B_{\rm r}(t) \end{bmatrix},\ C_{\rm cl}(t)=\begin{bmatrix} C_{\rm p}(t) & 0 \end{bmatrix}.$$

重置面$M(t)$为所有可引起状态重置的状态集合, 定义为

$$M(t)=\{\beta\in\mathbb{R}^n: e(t)=0, (I-A_{\rm q})\beta\neq 0\}, \tag{4}$$

其中$n=n_{\rm p}+n_{\rm r}$.

### 2.2 网络延时的影响 (Influence of delays)

首先假设:

a) 网络延时在一个采样周期之内, 不考虑空采样和信息拒收等情况;

b) 传感器为时间驱动, 控制器和执行器为事件驱动;

c) 控制器对所有传感器的缓存长度均为单位长度, 即控制器采用最新的传感器信息, 不发送过时的执行指令.

于是控制器和被控对象的输入经过通讯延迟后可写为:

$$\boldsymbol{e}_{\rm r}(t)=\boldsymbol{r}(t)-\boldsymbol{y}_{\rm p}(t-\tau_{\rm sc})-\boldsymbol{v}_{\rm s}(t-\tau_{\rm sc}), \tag{5}$$

$$\boldsymbol{u}_{\rm p}(t)=\boldsymbol{u}_{\rm r}(t-\tau_{\rm ca})+\boldsymbol{v}_{\rm a}(t). \tag{6}$$

其中$\tau_{\rm sc}$和$\tau_{\rm ca}$分别为传感器-控制器延时和控制器–执行器延时, $\boldsymbol{v}_{\rm s}(t)$和$\boldsymbol{v}_{\rm a}(t)$ 分别为传感器噪声和执行器噪声, $\boldsymbol{r}(t)$为参考输入. 于是控制器可写为

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}_{\rm r}(t)=A_{\rm r}(t)\boldsymbol{x}_{\rm r}(t)-B_{\rm r}(t)C_{\rm p}(t)\boldsymbol{x}_{\rm p}(t-\tau_{\rm sc})+ \\ \qquad B_{\rm r}(t)(r(t)-\boldsymbol{v}_{\rm s}(t-\tau_{\rm sc})),\ \boldsymbol{e}(t)\neq 0, \\ \boldsymbol{x}_{\rm r}(t^+)=A_{\rm rq}\boldsymbol{x}_{\rm r}(t),\ \boldsymbol{e}(t)=0, \\ \boldsymbol{u}_{\rm r}(t)=C_{\rm r}(t)\boldsymbol{x}_{\rm r}(t-\tau_{\rm c})+D_{\rm r}(t)\boldsymbol{e}_{\rm r}(t-\tau_{\rm c}). \end{cases} \tag{7}$$

其中$\tau_{\rm c}$为控制器的计算时间. 被控对象的状态空间方程也同样可以写为

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{x}}_{\rm p}(t)=\ & A_{\rm p}(t)\boldsymbol{x}_{\rm p}(t)+B_{\rm p}(t)C_{\rm r}(t)\boldsymbol{x}_{\rm r}(t-\tau_{\rm c}-\tau_{\rm ca})- \\ & B_{\rm p}(t)D_{\rm r}(t)C_{\rm p}(t)\boldsymbol{x}_{\rm p}(t-\tau_{\rm sc}-\tau_{\rm ca}-\tau_{\rm c})+ \\ & B_{\rm p}(t)D_{\rm r}(t)(\boldsymbol{r}(t-\tau_{\rm ca}-\tau_{\rm c})-\boldsymbol{v}_{\rm s}(t-\tau_{\rm sc}- \\ & \tau_{\rm ca}-\tau_{\rm c}))+B_{\rm p}(t)\boldsymbol{v}_{\rm a}(t). \end{aligned} \tag{8}$$

