第 24 卷第 1 期
2007 年 02 月

控 制 理 论 与 应 用
Control Theory & Applications

Vol. 24 No. 1
Feb. 2007

文章编号：1000−8152(2007)01−0148−07

一类不确定非线性离散时滞系统的鲁棒H_∞滤波设计

邵汉永

(曲阜师范大学 电气信息与自动化学院, 山东 日照 276826)

摘要: 考虑一类同时带有非线性动态和参数不确定性的离散时滞系统的鲁棒H_∞滤波设计问题. 假设参数不确定性具有线性分式形式, 而非线性动态满足Lipschitz条件, 给出滤波器使误差系统鲁棒渐近稳定且达到指定的干扰抑制水平. 对参数已知情形, 先建立广义有界实引理, 然后给出H_∞滤波器的存在条件, 证明了H_∞滤波器的存在性可归结为线性矩阵不等式的可解性, 基于线性矩阵不等式给出了H_∞滤波器的综合方法和步骤. 对参数不确定性情形, 通过引进标度参数, 将不确定非线性离散时滞系统的鲁棒H_∞滤波问题转化为确定系统的H_∞滤波设计. 最后给出仿真例子验证所得结果的有效性.

关键词: H_∞滤波; 时滞系统; 离散系统; 非线性系统; 不确定性

中图分类号: TP273

Robust H-infinity filtering for a class of nonlinear discrete time-delay systems with parameter uncertainties

SHAO Han-yong

(School of Electrical Information and Automation, Qufu Normal University, Rizhao Shandong 276826, China)

Abstract: Robust H-infinity filtering for a class of nonlinear discrete time-delay systems with parameter uncertainties is considered. The uncertainties are in a fractional form and the nonlinearities satisfy Lipschitz condition. The objective is the design of a full-order filer which guarantees not only the robust asymptotic-stability but also a prescribed disturbance attenuation level for the error system, irrespective of the parameter uncertainties. For systems without parameter uncertainties, a generalized bounded real lemma is first introduced, then sufficient conditions for the existence of H-infinity filters are derived. It is shown that the existence of H-infinity filters can be reduced to the solvability of linear matrix inequalities. Methods of designing H-infinity filters are provided in a framework of linear matrix inequalities. As for uncertain systems, the robust H-infinity filtering problem can be solved in terms of a scaled H-infinity filtering problem without uncertainties. Finally a numerical example is given to illustrate the effectiveness of the obtained results.

Key words: H-infinity filtering; systems with delays; discrete time-systems; nonlinear systems; uncertainties

1 引言 (Introduction)

状态估计是控制理论中的一个基本问题, 著名的Kalman滤波器和Luenberger观测器分别为线性随机系统和确定系统的状态重构提供了重要工具. 但前者要求外部噪声具有特定的统计性质, 而后者要求系统模型精确已知. 实际系统模型不可避免的带有不确定性和非线性动态, 来自外部的噪声信号一般也不满足要求的概率分布条件. 这就促使人们研究不确定非线性系统的鲁棒H_∞滤波问题. 不确定离散系统的鲁棒H_∞滤波问题是许多学者多年来一直研究的热点. 对于范数有界参数不确定情形, 文 [1] 等给出了基于Riccati方程的设计方法, 文[2, 3] 则给出了基于LMI的研究方法. 文 [5] 对凸多面体参数不确定系统讨论了鲁棒H_∞滤波问题. 然而, 这些方法多数不能直接应用到时滞系统. 由于时滞现象在许多动态系统中普遍存在, 时滞系统的滤波问题在过去几年里引起了众多学者的关注. 文 [6] 提出了状态观测器设计问题, 而文 [7] 讨论了 Kalman 滤波, 但没有考虑参数不确定性, 后来文 [8] 就参数不确定情形给出了 Kalman 滤波器. 关于时滞系统的鲁棒H_∞滤波问题, 文 [9] 在参数不确定情形下研究了滤波器的LMI设计方法, 所得结果后来又被推广到

收稿日期: 2004−11−16; 收修改稿日期: 2006−02−23.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(60574080, 60404006); 曲阜师范大学博士科研启动基金资助项目.

带非线性扰动的情况[10], 但文[10] 给出的滤波器是观测器型的. 据我们了解, 对同时带参数不确定和非线性动态的离散时滞系统, 目前还没有研究一般结构的鲁棒H_∞滤波器的报告. 一般结构的滤波器是状态观测器的推广, 这种滤波器设计更灵活, 也为多目标滤波问题的解决提供了可能性. 本文就同时带参数不确定和非线性动态的离散时滞系统, 考虑一般结构的鲁棒 H_∞滤波器设计问题. 先对参数已知而带有非线性动态的时滞系统, 给出渐近稳定判据以及广义有界实引理, 然后讨论H_∞滤波器的存在条件及综合方法. 在此基础上进一步考虑参数不确定性情形, 通过引进标度参数, 将鲁棒 H_∞滤波问题转化为参数确定的情况.

