文章编号：1000−8152(2007)01−0113−04

一类Takagi-Sugeno模糊离散广义系统的稳定性判据

朱宝彦[1,2], 张庆灵[1], 佟绍成[3]

(1. 东北大学 系统科学研究所 东北大学教育部暨辽宁省流程工业综合自动化重点实验室, 辽宁 沈阳 110004;

2. 沈阳建筑大学 理学院, 辽宁 沈阳 110168; 3. 辽宁工学院 数理系, 辽宁 锦州 121001)

摘要: 利用Lyapunov方法, 研究了一类Takagi-Sugeno(T-S)模糊离散广义系统的稳定性问题. 给出了该系统一致正则、因果和稳定的充分条件, 并把此条件用线性矩阵不等式(LMI)表示. 通过矩阵分解把广义系统的非严格矩阵不等式约束转化成严格的矩阵不等式约束, 从而可以用LMI工具箱一次判定系统的稳定性, 算例说明所给方法使用方便.

关键词: T-S模糊系统; 离散广义系统; 稳定; 线性矩阵不等式

中图分类号: TP13　　**文献标识码**: A

Stability criteria for a class of Takagi-Sugeno fuzzy discrete descriptor system

ZHU Bao-yan[1,2], ZHANG Qing-ling[1], TONG Shao-cheng[3]

(1. Insitute of Systems Science, Northeastern University, Key Laboratory of Process Industry Automation of MOE & Liaoning Province, Northeastern University, Shenyang Liaoning 110004, China;
2. College of Sciences, Shenyang Jianzhu University, Shenyang Liaoning 110168, China;
3. Department of Mathematics and Physics, Liaoning Institute of Technology, Jinzhou Liaoning 121001, China)

Abstract: The stability problem was studied for a class of Takagi-Sugeno(T-S) fuzzy discrete descriptor system by using Lyapunov's method. The sufficient conditions to test the consistency regularity and causality and stability are given for the system. The conditions are expressed as linear matrix inequality(LMI). The nonstrict LMI restricted conditions are transformed into the strict ones by means of the matrix decomposition. Verification of the stability for the system can be done only once by using LMI Toolbox. A numerical example demonstrates the simplicity of the proposed method.

Key words: T-S fuzzy systems; discrete descriptor systems; stability; linear matrix inequality(LMI)

1 引言(Introduction)

众所周知, T-S模糊系统是研究非线性系统的有效工具. 模糊控制技术已经广泛用于非线性系统的控制中[1]. 1999年, Taniguchi T 等人首次利用Takagi-Sugeno(T-S)模糊广义系统模型描述非线性广义系统[2,3]. 但由于这类系统结构相对复杂, 有关研究成果尚在起步阶段. 已有广义系统的结论[4~9], 有时在模糊广义系统中不成立, 许多结果还需要做进一步的研究. 本文研究了一类T-S模糊离散广义系统的稳定性问题. 利用Lyapunov方法, 给出了该系统一致正则、因果和稳定的充分条件, 并把此条件用线性矩阵不等式(LMI)来表示. 通过矩阵分解把广义系统的非严格矩阵不等式约束转化成严格的矩阵不等式约束, 从而可以用LMI工具箱一次判定系统的稳定性, 算例说明所给方法使用方便.

2 系统描述及预备知识 (System formulation and preliminaries)

考虑T-S模糊离散广义系统模型, 其第i条模糊规则具有如下形式

$$R_i:\text{if } \xi_1 \text{ is } M_{1i} \text{ and } \xi_2 \text{ is } M_{2i} \cdots \text{and } \xi_p \text{ is } M_{pi},$$
$$\text{then } E\boldsymbol{x}(k+1)=A_i\boldsymbol{x}(k),\ i=1,2,\cdots,r, \tag{1}$$

其中: $M_{ji}(j=1,2,\cdots,p)$是模糊集, r是模糊规则数, $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$是状态向量, E和A_i是适当维数的实常数矩阵; E通常奇异, 即rank $E=n_1<n$. 假定前件变量$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_p$ 是状态变量的函数, 记$\boldsymbol{\xi}=[\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_p]^{\mathrm{T}}$. 则由单点模糊化, 乘积推理及加权平均解模糊化的推理方法可得系统的全局模型

收稿日期: 2005−05−19; 收修改稿日期: 2006−02−23.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(60574011); 937计划课题资助项目(2002CB312200-04); 辽宁省普通高校学科带头人基金资助项目(124210); 智能控制理论及应用辽宁省高校重点实验室基金资助项目(200521308).