因此闭环系统为

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t)=A_0(t)\boldsymbol{x}(t)+\sum\limits_{i=1}^{3}A_i(t)\boldsymbol{x}(t-\tau_i)+ \\ \qquad \sum\limits_{j=1}^{2}B_j(t)\boldsymbol{v}(t-\varsigma_j),\ \boldsymbol{x}(t)\notin M(t), \\ \boldsymbol{x}(t^+)=A_{\rm q}\boldsymbol{x}(t),\ \boldsymbol{x}(t)\in M(t), \\ \boldsymbol{y}(t)=C(t)\boldsymbol{x}(t). \end{cases} \tag{9}$$

其中: $\varsigma_1=0, \varsigma_2=\tau_{\rm c}+\tau_{\rm ca}, \tau_1=\tau_{\rm sc}, \tau_2=\tau_{\rm c}+\tau_{\rm ca}$, $\tau_3=\tau_{\rm c}+\tau_{\rm ca}+\tau_{\rm sc}$,

以及

$$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_{\rm p} \\ \boldsymbol{x}_{\rm r} \end{bmatrix},\ \boldsymbol{v}(t)=\begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_{\rm a}(t) \\ \boldsymbol{r}(t)-\boldsymbol{v}_{\rm s}(t-\tau_{\rm sc}) \end{bmatrix},$$

$$A_0(t)=\begin{bmatrix} A_{\rm p}(t) & 0 \\ 0 & A_{\rm r}(t) \end{bmatrix},\ A_2(t)=\begin{bmatrix} 0 & B_{\rm p}(t)C_{\rm r}(t) \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_1(t)=\begin{bmatrix}0 & 0\\ -B_{\mathrm{r}}(t)C_{\mathrm{p}}(t) & 0\end{bmatrix},$$

$$A_3(t)=\begin{bmatrix}-B_{\mathrm{p}}(t)D_{\mathrm{r}}(t)C_{\mathrm{p}}(t) & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix},$$

$$A_{\mathrm{q}}=\begin{bmatrix}I & 0\\ 0 & A_{\mathrm{rq}}\end{bmatrix},\ B_1(t)=\begin{bmatrix}B_{\mathrm{p}}(t) & 0\\ 0 & B_{\mathrm{r}}(t)\end{bmatrix},$$

$$B_2(t)=\begin{bmatrix}0 & B_{\mathrm{p}}(t)D_{\mathrm{r}}(t)\\ 0 & 0\end{bmatrix},\ C(t)=\begin{bmatrix}C_{\mathrm{p}}(t) & 0\end{bmatrix}.$$

为简便起见, 将重置矩阵$A_{\mathrm{q}}$写为

$$A_{\mathrm{q}}=\begin{bmatrix}I_{n_1} & 0\\ 0 & 0_{n_2}\end{bmatrix},\ n_1+n_2=n.$$

重置时间集合可定义为如下有序集

$$T_{\mathrm{sw}}\equiv\{t_i\in\mathbb{R}^+ : t_i<t_{i+1}; x(t_i)\in M(t_i), i\in Z\}. \tag{10}$$

显然, 网络化重置控制系统类似于一般的多状态时滞系统, 所不同的只是存在重置单元, 从而使传统的多状态时滞系统稳定性条件不成立.

## 3 Lyapunov判据 (Lyapunov criteria)

首先考虑具有定常参考输入和无噪声传感器与执行器的网络化重置控制系统, 即$v_{\mathrm{a}}=0$, $v_{\mathrm{s}}=0$, $r=0$. 于是系统(9)变为

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}(t)=A_0(t)\boldsymbol{x}(t)+\sum\limits_{i=1}^{m}A_i(t)\boldsymbol{x}(t-\tau_i),\\ \qquad \boldsymbol{x}(t)\notin M(t),\\ \boldsymbol{x}(t^+)=A_{\mathrm{q}}\boldsymbol{x}(t),\ \boldsymbol{x}(t)\in M(t).\end{cases} \tag{11}$$

其中$A_j(t)(j=0,1,2,\cdots,m)$为分段连续矩阵函数. 对于$\theta\in[-\tau,0]$, 假设初始条件为$\boldsymbol{x}(\theta)=\boldsymbol{x}_0(\theta)$, 其中$\tau$为$\bar{\tau}_i$的上届, 这里$\bar{\tau}_i=\sup\tau_i$.