2　问题描述(Problem formulation)

考虑下面的非线性不确定离散时滞系统

$$\Sigma_\Delta:\begin{cases}x(k+1)=A_\Delta x(k)+A_{d\Delta}x(k-d)+\\ \qquad\qquad B_{1\Delta}w(k)+Ef(x(k)),\\ z(k)=C_{1\Delta}x(k)+C_{1d\Delta}x(k-d)+D_{11\Delta}w(k),\\ y(k)=C_{2\Delta}x(k)+C_{2d\Delta}x(k-d)+D_{21\Delta}w(k),\\ x(k)=0,-d\leqslant k\leqslant 0.\end{cases}\tag{1}$$

其中: $x\in\mathbb{R}^n$为状态, $w\in\mathbb{R}^q$为噪声, $z\in\mathbb{R}^p$为被估计信号, $y\in\mathbb{R}^r$为量测信号. $A_\Delta, A_{d\Delta}, B_{1\Delta}, C_{i\Delta}, C_{id\Delta}, D_{i1\Delta}(i=1,2)$为不确定系数矩阵且满足下面的假设:

假设 1

$$\begin{bmatrix}A_\Delta & A_{d\Delta} & B_{1\Delta}\\ C_{1\Delta} & C_{1d\Delta} & D_{11\Delta}\\ C_{2\Delta} & C_{2d\Delta} & D_{21\Delta}\end{bmatrix}=$$
$$\begin{bmatrix}A & A_d & B_1\\ C_1 & C_{1d} & D_{11}\\ C_2 & C_{2d} & D_{21}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}F_1\\ F_2\\ F_3\end{bmatrix}\Delta(k)[H_1\ H_2\ H_3].\tag{2}$$

而$\Delta(k)\in\mathbb{R}^{m\times m}$由不确定矩阵$G(k)$决定:

$$\begin{cases}\Delta(k)=G(k)[I-JG(k)]^{-1},\\ G^{\mathrm T}(k)G(k)\leqslant I,\ I-J^{\mathrm T}J>0.\end{cases}\tag{3}$$

A, A_d , B_1 , C_i, C_{id}, $D_{i1}(i=1,2)$, J, F_j , $H_j(j=1,2,3)$为已知矩阵.

对非线性动态 $f(x(k))$作下面的假设:

假设 2　$f(x(k))$为未知非线性函数且对任意x_1,x_2:

$$\|f(x_1)-f(x_2)\|\leqslant\|W(x_1-x_2)\|.\tag{4}$$

而$f(0)=0$, W为已知权矩阵, $\|\cdot\|$表示向量的欧氏范数.

Σ_Δ是一类意义较广泛的系统, 不仅它本身代表了一类非线性系统, 而且许多非线性系统经过代数变换、反馈线性化等可化为此类系统; 另外, 线性系统的某些非线性反馈也具有这种形式. 这类离散时滞系统既有参数不确定性又有非线性动态, 既有过程噪声又有量测噪声. 式 (2) 和 (3) 代表了一类典型的参数不确定性, 为许多文献如文 [4,10～14] 等所引用.

对于系统 Σ_Δ, 本文意在设计一个n阶线性时不变滤波器

$$\begin{cases}\xi(k+1)=A_c\xi(k)+B_cy(k),\\ \hat z(k)=C_c\xi(k).\end{cases}\tag{5}$$

来获取信号$z(k)$的估计. 这样, 估计误差动态系统为

$$\Sigma_{\Delta e}:\begin{cases}\bar x(k+1)=\bar A_\Delta\bar x(k)+\bar A_{d\Delta}x(k-d)+\\ \qquad\qquad \bar B_\Delta w(k)+\bar E\bar f(\bar x(k)),\\ e(k)=\bar C_\Delta\bar x(k)+\bar C_{d\Delta}x(k-d)+\bar D_\Delta w(k),\\ \bar x(k)=0,-d\leqslant k\leqslant 0.\end{cases}\tag{6}$$

其中$e(k)=z(k)-\hat z(k)$为估计误差,

$$\bar x(k)=[x^{\mathrm T}(k)\ \ \xi^{\mathrm T}(k)]^{\mathrm T},\ \bar f(k)=[f^{\mathrm T}(k)\ \ 0]^{\mathrm T},$$
$$\left\|\bar f(\bar x(k))\right\|\leqslant\left\|\bar W\bar x(k)\right\|,\tag{7}$$
$$\begin{bmatrix}\bar A_\Delta & \bar A_{d\Delta} & \bar B_\Delta\\ \bar C_\Delta & \bar C_{d\Delta} & \bar D_\Delta\end{bmatrix}=$$
$$\left[\begin{array}{cc|c|c}A_\Delta & 0 & A_{d\Delta} & B_{1\Delta}\\ B_cC_{2\Delta} & A_c & B_cC_{2d\Delta} & B_cD_{21\Delta}\\ \hline C_{1\Delta} & -C_c & C_{1d\Delta} & D_{11\Delta}\end{array}\right],$$
$$\bar E=\begin{bmatrix}E & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix},\ \bar W=\begin{bmatrix}W & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}.\tag{8}$$

考虑不确定系统Σ_Δ的鲁棒H_∞滤波问题: 对给定的常数$\gamma>0$, 要求设计形如式(5)的滤波器, 使误差动态系统(6)在假设1、假设2下渐近稳定且$\|e(k)\|_2\leqslant\gamma\|w(k)\|_2$. 特别地, 当参数已知时, 相应的问题称为$H_\infty$滤波问题; 如果这样的滤波器存在, 则将其称为$H_\infty$滤波器.

从误差方程看, 处理滤波问题需要对状态增广, 这一点与输出反馈控制有类似之处[4,11,12,15]. 但从下面的分析可见滤波问题仍有其自身的特点, 须与输出反馈控制区别开来.