为:

$$Ex(k+1)=\sum_{i=1}^{r}h_i(\xi)A_ix(k), \tag{2}$$

$$\beta_i(\xi)=\prod_{j=1}^{p}M_{ji}(\xi_j)\geqslant 0,$$

$$h_i(\xi)=\frac{\beta_i(\xi)}{\sum\limits_{i=1}^{r}\beta_i(\xi)}\geqslant 0, \sum_{i=1}^{r}h_i(\xi)=1,$$

其中$h_i(\xi)$是规范化隶属函数.

引理 1[5] 矩阵X的测度$\mu(X)$有下面性质成立:

$$\mathrm{Re}\ \mu(X)\leqslant\mu(X)=\frac{1}{2}\lambda_{\max}(X+X^{\mathrm{T}}),$$

其中$\lambda_{\max}(\cdot)$ 表示矩阵$(\cdot)$ 的最大特征值.

3 稳定判据 (Stability criteria)

本节考虑系统(2)并做如下定义:

定义 1 系统(2)是一致正则的, 如果对$\forall k\geqslant 0$行列式$\det(zE-\sum\limits_{i=1}^{r}h_i(\xi)A_i)$ 不恒为零; 系统(2)是因果的, 如果它一致正则并且

$$\deg_z\det(zE-\sum_{i=1}^{r}h_i(\xi)A_i)=\mathrm{rank}\,E,\ \forall k\geqslant 0$$

成立; 系统(2)是稳定的, 如果它是一致正则并且$\sigma(E,\sum\limits_{i=1}^{r}h_i(\xi)A_i)\subset D(0,1),\ \forall k\geqslant 0$, 其中$D(0,1)$表示单位圆的开区域

$$\sigma(E,\sum_{i=1}^{r}h_i(\xi)A_i)=$$
$$\{z|\det(zE-\sum_{i=1}^{r}h_i(\xi)A_i)=0\}.$$

例 1 考虑T-S模糊离散广义系统

$$Ex(k+1)=\sum_{i=1}^{2}h_i(\xi)A_ix(k), \tag{3}$$

其中:

$$E=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}, A_1=\begin{bmatrix}0.2&1\\0&0.3\end{bmatrix}, A_2=\begin{bmatrix}-0.2&4\\0&0.3\end{bmatrix},$$

规范化隶属函数为:

$$h_1(\xi)=\frac{x_1^2(k)}{2},$$
$$h_2(\xi)=1-\frac{x_1^2(k)}{2},$$
$$x(k)=[x_1(k),x_2(k)]^{\mathrm{T}}.$$

由于

$$\det[zE-(h_1(\xi)A_1+h_2(\xi)A_2)]=$$
$$-0.3(z-0.2x_1^2(k)+0.2), \tag{4}$$

所以, 对于$\forall k\geqslant 0$, 式(4)不恒为零, 因此, 系统(3)是一致正则的; 而且由式(4)得到

$$\deg_z\det[zE-(h_1(\xi)A_1+h_2(\xi)A_2)]=1=\mathrm{rank}\,E,$$
$$\forall k\geqslant 0,$$

从而, 系统(3)是因果的; 令

$$\det[zE-(h_1(\xi)A_1+h_2(\xi)A_2)]=$$
$$-0.3(z-0.2x_1^2(k)+0.2)=0, \tag{5}$$

得方程(5)的根$z=0.2x_1^2(k)-0.2$, 按隶属函数要求, $0<x_1^2(k)<2,\ \forall k\geqslant 0$, 知$z\in D(0,1),\ \forall k\geqslant 0$, 即$\sigma(E,h_1(\xi)A_1+h_2(\xi)A_2)\subset D(0,1),\ \forall k\geqslant 0$, 所以系统(3)是稳定的.