**定义 1** (指数稳定性)　如果存在$\sigma>0$和$\gamma\geqslant 1$, 使得系统(11)在初始条件$\boldsymbol{x}_0(\theta)$ 下的每一个解$\boldsymbol{x}(t,x_0)$都满足

$$\|\boldsymbol{x}(t,x_0)\|\leqslant\gamma\|\boldsymbol{x}_0\|_\tau \mathrm{e}^{-\sigma t},\forall t\geqslant 0.$$

其中$\|\boldsymbol{x}_0\|_\tau=\max\limits_{\theta\in[-\tau,0]}\|\boldsymbol{x}_0(\theta)\|$, 则称该系统指数稳定, 或$\sigma$-稳定.

**定义 2**　如果$n\times n$矩阵函数$\varGamma(t)$满足

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varGamma(t)=A_0(t)\varGamma(t)+\sum_{i=1}^{m}A_i(t)\varGamma(t-\tau_i),$$
$$0\leqslant t\notin T_{\mathrm{sw}},$$
$$\varGamma(t^+)=A_{\mathrm{q}}\varGamma(t),\ 0\leqslant t\in T_{\mathrm{sw}}.$$

其中$\varGamma(0)=I$, $\varGamma(t)=0(t<0)$, 则称其为系统(11)的基本解阵.

**引理 1**[14]　基本解阵同时满足

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varGamma(t)=\varGamma(t)A_0(t)+\sum_{i=1}^{m}\varGamma(t-\tau_i)A_i(t),$$
$$0\leqslant t\notin T_{\mathrm{sw}},$$
$$\varGamma(t^+)=\varGamma(t)A_{\mathrm{q}},\ 0\leqslant t\in T_{\mathrm{sw}}.$$

**引理 2**[14]　如果$\varGamma(t)$ 为系统(11)的基本解阵, 则对任意$t\geqslant 0$,

$$\boldsymbol{x}(t,x_0)=\varGamma(t)\boldsymbol{x}_0(t)+\sum_{i=1}^{m}\int_{-\tau_i}^{0}\varGamma(t-\tau_i-\theta)A_i(t)\boldsymbol{x}_0(\theta)\mathrm{d}\theta.$$

对于自治重置系统, Beker等[6]提出了如下稳定性条件:

**引理 3**　具有多延时的重置控制系统指数稳定的充分条件是存在连续可微函数$V(x):\mathbb{R}^n\rightarrow\mathbb{R}$, 满足

1) $V(\boldsymbol{x})>0$, $\boldsymbol{x}\neq 0$;

2) $\dot{V}(\boldsymbol{x})\ |_t<0$, 任何$\boldsymbol{x}\neq 0$;

3) $\Delta V(\boldsymbol{x})=V(A_{\mathrm{q}}\boldsymbol{x})-V(\boldsymbol{x})\leqslant 0$, 任何$\boldsymbol{x}(t)\in M(t)$.

下面给出本节的结论. 其证明与定常情形类似, 这里不再赘述.

**定理 1**　如果引理1和引理2的条件成立, 则对于任何延时$0\leqslant\tau_i\leqslant\bar{\tau}_i(i=1,2,\cdots,m)$, 网络化时变重置系统(11)指数稳定。

**注 1**　考虑到重置控制系统的分段连续性, 定理1中的条件应当适当减弱, 即只在一个较小的集合$\boldsymbol{x}\notin M(\boldsymbol{x})$上保证$\dot{V}(\boldsymbol{x})<0$成立.