3　参数确定时系统Σ_Δ的H_∞滤波设计(H_∞ filter design for system Σ_Δ without uncertainty)

参数确定时, 系统Σ_Δ简化为

$$\Sigma:\begin{cases}x(k+1)=Ax(k)+A_dx(k-d)+\\ \qquad B_1w(k)+Ef(x(k)),\\ z(k)=C_1x(k)+C_{1d}x(k-d)+D_{11}w(k),\\ y(k)=C_2x(k)+C_{2d}x(k-d)+D_{21}w(k),\\ x(k)=0,-d\leqslant k\leqslant 0.\end{cases}\tag{9}$$

相应的误差动态系统为

$$\Sigma_e:\begin{cases}\bar{x}(k+1)=\bar{A}\bar{x}(k)+\bar{A}_dx(k-d)+\\ \qquad \bar{B}w(k)+\bar{E}\bar{f}(\bar{x}(k)),\\ e(k)=\bar{C}\bar{x}(k)+\bar{C}_dx(k-d)+\bar{D}w(k),\\ \bar{x}(k)=0,-d\leqslant k\leqslant 0.\end{cases}\tag{10}$$

其中

$$\begin{bmatrix}\bar{A} & \bar{A}_d & \bar{B}\\ \bar{C} & \bar{C}_d & \bar{D}\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{cc|cc}A & 0 & A_d & B_1\\ B_cC_2 & A_c & B_cC_{2d} & B_cD_{21}\\ \hline C_1 & -C_c & C_{1d} & D_{11}\end{array}\right].\tag{11}$$

注意到这是一个带有非线性动态的离散时滞系统, 为进行H_∞滤波分析, 需要下面的引理:

引理 对于给定的$\gamma>0$, 如果存在实数$\lambda>0$及矩阵$P>0,S>0$, 使得

$$\begin{bmatrix}A^{\mathrm{T}}PA+S-P+C^{\mathrm{T}}C+\lambda^2W^{\mathrm{T}}W & * & * & *\\ A_d^{\mathrm{T}}PA+C_d^{\mathrm{T}}C & A_d^{\mathrm{T}}PA_d-S+C_d^{\mathrm{T}}C_d & * & *\\ B^{\mathrm{T}}PA+D^{\mathrm{T}}C & B^{\mathrm{T}}PA_d+D^{\mathrm{T}}C_d & B^{\mathrm{T}}PB-\gamma^2I+D^{\mathrm{T}}D & *\\ E^{\mathrm{T}}PA & E^{\mathrm{T}}PA_d & E^{\mathrm{T}}PB & E^{\mathrm{T}}PE-\lambda^2I\end{bmatrix}<0.$$

则状态时滞系统

$$\begin{cases}x(k+1)=Ax(k)+A_dx(k-d)+\\ \qquad Bw(k)+Ef(x(k)),\\ z(k)=Cx(k)+C_dx(k-d)+Dw(k)\end{cases}\tag{12}$$

是渐近稳定的且$\|z(k)\|_2\leqslant\gamma\|w(k)\|_2$.

证 见附录1.

对系统(10)应用上述引理将得到关于P,A_c,B_c,C_c的非线性矩阵不等式, 我们经过若干变换将其线性化得到了H_∞滤波问题的LMI处理方法. 为给出这一结果先引入以下记号:

$$\psi_1=\begin{bmatrix}\phi_{11} & 0 & 0 & 0 & \phi_{15}\\ * & -S & 0 & 0 & \phi_{25}\\ * & * & -\gamma^2I & 0 & \phi_{35}\\ * & * & * & -\lambda^2I & \phi_{45}\\ * & * & * & * & \phi_{55}\end{bmatrix},$$

$$\psi_2=\begin{bmatrix}\phi_{16} & R\\ C_{1d}^{\mathrm{T}} & 0\\ D_{11}^{\mathrm{T}} & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix},\ \psi_3=\begin{bmatrix}-I & 0\\ 0 & -\tilde{S}^{-1}\end{bmatrix},$$

$$\phi_{11}=\begin{bmatrix}-R & -I+R\tilde{S}\\ -I+\tilde{S}R & -Q+\tilde{S}\end{bmatrix},$$

$$\tilde{S}=S+\lambda^2W^{\mathrm{T}}W,\ \phi_{55}=-\begin{bmatrix}R & I\\ I & Q\end{bmatrix},$$

$$\phi_{15}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}AR & A\\ H & QA+FC_2\end{bmatrix},\ \phi_{25}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}A_d\\ QA_d+FC_{2d}\end{bmatrix},$$

$$\phi_{16}^{\mathrm{T}}=[C_1R-G\ \ C_1],\tag{13}$$

$$\phi_{35}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}B_1\\ QB_1+FD_{21}\end{bmatrix},\ \phi_{45}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}E\\ QE\end{bmatrix}.$$

下面的定理给出了系统Σ的H_∞滤波器的存在条件及综合方法:

定理 1 给定$\gamma>0,\lambda>0$及$S>0$, 如果下面的矩阵不等式

$$\begin{bmatrix}\psi_1 & \psi_2\\ \psi_2^{\mathrm{T}} & \psi_3\end{bmatrix}<0,\tag{14}$$

关于Q,R,F,G,H有可行解, 则系统Σ的H_∞滤波问题有解且滤波器参数满足

$$\begin{cases}F=NB_c,\ G=C_cM^{\mathrm{T}},\\ H=QAR+NB_cC_2R+NA_cM^{\mathrm{T}},\end{cases}\tag{15}$$

$$MN^{\mathrm{T}}=I-RQ.\tag{16}$$

证 见附录2.