定义 2 一致正则的系统(2)的有穷特征值, 即集合$\sigma(E,\sum\limits_{i=1}^{r}h_i(\xi)A_i)$中的元素称为有穷模, 共有$\deg_z\det(zE-\sum\limits_{i=1}^{r}h_i(\xi)A_i)$个; 动态模有rank E个, 在动态模中除去有穷模余下部分称为无穷模或非因果模, 非因果模有rank $E-\deg_z\det(zE-\sum\limits_{i=1}^{r}h_i(\xi)A_i)$个.

定理 1 系统(2)是一致正则、因果、稳定的充分条件是存在共同的非奇异对称矩阵$P\in\mathbb{R}^{n\times n}$满足下面的不等式

$$E^{\mathrm{T}}PE\geqslant 0, \tag{6}$$

$$(\sum_{i=1}^{r}h_i(\xi)A_i)^{\mathrm{T}}P(\sum_{i=1}^{r}h_i(\xi)A_i)-E^{\mathrm{T}}PE<0. \tag{7}$$

证 由于rank $E=n_1$, 所以存在两个可逆矩阵M_1,N_1使得

$$M_1EN_1=\begin{bmatrix}I_{n_1}&0\\0&0\end{bmatrix}, \tag{8}$$

相应于式(8)做下面的分解式:

$$M_1^{-\mathrm{T}}PM_1^{-1}=\begin{bmatrix}P_1&P_2\\P_2^{\mathrm{T}}&P_3\end{bmatrix}, \tag{9}$$

$$M_1(\sum_{i=1}^{r}h_i(\xi)A_i)N_1=\begin{bmatrix}\tilde{A}_1&\tilde{A}_2\\\tilde{A}_3&\tilde{A}_4\end{bmatrix}. \tag{10}$$

由式(6)(8)和(9)可知$N_1^{-\mathrm{T}}\begin{bmatrix}P_1&0\\0&0\end{bmatrix}N_1^{-1}\geqslant 0$. 从而$P_1\geqslant 0$; 由式(6)~(10)可知

$$N_1^{-\mathrm{T}}\begin{bmatrix}\tilde{A}_1^{\mathrm{T}}P_1\tilde{A}_1+\tilde{A}_3^{\mathrm{T}}P_2^{\mathrm{T}}\tilde{A}_1+\tilde{A}_1^{\mathrm{T}}P_2\tilde{A}_3+\tilde{A}_3^{\mathrm{T}}P_3\tilde{A}_3-P_1 & \tilde{A}_1^{\mathrm{T}}P_1\tilde{A}_2+\tilde{A}_3^{\mathrm{T}}P_2^{\mathrm{T}}\tilde{A}_2+\tilde{A}_1^{\mathrm{T}}P_2\tilde{A}_4+\tilde{A}_3^{\mathrm{T}}P_3\tilde{A}_4\\ \tilde{A}_2^{\mathrm{T}}P_1\tilde{A}_1+\tilde{A}_4^{\mathrm{T}}P_2^{\mathrm{T}}\tilde{A}_1+\tilde{A}_2^{\mathrm{T}}P_2\tilde{A}_3+\tilde{A}_4^{\mathrm{T}}P_3\tilde{A}_3 & \tilde{A}_2^{\mathrm{T}}P_1\tilde{A}_2+\tilde{A}_4^{\mathrm{T}}P_2^{\mathrm{T}}\tilde{A}_2+\tilde{A}_2^{\mathrm{T}}P_2\tilde{A}_4+\tilde{A}_4^{\mathrm{T}}P_3\tilde{A}_4\end{bmatrix}N_1^{-1}<0,$$

$\forall k\geqslant 0$,

从而

$$\tilde{A}_2^{\mathrm{T}}P_1\tilde{A}_2+[\tilde{A}_2^{\mathrm{T}}P_2\tilde{A}_4+\frac{1}{2}\tilde{A}_4^{\mathrm{T}}P_3\tilde{A}_4]+$$
$$[\tilde{A}_2^{\mathrm{T}}P_2\tilde{A}_4+\frac{1}{2}\tilde{A}_4^{\mathrm{T}}P_3\tilde{A}_4]^{\mathrm{T}}<0,\ \forall k\geqslant 0,$$