**注 2**　定理1暗含了重置时间的聚积. 指数稳定意味着当$t_f$足够大时$\lim\limits_{t\rightarrow t_f}\boldsymbol{x}(t)=0$, 因此重置时间在$t_f$处形成聚积.

如果系统中存在摄动, 即系统由如下方程描述

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}(t)=(A_0(t)+\varDelta_0)\boldsymbol{x}(t)+\\ \qquad\sum\limits_{i=1}^{m}(A_i(t)+\varDelta_i)\boldsymbol{x}(t-\tau_i),\ \boldsymbol{x}\notin M,\\ \boldsymbol{x}(t^+)=A_{\mathrm{q}}\boldsymbol{x}(t),\ \boldsymbol{x}(t)\in M(t).\end{cases} \tag{12}$$

其中$\varDelta_i^{\mathrm{T}}H_i\varDelta_i\leqslant\rho_i I, i=1,2,\cdots,m,\rho_i>0$, 则有如下结论:

**定理 2**　如果原系统(11)指数稳定, 且存在正定矩阵$W_i$和$R_i$以及正常数$\mu$, 使得下述关系成立:

1) $W_0>\mu\sum\limits_{i=0}^{m}U(0)H_i^{-1}U(0)+\rho_0\mu^{-1}(1+\sum\limits_{i=1}^{m}\tau_i)I$,

2) $R_i(t)>\mu A_i^{\mathrm{T}}(t)U(\tau_i+\theta)(\sum\limits_{i=0}^{m}H_i^{-1})U^{\mathrm{T}}(\tau_i+\theta)\cdot A_i(t),\theta\in[-\tau,0],\ i=1,2,\cdots,m$,

3) $W_i>\rho_i(1+\sum\limits_{i=0}^{m}\tau_i)I,\ i=1,2,\cdots,m$.

则摄动网络化重置控制系统(23)指数稳定.

**证** 由不等式

$$2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \leqslant \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}H\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}H^{-1}\boldsymbol{y}.$$

其中$H$为任意正定矩阵, 易得

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}V(\boldsymbol{x}(t+\cdot)) \leqslant -\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)[W_0 - \frac{\rho_0}{\mu}(1+\sum_{i=1}^{m}\tau_i)I-\\&\mu U(0)(\sum_{i=0}^{m}H_i^{-1})U(0)]\boldsymbol{x}(t)-\\&\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=0}^{m}\int_{-\tau_j}^{0}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t+\theta)[R_j(t)-\mu A_j^{\mathrm{T}}(t)U(\tau_j+\\&\theta)H_i^{-1}U^{\mathrm{T}}(\tau_j+\theta)A_j(t)]\boldsymbol{x}(t+\theta)\mathrm{d}\theta-\\&\sum_{i=1}^{m}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-\tau_i)[W_i - \frac{\rho_i}{\mu}(1+\sum_{j=1}^{m}\tau_j)I]\boldsymbol{x}(t-\tau_i).\end{aligned}$$

这里$H=(1/v)H_i,\ i=1,2,\cdots,m$. 如果定理2的所有条件成立, 则有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}V(\boldsymbol{x}(t+\cdot)) < 0. \tag{13}$$

同时

$$\begin{aligned}&\Delta V(\boldsymbol{x}) = V(\boldsymbol{x}(t^+)) - V(\boldsymbol{x}(t)) =\\&V(A_{\mathrm{q}}\boldsymbol{x}(t)) - V(\boldsymbol{x}(t)) \leqslant 0,\ \boldsymbol{x}(t)\in M(t).\end{aligned} \tag{14}$$

因此由引理3可直接导出定理2.