根据定理1, 系统Σ的H_∞滤波器可按以下步骤综合:

1) 给定$\gamma>0,\lambda>0$及$S>0$, 解线性矩阵不等式(14)得Q,R,F,G,H;

2) 由式(16)求得M,N;

3) 将Q,R,F,G,H,M,N代入式(15)解得A_c,B_c,C_c.

4 参数不确定时系统Σ_Δ的鲁棒H_∞滤波设计(Robust H_∞ filter design for system Σ_Δ with uncertainty)

既然参数已知时, 带有非线性动态的时滞系统Σ的H_∞滤波问题已解决, 我们可以先将参数不确定系统Σ_Δ的鲁棒H_∞滤波设计转化为参数确

定的情形, 然后针对后者用前面的方法求解. 为叙述方便, 先给出以下定义:

定义　考虑误差动态系统(6)~(8), 对于给定的$\gamma>0$, 如果存在实数$\lambda>0$及矩阵$P>0, S>0$使

$$\begin{bmatrix} \bar{A}_\Delta^{\mathrm{T}}P\bar{A}_\Delta+\bar{S}-P+\bar{C}_\Delta^{\mathrm{T}}\bar{C}_\Delta+\lambda^2\bar{W}^{\mathrm{T}}\bar{W} & * & * & * \\ \bar{A}_{d\Delta}^{\mathrm{T}}P\bar{A}_\Delta+\bar{C}_{d\Delta}^{\mathrm{T}}\bar{C}_\Delta & \bar{A}_{d\Delta}^{\mathrm{T}}P\bar{A}_{d\Delta}-S+\bar{C}_{d\Delta}^{\mathrm{T}}\bar{C}_{d\Delta} & * & * \\ \bar{B}_\Delta^{\mathrm{T}}P\bar{A}_\Delta+\bar{D}_\Delta^{\mathrm{T}}\bar{C}_\Delta & \bar{B}_\Delta^{\mathrm{T}}P\bar{A}_{d\Delta}+\bar{D}_\Delta^{\mathrm{T}}\bar{C}_{d\Delta} & \bar{B}_\Delta^{\mathrm{T}}P\bar{B}_\Delta-\gamma^2I+\bar{D}_\Delta^{\mathrm{T}}\bar{D}_\Delta & * \\ \bar{E}^{\mathrm{T}}P\bar{A}_\Delta & \bar{E}^{\mathrm{T}}P\bar{A}_{d\Delta} & \bar{E}^{\mathrm{T}}P\bar{B}_\Delta & \bar{E}^{\mathrm{T}}P\bar{E}-\lambda^2I \end{bmatrix}<0.$$

($\bar{S}=\mathrm{diag}\{S,0\}$)在假设 1 和 2 下总成立, 则滤波器 (5) 称为系统Σ_Δ的强鲁棒H_∞滤波器.

由本文引理, 只要给出Σ_Δ的强鲁棒H_∞滤波器, 前面提出的鲁棒H_∞滤波问题就解决了. 不失一般性, 下面考虑$\gamma=1$的情形.

定理 2　系统Σ_Δ存在强鲁棒H_∞滤波器 (5) 的充分必要条件是存在$\varepsilon>0$使增广系统

$$\begin{cases} \theta(k+1)=A\theta(k)+A_d\theta(k-d)+ \\ \qquad \begin{bmatrix} B_1 & \varepsilon F_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \zeta_1(k) \\ \zeta_2(k) \end{bmatrix}+f(\theta(k)), \\ \eta(k)=\begin{bmatrix} C_1 \\ \varepsilon^{-1}H_1 \end{bmatrix}\theta(k)+\begin{bmatrix} C_{1d} \\ \varepsilon^{-1}H_2 \end{bmatrix}\theta(k-d)+ \\ \qquad \begin{bmatrix} D_{11} & \varepsilon F_2 \\ \varepsilon^{-1}H_3 & J \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \zeta_1(k) \\ \zeta_2(k) \end{bmatrix}, \\ y(k)=C_2\theta(k)+C_{2d}\theta(k-d)+ \\ \qquad \begin{bmatrix} D_{21} & \varepsilon F_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \zeta_1(k) \\ \zeta_2(k) \end{bmatrix}. \end{cases} \tag{17}$$

(其中: $\theta\in\mathbb{R}^n$为状态, $\zeta(k)=[\zeta_1(k)^{\mathrm{T}},\zeta_2(k)^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^{q+m}$为噪声, $\eta\in\mathbb{R}^{p+m}$为被估计信号, $y\in\mathbb{R}^r$为量测信号.) 存在强H_∞滤波器:

$$\begin{cases} \xi(k+1)=A_c\xi(k)+B_cy(k), \\ \hat{\eta}(k)=\bar{C}_c\xi(k). \end{cases} \tag{18}$$

其中$\bar{C}_c=\begin{bmatrix} C_c \\ 0 \end{bmatrix}_{(p+m)\times n}$.

证　见附录 3.

由定理2, 引进标度参数ε可将参数不确定系统Σ_Δ的鲁棒H_∞滤波问题转化为参数确定的情形.