由于$P_1\geqslant 0$, 所以

$$[\tilde{A}_2^{\mathrm{T}}P_2\tilde{A}_4+\frac{1}{2}\tilde{A}_4^{\mathrm{T}}P_3\tilde{A}_4]+$$
$$[\tilde{A}_2^{\mathrm{T}}P_2\tilde{A}_4+\frac{1}{2}\tilde{A}_4^{\mathrm{T}}P_3\tilde{A}_4]^{\mathrm{T}}<0,\ \forall k\geqslant 0.$$

由引理1,

$$\mathrm{Re}[\tilde{A}_2^{\mathrm{T}}P_2\tilde{A}_4+\frac{1}{2}\tilde{A}_4^{\mathrm{T}}P_3\tilde{A}_4]\leqslant$$
$$\frac{1}{2}\lambda_{\max}\{[\tilde{A}_2^{\mathrm{T}}P_2\tilde{A}_4+\frac{1}{2}\tilde{A}_4^{\mathrm{T}}P_3\tilde{A}_4]^{\mathrm{T}}+$$
$$[\tilde{A}_2^{\mathrm{T}}P_2\tilde{A}_4+\frac{1}{2}\tilde{A}_4^{\mathrm{T}}P_3\tilde{A}_4]\}<0,\ \forall k\geqslant 0,$$

因此, 矩阵$\tilde{A}_2^{\mathrm{T}}P_2\tilde{A}_4+\frac{1}{2}\tilde{A}_4^{\mathrm{T}}P_3\tilde{A}_4$对于$\forall k\geqslant 0$可逆, 进而矩阵$\tilde{A}_4$对于$\forall k\geqslant 0$可逆, 知系统(2)是一致正则, 因果的.

对于一致正则、因果的系统(2), 总存在非奇异的矩阵M_2, N_2使得:

$$\begin{cases} M_2EN_2=\begin{bmatrix} I_{n_1} & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}, \\ M_2(\sum\limits_{i=1}^{r}h_i(\boldsymbol{\xi})A_i)N_2=\begin{bmatrix}\bar{A}_1 & 0\\ 0 & I_{n_2}\end{bmatrix}, \end{cases} \tag{11}$$

其中$\bar{A}_1\in\mathbb{R}^{n_1\times n_1}$与隶属函数有关, 并且$n_1+n_2=n$. 相应于式(11), 做分解$M_2^{-\mathrm{T}}PM_2^{-1}=\begin{bmatrix}P_{11} & P_{12}\\ P_{12}^{\mathrm{T}} & P_{22}\end{bmatrix}$,与上边的讨论相似, 可得$P_{11}\geqslant 0$, 并且

$$N_2^{-\mathrm{T}}\begin{bmatrix}\bar{A}_1^{\mathrm{T}}P_{11}\bar{A}_1-P_{11} & \bar{A}_1^{\mathrm{T}}P_{12}\\ P_{12}^{\mathrm{T}}\bar{A}_1 & P_{22}\end{bmatrix}N_2^{-1}<0,\ \forall k\geqslant 0. \tag{12}$$

由式(12)可知$\bar{A}_1^{\mathrm{T}}P_{11}\bar{A}_1-P_{11}<0,\ \forall k\geqslant 0$, 从而$P_{11}>0$. 事实上, 假设$P_{11}$不满秩, 则存在向量$\boldsymbol{x}_1\neq 0$使得$\boldsymbol{x}_1^{\mathrm{T}}P_{11}\boldsymbol{x}_1=0$, 则

$$\boldsymbol{x}_1^{\mathrm{T}}(\bar{A}_1^{\mathrm{T}}P_{11}\bar{A}_1-P_{11})\boldsymbol{x}_1=$$
$$\boldsymbol{x}_1^{\mathrm{T}}\bar{A}_1^{\mathrm{T}}P_{11}\bar{A}_1\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_1^{\mathrm{T}}P_{11}\boldsymbol{x}_1=$$
$$(\bar{A}_1\boldsymbol{x}_1)^{\mathrm{T}}P_{11}(\bar{A}_1\boldsymbol{x}_1)\geqslant 0$$