## 4 Riccati判据 (Riccati criteria)

前一节所给出的指数稳定性条件完全取决于系统的基本解阵, 虽然便于理解, 但难以用于实际判断. 本节基于Riccati微分方程, 针对网络化重置控制系统(11)给出一种更实用的稳定性条件. 为此, 令

$$\begin{aligned}&\hat{A}_0(t) = A_0(t) + \sigma I,\\&\hat{A}_i(t) = \mathrm{e}^{\sigma\tau_i}A_i(t),\ i=1,2,\cdots,m.\end{aligned}$$

**引理 4** 假设$S\in\mathbb{R}^{n\times n}$为对称正定矩阵, $R,Q\in\mathbb{R}^{n\times n}$为实数矩阵, 则对于$\forall u,v\in\mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}R^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v} + 2\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}Q^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}S^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u} \leqslant\\&\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}(R+QS^{-1}Q^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}.\end{aligned}$$

下面给出本节的主要结论.

**定理 3** 如果存在半正定对称矩阵$P(t)$满足下述Riccati矩阵微分方程

$$\begin{aligned}&\dot{P}(t) + 2[P(t)+I]\hat{A}_0(t)+\\&\sum_{i=1}^{m}[P(t)+I]\hat{A}_i(t)\hat{A}_i^{\mathrm{T}}(t)[P(t)+I] + mI = 0.\end{aligned} \tag{15}$$

则称网络化重置控制系统(11)指数稳定.

**证** 定义变量

$$\boldsymbol{z}(t) = \mathrm{e}^{\sigma t}\boldsymbol{x}(t).$$

则网络化重置控制系统(11)可写为

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{z}}(t) = \hat{A}_0(t)\boldsymbol{z}(t) + \sum_{i=1}^{m}\hat{A}_i(t)\boldsymbol{z}(t-\tau_i),\ \boldsymbol{z}(t)\notin \bar{M}(t),\\ \boldsymbol{z}(t^+) = A_{\mathrm{q}}\boldsymbol{z}(t),\ \boldsymbol{z}(t)\in\bar{M}(t).\end{cases} \tag{16}$$

其中$\bar{M}(t)$为变换后的重置区间. 设对称矩阵$P(t)\geqslant 0$满足上述Riccati矩阵微分方程, 考虑如下类Lyapunov函数

$$\begin{aligned}&V(t,\boldsymbol{z}(t)) =\\&\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}(t)[P(t)+I]\boldsymbol{z}(t) + \sum_{i=1}^{m}\int_{t-\tau_i}^{t}\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{z}(s)\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

当$\boldsymbol{z}(t)\notin\bar{M}(t)$时, 可以得到下述关系

$$\begin{aligned}&\dot{V}(t,\boldsymbol{z}(t))\,|_t =\\&\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}(t)\dot{P}(t)\boldsymbol{z}(t) + 2\dot{\boldsymbol{z}}^{\mathrm{T}}(t)P^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{z}(t)+\\&2\dot{\boldsymbol{z}}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{z}(t) + m\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{z}(t) - \sum_{i=1}^{m}\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}(t-\tau_i)\boldsymbol{z}(t-\tau_i) =\\&\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}(t)\dot{P}(t)\boldsymbol{z}(t) + 2\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}(t)\hat{A}_0^{\mathrm{T}}P^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{z}(t)+\\&2\sum_{i=1}^{m}\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}(t-\tau_i)\hat{A}_i^{\mathrm{T}}P^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{z}(t) + 2\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}(t)\hat{A}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{z}(t)+\\&2\sum_{i=1}^{m}\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}(t-\tau_i)\hat{A}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{z}(t) + m\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{z}(t)-\\&\sum_{i=1}^{m}\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}(t-\tau_i)\boldsymbol{z}(t-\tau_i).\end{aligned}$$