5　仿真示例(Numerical examples)

考虑下面的不确定非线性系统

$$\begin{aligned} x_1(k+1)=&-0.6x_1(k)+0.1x_2(k)+0.1x_1(k-2)+ \\ &w(k)+0.1\sin(0.1x_1(k)-0.2x_2(k)), \\ x_2(k+1)=&(0.01f(k)-0.3)x_2(k)-0.01f(k)x_1(k- \\ &2)+0.1x_2(k-2)+1.2w(k), \\ z(k)=&0.2x_1(k)+0.1x_2(k)+0.05x_1(k-2)+ \\ &0.01x_2(k-2)+w(k), \\ y_1(k)=&x_1(k)-(0.01f(k)+0.1)x_2(k)+ \\ &(0.01f(k)+0.11)x_1(k-2)+ \\ &0.1x_2(k-2)+w(k), \\ y_2(k)=&0.5x_2(k)-0.1x_2(k-2). \end{aligned}$$

其中$f(k)$未知但$|f(k)|\leqslant 1$.

该系统显然具有式 (1) 的形式:

$$A=\begin{bmatrix} -0.6 & 0.1 \\ 0 & -0.3 \end{bmatrix},\ A_d=\begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix},\ B_1=\begin{bmatrix} 1 \\ 1.2 \end{bmatrix},$$

$$C_1=\begin{bmatrix} 0.2 & 0.1 \end{bmatrix},\ C_{1d}=\begin{bmatrix} 0.05 & 0.01 \end{bmatrix},\ D_{11}=1,$$

$$C_2=\begin{bmatrix} 1 & -0.1 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix},\ C_{2d}=\begin{bmatrix} 0.11 & 0.1 \\ 0 & -0.1 \end{bmatrix},$$

$$D_{21}=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ E=\begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ W=\begin{bmatrix} 0.1 & -0.2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$F_1=\begin{bmatrix} 0 \\ -0.1 \end{bmatrix},\ F_2=0,\ F_3=\begin{bmatrix} 0.1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$H_1=[0\quad -0.1],\ H_2=[0.1\quad 0],\ H_3=0,\ J=0.$$

对于$\gamma=1$, 现在求形如式 (5) 的滤波器. 将上述参数代入式 (17), 取$\varepsilon=1, \lambda=1, S=\begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix}$, 对这样得到的系统按定理 1 使用 Matlab 中的 LMI 工具箱可解得

$$R=\begin{bmatrix} 4.2300 & 0.6750 \\ 0.6750 & 4.0143 \end{bmatrix},\ Q=\begin{bmatrix} 0.5676 & -0.6192 \\ -0.6192 & 27.8086 \end{bmatrix},$$

$$G=\begin{bmatrix} 0.6119 & 0.2432 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ H=\begin{bmatrix} -0.4476 & 0.1485 \\ -0.0601 & -0.2420 \end{bmatrix},$$

$$F=\begin{bmatrix} 0.0921 & -0.0723 \\ -0.2585 & 22.9994 \end{bmatrix}.$$

由式 (16) 通过奇异值分解, 得

$$M=\begin{bmatrix} 0.0293 & 0.1978 \\ 0.1978 & -0.0293 \end{bmatrix},\ N=\begin{bmatrix} 3.5136 & -6.0911 \\ -467.7550 & -0.0458 \end{bmatrix}.$$

根据式(15), 进一步解得

$$A_c=\begin{bmatrix}0.0977 & -0.0155\\ 0.0958 & -0.0283\end{bmatrix}, B_c=\begin{bmatrix}0.0119 & -0.0001\\ -3.7757 & -0.0278\end{bmatrix},$$

$$C_c=\begin{bmatrix}1.6510 & 2.8484\\ 0 & 0\end{bmatrix}.$$

根据定理2, 上述不确定系统的强鲁棒H_∞滤波器参数为

$$A_c=\begin{bmatrix}0.0977 & -0.0155\\ 0.0958 & -0.0283\end{bmatrix},$$

$$B_c=\begin{bmatrix}0.0119 & -0.0001\\ -3.7757 & -0.0278\end{bmatrix},$$

$$C_c=\begin{bmatrix}1.6510 & 2.8484\end{bmatrix}.$$

取$f(k)=\cos(2k)$, 则在零输入和下面的初始条件下:

$$\begin{bmatrix}x_1(0)\\ x_2(0)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 3\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}x_1(-1)\\ x_2(-1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.1\\ 1\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}x_1(-2)\\ x_2(-2)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}\xi_1(0)\\ \xi_2(0)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.2\\ 1\end{bmatrix}.$$

滤波误差$e(k)$输出曲线如图1所示, 而在零初始估计误差和$w(k)\equiv 1$下滤波误差$e(k)$曲线如图2所示.