与$\bar{A}_1^{\mathrm{T}}P_{11}\bar{A}_1-P_{11}<0$矛盾. 由Lyapunov 稳定性理论, 有$\sigma(\bar{A}_1)\subset D(0,1),\ \forall k\geqslant 0$, 其中

$$\sigma(\bar{A}_1)=\{z|\ \det(zI_{n_1}-\bar{A}_1)=0\}.$$

由式(11)有

$$\det(zE-\sum_{i=1}^{r}h_i(\boldsymbol{\xi})A_i)=$$
$$\det M_2^{-1}\det(-I_{n_2})\det(zI_{n_1}-\bar{A}_1)\det N_2^{-1},$$
$$\sigma(E,\sum_{i=1}^{r}h_i(\boldsymbol{\xi})A_i)=\sigma(\bar{A}_1)\subset D(0,1),\ \forall k\geqslant 0,$$

因此系统(2)稳定.

定理 2 系统(2)是一致正则、因果、稳定的充分条件是存在共同的非奇异对称矩阵$P=\begin{pmatrix}P_{11} & P_{12}\\ P_{12}^{\mathrm{T}} & P_{22}\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{n\times n}$, 其中$P_{11}\in\mathbb{R}^{n_1\times n_1}$正定, $P_{22}\in\mathbb{R}^{(n-n_1)\times(n-n_1)}$非奇异, 满足下面的不等式

$$E^{\mathrm{T}}PE\geqslant 0, \tag{13}$$
$$A_i^{\mathrm{T}}PA_i-E^{\mathrm{T}}PE<0,\ i=1,2,\cdots,r, \tag{14}$$
$$A_i^{\mathrm{T}}PA_j+A_j^{\mathrm{T}}PA_i-2E^{\mathrm{T}}PE<0,\ i<j. \tag{15}$$

证 由式(14)(15)有

$$(\sum_{i=1}^{r}h_i(\boldsymbol{\xi}(t))A_i)^{\mathrm{T}}P(\sum_{i=1}^{r}h_i(\boldsymbol{\xi}(t))A_i)-E^{\mathrm{T}}PE=$$
$$\sum_{i=1}^{r}h_i^2(\boldsymbol{\xi})[A_i^{\mathrm{T}}PA_i-E^{\mathrm{T}}PE]+$$
$$\sum_{i<j}h_i(\boldsymbol{\xi})h_j(\boldsymbol{\xi})[A_i^{\mathrm{T}}PA_j+A_j^{\mathrm{T}}PA_i-2E^{\mathrm{T}}PE]<0,$$
$$\forall k\geqslant 0.$$

由定理1知系统(2)一致正则、因果和稳定的.

由于rank $E=n_1$, 不失一般性, 设$E=\begin{pmatrix}I_{n_1} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, 则有下面定理成立.

定理 3 系统(2)是一致正则、因果、稳定的充分条件是存在共同的非奇异对称矩阵$P=\begin{pmatrix}P_{11} & P_{12}\\ P_{12}^{T} & P_{22}\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{n\times n}$, 其中, $P_{11}\in\mathbb{R}^{n_1\times n_1}$正定, $P_{22}\in\mathbb{R}^{(n-n_1)\times(n-n_1)}$非奇异, 满足下面的不等式(14)和(15)成立.

注 1 矩阵不等式(14)和(15)是线性矩阵不等式, 可以用LMI工具箱方便的判定系统的一致正则, 因果以及稳定.

注 2 当E满秩时, P是正定矩阵, 这时文献[10]中的引理4.1成立, 从而本文定理3的结果即是文献[10]中Tanaka K 和Sugeno M提出的著名的稳定性判别定理4.2的结果, 即定理3把文献[10]中稳定性判别定理推广到了T-S模糊广义系统上.