由于$P^{\mathrm{T}}(t) = P(t)$, 因此

$$\begin{aligned}&\dot{V}(t,\boldsymbol{z}(t))\,|_t =\\&\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}(t)\dot{P}(t)\boldsymbol{z}(t) + 2\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}(t)[(P(t)+I)\hat{A}_0]^{\mathrm{T}}\boldsymbol{z}(t)+\\&2\sum_{i=1}^{m}\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}(t-\tau_i)[(P(t)+I)\hat{A}_i]^{\mathrm{T}}\boldsymbol{z}(t)+\\&m\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{z}(t) - \sum_{i=1}^{m}\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}(t-\tau_i)\boldsymbol{z}(t-\tau_i) =\\&-\sum_{i=1}^{m}\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}(t)[(P(t)+I)]\hat{A}_i\hat{A}_i^{\mathrm{T}}[(P(t)+I)]\boldsymbol{z}(t)+\\&2\sum_{i=1}^{m}\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}(t-\tau_i)[(P(t)+I)\hat{A}_i]^{\mathrm{T}}\boldsymbol{z}(t)-\\&\sum_{i=1}^{m}\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}(t-\tau_i)\boldsymbol{z}(t-\tau_i).\end{aligned}$$

于是由引理4可得

$$\begin{aligned}&\dot{V}(t,\boldsymbol{z}(t))\,|_t \leqslant\\&\sum_{i=1}^{m}\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}(t)[(P(t)+I)\hat{A}_i\hat{A}_i^{\mathrm{T}}(P(t)+I)-\\&(P(t)+I)\hat{A}_i\hat{A}_i^{\mathrm{T}}(P(t)+I)]^{\mathrm{T}}\boldsymbol{z}(t) = 0.\end{aligned}$$

同时, 对于$z(t)\in\bar{M}(t)$很容易得到

$$\Delta V(t,\boldsymbol{z}(t)) = V(\boldsymbol{z}(t^+)) - V(\boldsymbol{z}(t)) =$$

$$\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}(t)\{A_{\mathrm{q}}^{\mathrm{T}}[P(t)+I]A_{\mathrm{q}}-[P(t)+I]\}\boldsymbol{z}(t)+\sum_{i=1}^{m}\int_{t-\tau_i}^{t}\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}(s)\{A_{\mathrm{q}}^{\mathrm{T}}A_{\mathrm{q}}-I\}\boldsymbol{z}(s)\mathrm{d}s\leqslant 0. \tag{17}$$

因此定理3成立.

**例**　考虑网络化重置控制系统

$$\dot{\boldsymbol{x}}=A_0(t)\boldsymbol{x}+A_1(t)\boldsymbol{x}(t-\tau_1)+A_2(t)\boldsymbol{x}(t-\tau_2).$$

其中:

$$A_0(t)=\begin{bmatrix}\dfrac{3.5\mathrm{e}^{-9t}-2.5}{1+\mathrm{e}^{-9t}} & 0\\ 0 & -7.5\end{bmatrix},$$

$$A_1(t)=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{\sqrt{2\mathrm{e}}(1+\mathrm{e}^{-9t})} & 0\\ 0 & \sqrt{3/\mathrm{e}}\end{bmatrix},$$

$$A_2(t)=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{\sqrt{2\mathrm{e}}(1+\mathrm{e}^{-9t})} & 0\\ 0 & \dfrac{\sqrt{3}}{\mathrm{e}}\end{bmatrix}.$$

网络延时取为$\tau_1=0.5$, $\tau_2=1$, $m=2$. 令$z(t)=\mathrm{e}^{\sigma t}x(t)$, $\sigma=1$. 定理3的Riccati方程存在正定对称解矩阵$P(t)=\begin{bmatrix}\mathrm{e}^{-9t} & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$, 因此该网络化系统指数稳定.

**注 3**　对于参考输入$r$ 时变的情况, 需要考虑渐进跟踪问题. 为此, 假设参考输入可描述为

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{z}}(t)=A_0(t)\boldsymbol{z}(t)+\sum\limits_{i=1}^{m}A_i(t)\boldsymbol{z}(t-\tau_i),\\ \boldsymbol{r}(t)=C_{\mathrm{q}}(t)\boldsymbol{x}(t).\end{cases}$$