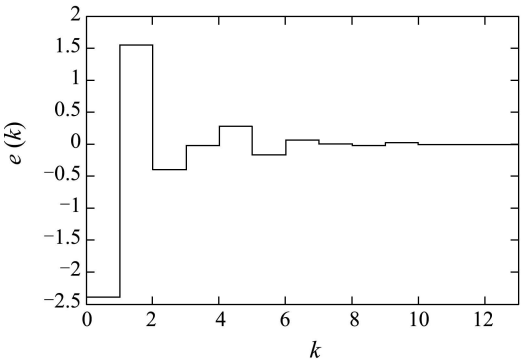

图1 零输入估计误差响应

Fig. 1 Estimation error with zero input

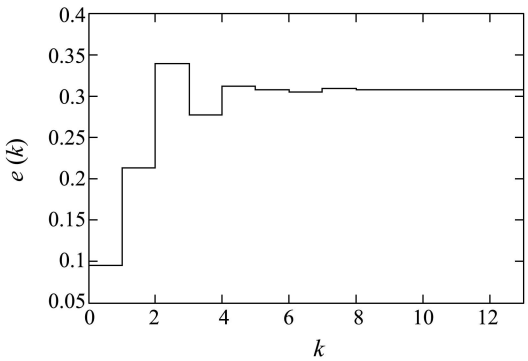

图2 在零初始估计误差和$w(k)\equiv 1$下的估计误差

Fig. 2 Estimation error with $w(k)\equiv 1$

6 结论(Conclusion)

本文针对一类参数不确定性非线性离散时滞系统, 考虑了鲁棒H_∞滤波问题. 通过引进标度参数, 这类参数不确定系统的鲁棒H_∞滤波问题可转换为参数确定的情形, 而参数确定情形下的H_∞滤波问题可通过线性矩阵不等式求解. 所得结论可推广到多时滞和非线性动态关于状态和噪声联合非线性的情形, 可以进一步考虑具有二次型性能指标的鲁棒滤波问题, 也可以讨论依赖于时滞参数的滤波以及有记忆的滤波器设计问题.

参考文献 (References):

[1] THEODOR Y, SHAKED U, de SOUZA C E. A game theory approach to robust discrete-time H_∞ estimation[J]. *IEEE Trans on Signal Processing*, 1994, 42 (6): 1486 – 1495.

[2] XIE L, de SOUZA C E, FU M. H_∞ estimation for discrete-time uncertain systems[J]. *Int J of Robust and Nonlinear Control*, 1991, 1(1): 111 – 123.

[3] LI H, FU M. A linear matrix inequality approach to robust H_∞ filtering[J]. *IEEE Trans on Signal Processing*, 1997, 45(9): 2338 – 2350.

[4] 邵汉永, 冯纯伯. 一类不确定多变量线性系统的鲁棒严格正实性分析及其输出反馈控制[J]. 东南大学学报, 2003, 33(4): 492 – 494. (SHAO Hanyong, FENG Chunbo. Robustly strict positive real analysis and output feedback control for a class of uncertain MIMO linear systems[J]. *J of Southeast University*, 2003, 33 (4): 492 – 494.)

[5] GAO H, WANG C. New approaches to l_2-l_∞ and H_∞ filtering for uncertain discrete-time systems[J]. *Science in China (Series F)*, 2003, 46 (5): 355 – 370.

[6] MALEK-ZAVAREI M, JAMSHIDI M. *Time-Delay Systems: Analysis, Optimization and Applications*[M]. North-Holland, Amsterdam: [s.n.], 1987.

[7] WANG W J, MAU L G. Stabilization and estimation for perturbed discrete time-delay large-scale systems[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1997, 42 (9): 1277 – 1282.

[8] LARSEN T D, ANDERSON N A, RAVN O, et al. Incorporation of time delayed measurements in a discrete-time Kalman filter[C]*// Proc 37th IEEE Conf on Decision and Control*. Tampa, FL: [s.n.], 1998: 3972 – 3977.

[9] LIN Y S, QIAN J X, XUE A K, et al. A LMI approach to robust H_∞ filtering for discrete-time systems[C]*// Proc of 2003 IEEE Conf on Control Applications*. 2003, 1(23–25): 230 – 233.

[10] XU S. Robust H_∞ filtering for a class of discrete uncertain non-linear systems with state delay[J]. *IEEE Trans on Circuits and systems-1: Fundmental Theory and applications*, 2002, 49(12): 1853 – 1859.

[11] GUO L. H_∞ output feedback control for delay systems with nonlinear parametric uncertainties[C]*//IEE Proc Control Theory*. Sydney, Australia: [s.n.], 2002, 149: 226 – 236.

[12] GUO L, CHEN W H. Output feedback control for a class of uncertain nonlinear discrete-time delay systems[J]. *Trans of the Institute of Measurement and Control*, 2003, 25(27): 117 – 130.

[13] XIE L. Output feedback H_∞ control of systems with parameter uncertainty[J]. *Int J Control*, 1996, 63(4): 741 – 750.

[14] 刘诗娜, 费树岷, 冯纯伯. 线性不确定系统的鲁棒滤波器设计[J]. 自动化学报, 2002, 28 (1): 50 – 55.
(LIU Shina, FEI Shumin, FENG Chunbo. Robust filter design for linear uncertain systems[J]. *Acta Automatica Sinica*, 2002, 28 (1): 50 – 55.)

[15] 邵汉永, 冯纯伯. 严格正实线性多变量系统的鲁棒性分析及其输出反馈控制[J]. 控制与决策, 2004, 19 (3): 277 – 280.
(SHAO Hanyong, FENG Chunbo. Robustness analysis and feedback control for strictly positive real linear MIMO systems[J]. *Control and Decision*, 2004, 19 (3): 277 – 280.)