例 2 考虑T-S模糊离散广义系统

$$E\boldsymbol{x}(k+1)=\sum_{i=1}^{2}h_i(\xi)A_i\boldsymbol{x}(k), \tag{16}$$

其中:

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ A_1 = \begin{bmatrix} 12.9 & 16.8 \\ 13.2 & 16.1 \end{bmatrix},$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 13.9 & 14.1 \\ 12.8 & 13.1 \end{bmatrix},$$

规范化隶属函数$h_1(\xi) = \dfrac{x_1^2(k)}{2}$, $h_2(\xi)=1-\dfrac{x_1^2(k)}{2}$, $\boldsymbol{x}(k) = [x_1(k),\ x_2(k)]^{\mathrm{T}}$.

利用LMI 工具箱, 可得矩阵不等式(14)和(15)的可行解$P = \begin{bmatrix} 36.7108 & -25.7373 \\ -25.7373 & -6.8369 \end{bmatrix}$, 根据定理3知系统(16)一致正则、因果、稳定.

4 结束语 (Conclusion)

本文给出了判别T-S模糊离散广义系统一致正则、因果的充分条件. 把文献[10]中正常T-S模糊系统的稳定性判别定理推广到了T-S模糊离散广义系统上. 并且用算例说明所给定理有效性.

参考文献(References):

[1] TANAKA K, WANG H O. *Fuzzy Control Systems Design and Analysis: a Linear Matrix Inequality Approach*[M]. New York: John Wiley & Sons, Inc., 2001.

[2] TANIGUCHI T, TANAKA K, YANAFUJI K, Wang H O. Fuzzy descriptor systems: stability analysis and design via LMIs[C]*//Proc of the 1999 American Control Conf*. San Diego: IEEE Press, 1999: 1827 – 1831.

[3] TANIGUCHI T, TANAKA K, WANG H O. Fuzzy descriptor systems and nonlinear model following control[J]. *IEEE Trans on Fuzzy Systems*, 2000, 8(4): 442 – 452.

[4] XU S Y, JAMES LAM, ZHANG L Q. Robust D-stability analysis for uncertain discrete singular systems with state delay[J]. *IEEE Trans on Circuits and Systems-I: Fundamental Theory and Applications*, 2002, 49(4): 551 – 555.

[5] XU S Y, YANG C W. Stabilization of discrete-time singular systems: a matrix inequalities approach[J]. *Automatica*, 1999, 35(9): 1613 – 1617.

[6] XU S Y, YANG C W, NIU Y G, LAM J. Robust stabilization for uncertain discrete singular systems[J]. *Automatica*, 2001, 37(5): 769 – 774.

[7] DAI L. *Singular Control Systems Lecture Notes in Control and Information Sciences*[M]. Berlin: Springer–Verlag, 1989.

[8] 张庆灵, 杨冬梅. 不确定的广义系统的分析与综合[M]. 沈阳: 东北大学出版社, 2003.
(ZHANG Qingling, YANG Dongmei. *Analysis and Synthesis for Uncertain Descriptor Systems*[M]. Shenyang: Northeastern University Press, 2003.)

[9] BENDER D J, LAUB A J. The linear-quadratic optimal regulator for descriptor systems[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1987, AC-32(8): 672 – 688.

[10] TANAKA K, SUGENO M. Stability analysis and design of fuzzy control systems[J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 1992, 45(2): 135 – 156.

作者简介:

朱宝彦 (1962—), 女, 博士, 教授, 分别于1984 年、1991年和2006年在吉林师范大学、东北师范大学、东北大学获学士学位、硕士学位、博士学位, 现在沈阳建筑大学理学院任教, 主要研究方向为模糊广义系统的稳定性和鲁棒控制等, E-mail: zby1109@163.com;

张庆灵 (1956—), 男, 博士生导师, 教授, 分别于1982年、1985年和1995年在东北大学获学士学位、硕士学位和博士学位, 主要研究方向为广义系统的稳定性理论, 广义大系统的分散控制, 鲁棒控制等, E-mail: qlzhang@mail.neu.edu.cn;

佟绍成 (1960—), 男, 硕士生导师, 教授, 1982年于锦州师范学院获学士学位, 1988年于大连海事大学获硕士学位, 1997年于东北大学获博士学位, 主要研究方向为非线性系统的自适应控制及智能控制, E-mail: jztsc@sohu.com.