即描述为网络化重置控制系统的一个内模. 为简单起见, 可进而假设$d=0$, $v_{\mathrm{a}}=0$, $v_{\mathrm{s}}=0$. 定义新状态$\bar{\omega}=x-z$, 则有

$$\dot{\bar{\omega}}=A_0(t)\bar{\omega}+\sum_{i=1}^{m}A_1(t)\bar{\omega}(t-\tau_i),\ \bar{\omega}\notin M(t),$$

$$\bar{\omega}(t^{+})=A_{\mathrm{q}}\bar{\omega}(t),\ \bar{\omega}\in M(t).$$

可见, 渐进跟踪问题可表示为渐进稳定问题. 所以, 如果定理3的条件成立, 则网络化重置控制系统可以渐进跟踪由系统内模所产生的任何参考输入信号.

## 5　结论 (Conclusions)

本文分析了网络延时对重置控制系统动态特性和稳定性的影响, 在考虑传感器–控制器延时和控制器–执行器延时的情况下, 得到了可用于系统分析和设计的网络化时变重置控制系统的指数稳定性和鲁棒稳定性条件, 并进而得到了一种实用的指数稳定性条件, 该条件同时也为网络化时变重置控制系统的渐进跟踪和扰动抑制问题的解决提供了基础.

## 参考文献(References):


[1] BEKER O, HOLLOT C V, CHAIT Y. Plant with integrator: An example of reset control overcoming limitations of linear feedback[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2001, 46(11): 1797 – 1799.

[2] CHEN Q, CHAIT Y, HOLLOT C V. Analysis of reset control systems consisting of a FORE and second-order loop[J]. *J of Dynamic Systems, Measurements, and Control*, 2001, 123(2): 279 – 283.

[3] CLEGG J C. A nonlinear integrator for servomechanisms[J]. *Trans A IEE*, 1958, 77(Part II): 41 – 42.

[4] HOROWITZ I, ROSENBAUM P. Non-linear design for cost of feedback reduction in systems with large parameter uncertainty[J]. *Int J Control*, 1975, 24(6): 977 – 1001.

[5] BOBROW J E, THAI K. An active truss element and control law for vibration suppression[J]. *Smart Materials Structures*, 1995, 4(4): 264 – 269.

[6] BEKER O, HOLLOT C V, CHAIT Y. Fundamental properties of reset control systems[J]. *Automatica*, 2004, 40(6): 905 – 915.

[7] BUPP R T, BERNSTEIN D S, CHELLABOINA V S. Resetting virtual absorbers for vibration control[J]. *J of Vibration and Control*, 2000, 6(1): 61 – 83.

[8] ZHENG Y, CHAIT Y, HOLLOT C V. Experimental demonstration of reset control design[J]. *Control Engineering Practice*, 2000, 8(2): 113 – 120.

[9] CHAN H, OZGUNER U. Closed-loop control of systems over a communications network with queues[J]. *Int J Control*, 1995, 62(3): 493 – 510.

[10] HALEVI Y, RAY A. Integrated communication and control systems: Part I-analysis[J]. *J of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 1998, 110(5): 367 – 373.

[11] HONG S H. Scheduling algorithm of data sampling times in the integrated communication and control systems[J]. *IEEE Trans on Control Systems Technology*, 1995, 3(2): 225 – 230.

[12] KRTOLICA R, OZGUNER U, CHAN H. Stability of linear feedback systems with random communication delays[J]. *Int J Control*, 1994, 59(8): 925 – 953.

[13] GUO G. Some properties of networked reset control systems[J]. *IEE Proc: Control Theory and Applications*, 2006, 153(1):14 – 20.

[14] BELLMAN R E, COOKE K L. *Differential-Difference Equations*[M]. New York: Academic Press, 1963: 41 – 96.


作者简介:


**郭　戈**　(1972—), 男, 1994年毕业于东北大学, 1998在东北大学获博士学位, 现为大连海事大学教授, 博士生导师, 主要研究方向工业过程建模与控制、网络控制系统理论等, E-mail: geguo@yeah.net.