附录(Appendix):

附录 1　引理的证明(Proof of the Lemma)

证

取

$$V(x(k),k)=x^{\mathrm T}(k)Px(k)+\sum_{l=k-d}^{k-1}x^{\mathrm T}(l)Sx(l),$$

记

$$\theta^{\mathrm T}(k)=[x^{\mathrm T}(k)\ \ x^{\mathrm T}(k-d)\ \ w^{\mathrm T}(k)\ \ f^{\mathrm T}(x(k))].$$

如果存在实数$\lambda>0$及矩阵$P>0,S>0$, 使得

$$M\triangleq\begin{bmatrix}A^{\mathrm T}PA+S-P+C^{\mathrm T}C+\lambda^2W^{\mathrm T}W & * & * & *\\ A_d^{\mathrm T}PA+C_d^{\mathrm T}C & A_d^{\mathrm T}PA_d-S+C_d^{\mathrm T}C_d & * & *\\ B^{\mathrm T}PA+D^{\mathrm T}C & B^{\mathrm T}PA_d+D^{\mathrm T}C_d & B^{\mathrm T}PB-\gamma^2I+D^{\mathrm T}D & *\\ E^{\mathrm T}PA & E^{\mathrm T}PA_d & E^{\mathrm T}PB & E^{\mathrm T}PE-\lambda^2I\end{bmatrix}<0.$$

则沿系统(12)的轨线经过一些繁琐运算有

$$\begin{aligned}&z^{\mathrm T}(k)z(k)-\gamma^2w^{\mathrm T}(k)w(k)+\|\lambda Wx(k)\|^2-\\&\|\lambda f(x(k))\|^2+\Delta V(x(k),k)=\\&\theta^{\mathrm T}(k)M\theta(k)<0.\end{aligned}\tag{19}$$

一方面, 令$w(k)=0$并注意到式(4)得

$$\Delta V(x(k),k)<0.$$

故系统(12)渐近稳定.

另一方面, 在零初始条件下, 由式(19)对k求和, 注意到式(4)得

$$\|z(k)\|_2\leqslant\gamma\|w(k)\|_2.$$

附录 2　定理1的证明(Proof of Theorem 1)

证　给定$\gamma>0$, $\lambda>0$和$S>0$, 设Q,R,F,G,H为式(14)的可行解, 根据式(16)通过奇异值分解得M,N. 记

$$X_1=\begin{bmatrix}R & I\\ M^{\mathrm T} & 0\end{bmatrix},\ X_2=\begin{bmatrix}I & Q\\ 0 & N^T\end{bmatrix}.$$

取$P=X_2X_1^{-1}$, 根据本文引理, 只要证明式(14)与下面的矩阵不等式等价即可:

$$\begin{bmatrix}\bar A^{\mathrm T}P\bar A+\bar S-P+\bar C^{\mathrm T}\bar C+\lambda^2\bar W^{\mathrm T}\bar W & * & * & *\\ \bar A_d^{\mathrm T}P\bar A+\bar C_d^{\mathrm T}\bar C & \bar A_d^{\mathrm T}P\bar A_d-S+\bar C_d^{\mathrm T}\bar C_d & * & *\\ \bar B\mathrm TP\bar A+\bar D^{\mathrm T}\bar C & \bar B^{\mathrm T}P\bar A_d+\bar D^{\mathrm T}\bar C_d & \bar B^{\mathrm T}P\bar B-\gamma^2I+\bar D^{\mathrm T}\bar D & *\\ \bar E^{\mathrm T}P\bar A & \bar E^{\mathrm T}P\bar A_d & \bar E^{\mathrm T}P\bar B & \bar E^{\mathrm T}P\bar E-\lambda^2I\end{bmatrix}<0.$$

其中$\bar S=\mathrm{diag}\{S,0\}$.

由Schur补, 这个矩阵不等式等价于

$$\bar M=\begin{bmatrix}-P+\bar S+\lambda^2\bar W^{\mathrm T}\bar W & * & * & * & * & *\\ 0 & -S & * & * & * & *\\ 0 & 0 & -\gamma^2I & * & * & *\\ 0 & 0 & 0 & -\lambda^2I & * & *\\ P\bar A & P\bar A_d & P\bar B & P\bar E & -P & *\\ \bar C & \bar C_d & \bar D & 0 & 0 & -I\end{bmatrix}<0.\tag{20}$$

矩阵左、右两边乘以$\mathrm{diag}\{X_1^{\mathrm T},I,I,I,X_1^{\mathrm T},I\}$, $\mathrm{diag}\{X_1,I,I,I,X_1,I\}$得

$$\begin{bmatrix}\Theta_1 & * & * & * & * & *\\ 0 & -S & * & * & * & *\\ 0 & 0 & -\gamma^2I & * & * & *\\ 0 & 0 & 0 & -\lambda^2I & * & *\\ X_1^{\mathrm T}P\bar AX_1 & X_1^{\mathrm T}P\bar A_d & X_1^{\mathrm T}P\bar B & X_1^{\mathrm T}P\bar E & -X_1^{\mathrm T}PX_1 & *\\ \bar CX_1 & \bar C_d & \bar D & 0 & 0 & -I\end{bmatrix}<0.$$

其中

$$\Theta_1=X_1^{\mathrm T}(-P+\bar S+\lambda^2\bar W^{\mathrm T}\bar W)X_1.$$

将式(11)及上述X_1,P的表达式代入并注意到式(15)(16), 利用式(13)可得

$$\begin{bmatrix}\tilde\phi_{11} & * & * & * & * & *\\ 0 & -S & * & * & * & *\\ 0 & 0 & -\gamma^2I & * & * & *\\ 0 & 0 & 0 & -\lambda^2I & * & *\\ \phi_{15}^{\mathrm T} & \phi_{25}^{\mathrm T} & \phi_{35}^{\mathrm T} & \phi_{45}^{\mathrm T} & \phi_{55} & *\\ \phi_{16}^{\mathrm T} & C_{1d} & \bar D & 0 & 0 & -I\end{bmatrix}<0.$$

其中$\tilde\phi_{11}=\phi_{11}+\mathrm{diag}\{R\tilde SR,0\}$.

由Schur补, 该矩阵不等式等价于式(14).

附录 3　定理2的证明(Proof of Theorem 2)

证　考虑滤波器(5)作用于系统Σ_Δ所得的误差动态系统$\Sigma_{\Delta e}$, 其系数矩阵满足

$$\begin{bmatrix}\bar A_\Delta & \bar A_{d\Delta} & \bar B_\Delta\\ \bar C_\Delta & \bar C_{d\Delta} & \bar D_\Delta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\bar A & \bar A_d & \bar B\\ \bar C & \bar C_d & \bar D\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\bar F\\ F_2\end{bmatrix}\Delta(k)\begin{bmatrix}H_1' & H_2 & H_3\end{bmatrix}.$$

其中

$$\bar F^{\mathrm T}=\begin{bmatrix}F_1^{\mathrm T} & F_3^{\mathrm T}B_c^{\mathrm T}\end{bmatrix},\ H_1'=\begin{bmatrix}H_1 & 0\end{bmatrix}.$$

系统 Σ_Δ 存在强鲁棒 H_∞ 滤波器 (5) 的充分必要条件为, 存在矩阵 $P>0, S>0$ 及实数 $\lambda>0$ 使

$$\bar{M}'_\Delta=\begin{bmatrix} \Theta_2 & * & * & * & * & * \\ 0 & -S & * & * & * & * \\ 0 & 0 & -I & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda^2 I & * & * \\ P\bar{A}_\Delta & P\bar{A}_{d\Delta} & P\bar{B}_\Delta & P\bar{E} & -P & * \\ \bar{C}_\Delta & \bar{C}_{d\Delta} & \bar{D}_\Delta & 0 & 0 & -I \end{bmatrix}<0.$$

在假设 1 和 2 下总成立. 其中:

$$\Theta_2=-P+\bar{S}+\lambda^2\bar{W}^{\mathrm{T}}\bar{W},$$
$$\bar{S}=\mathrm{diag}\{S,0\}.$$

注意到

$$\bar{M}'_\Delta=\bar{M}+\tilde{F}\Delta(k)\bar{H}+\bar{H}^{\mathrm{T}}\Delta(k)\tilde{F}^{\mathrm{T}}.$$

其中 $\bar{M}$ 如式 (20) 所定义且 $\gamma=1$, 而

$$\tilde{F}^{\mathrm{T}}=[0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ \bar{F}^{\mathrm{T}}P\ \ F_2^{\mathrm{T}}],$$
$$\bar{H}=[H'_1\ \ H_2\ \ H_3\ \ 0\ \ 0\ \ 0].$$

由文 [12] 中的引理 2, 上述不等式成立的充分必要条件为存在 $\varepsilon>0$, 使

$$\begin{bmatrix} \bar{M} & \varepsilon^{-1}\bar{H}^{\mathrm{T}} & \varepsilon\tilde{F} \\ \varepsilon^{-1}\bar{H} & -I & J \\ \varepsilon\tilde{F}^{\mathrm{T}} & J^{\mathrm{T}} & -I \end{bmatrix}<0.$$

即

$$\begin{bmatrix} \Theta_2 & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & -S & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & -\gamma^2 I & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda^2 I & * & * & * & * \\ P\bar{A} & P\bar{A}_d & P\bar{B} & P\bar{E} & -P & * & * & * \\ \bar{C} & \bar{C}_d & \bar{D} & 0 & 0 & -I & * & * \\ \varepsilon^{-1}H'_1 & \varepsilon^{-1}H_2 & \varepsilon^{-1}H_3 & 0 & 0 & 0 & -I & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon\bar{F}^{\mathrm{T}}P & \varepsilon F_2^{\mathrm{T}} & J^{\mathrm{T}} & -I \end{bmatrix}<0.$$

将最后一列换到第3列后面, 同时进行相应的行变换, 有

$$\begin{bmatrix} \Theta_2 & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & -S & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & -\gamma^2 I & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & -I & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda^2 I & * & * & * \\ P\bar{A} & P\bar{A}_d & P\bar{B} & \varepsilon P\bar{F} & P\bar{E} & -P & * & * \\ \bar{C} & \bar{C}_d & \bar{D} & \varepsilon F_2 & 0 & 0 & -I & * \\ \varepsilon^{-1}H'_1 & \varepsilon^{-1}H_2 & \varepsilon^{-1}H_3 & J & 0 & 0 & 0 & -I \end{bmatrix}<0.$$

由 Schur 补, 这正是增广系统 (17) 存在形如式 (18) 的强鲁棒 H_∞ 滤波器的充分必要条件.

作者简介:

邵汉永 (1964—), 男, 副教授, 博士, 主要研究领域为无源性分析、鲁棒控制、自适应控制, E-mail: hanyongshao@163.com.