文章编号：1000−8152(2007)02−0193−07

矩阵方程$AX-EXF=BY$的通解及其应用

周 彬, 段广仁

(哈尔滨工业大学 控制理论与制导技术研究中心, 黑龙江 哈尔滨 150001)

摘要: 给出矩阵方程$AX-EXY=BY$ 的一个完全解析的、具有显式表达式和完全自由度的参数解(X,Y). 这里假设矩阵束(E,A,B)为R-能控的, F为任意的方阵. 相比于现有结论, 求解算法不要求矩阵A和F具有特殊的形式, 且对它们的特征值没有任何的限制. 此外, 本文给出的通解还具有结构简洁的特点. 作为一个应用, 给出了广义系统正常Luenberger函数观测器的一种参数化的设计方法. 算例证明了方法的有效性.

关键词: 参数通解; 完全自由度; 右互质分解; Luenberger函数观测器; 参数化方法

中图分类号: TP27 **文献标识码**: A

General solutions to the matrix equation $AX-EXF=BY$ and their applications

ZHOU Bin, DUAN Guang-ren

(Center for Control Theory and Guidance Technology, Harbin Institute of Technology,
Harbin Heilongjiang 150001, China)

Abstract: The problem of solving the matrix equation $AX-EXY=BY$ is studied in this paper. Firstly, a complete general parametric expression for (X,Y) satisfying this equation is obtained. Here matrix triple (E,A,B) is R-controllable and F is an arbitrary matrix. Compared with existing results, the algorithm does not need the matrices F and A to be in any canonical forms and the knowledge of their eigenvalues. Furthermore, this type of solution has a very neat form. As a demonstration, the Luenberger function observer design of descriptor linear system is considered and a parametric design procedure is established. Finally, a numerical example shows the effectiveness of the proposed approach.

Key words: parametric solutions; complete degree of freedom; right coprime factorization; Luenberger function observer; parametric approach

1 引言(Introduction)

矩阵方程

$$AX-EXF=BY. \tag{1.1}$$

其中: $A,E\in\mathbb{R}^{n\times n}$, $B\in\mathbb{R}^{n\times r}$, $F\in\mathbb{R}^{p\times p}$为常数矩阵, $X\in\mathbb{R}^{n\times p}$, $Y\in\mathbb{R}^{r\times p}$是未知矩阵, 在广义线性系统理论中具有举足轻重的作用, 例如, 状态反馈极点配置[1,2]、特征结构配置[3~6]等. 更为直接的应用是参考模型跟踪[7], Luenberger函数观测器设计[8~10] 等等. 作为观测器的应用, 故障检测和鲁棒故障检测[11,12]的关键问题也是求解上述矩阵方程. 此外, 有些鲁棒极点配置方法[1]也涉及到该矩阵方程的参数化解. 因此, 该方程的研究吸引了大批的学者[5,13~17]. 当矩阵F取为Jordan标准型时, 文献[13] 给出了两种简明和直接的具有完全参数自由度(即可以任意选择的参数的个数)的通解, 其中一种是迭代形式, 另外一种则是显式的且只需传递函数$(sI-A)^{-1}B$ 的右互质分解.

在上面提到的有关应用方程(1.1)的有些问题中, 比如模型参考跟踪[7]、Luenberger函数观测器[8~10]、故障检测[11,12]等, F通常是不具有标准型的任意矩阵. 虽然从数学上讲, 总可以通过相似变换, 将F变换成其简约型, 如Jordan标准型、Frobenius标准型等, 再利用文献[13]的结果求得方程(1.1)的解. 但是从实际操作上看, 一者多一道计算手续, 二者数值稳定性值得忧虑. 因为公认的事实是, 矩阵的Jordan约化或者Frobenius约化是不稳定的数值计算[18]. 此外, 基于Jordan标准型的结果往往需要复数运算, 也增加了计算的难度. 基于上述原因, 有必要研究F为任意矩阵时矩阵方程(1.1)的解的问题. 可惜的是, 到目前为止, 尚没有找到研究这

收稿日期: 2005−06−08; 收修改稿日期: 2006−04−26.
基金项目: 国家杰出青年基金资助项目(69925308).

一问题的相关文献.

本文给出了矩阵方程(1.1)的一个具有完全参数自由度的解析通解. 该通解不要求F具有任何特殊形式, 因而不但具有应用方便的优点, 还可以作为该类方程求解的一个统一的方法. 作为一个应用例子, 本文考虑了广义系统正常Luenberger函数观测器的参数化设计问题. 相比于文献[13]等的方法, 本文提出的参数化方法不仅避免了复数运算, 还具有设计简单的优点.

在本文中, 用$\sigma(F)$ 表示矩阵F的特征值的集合. 对于任意$X\in\mathbb{R}^{m\times n}$, 拉伸函数vec$(X)$定义为

$$\mathrm{vec}(X)=[x_{11}\cdots x_{1n}\cdots x_{m1}\cdots x_{mn}]^{\mathrm{T}}.$$

2 完全的解析通解(Complete parametric solutions)

2.1 基本假设和引理(Basic assumptions and lemmas)

在给出主要结果之前, 需要一些预备工作. 首先假设$(E,\ A,B)$ 是R-能控的, 即

$$\mathrm{rank}\begin{bmatrix}sE-A & B\end{bmatrix}=n,\ \forall\, s\in\mathbb{C},\ \mathrm{rank}\,B=r. \tag{2.1}$$

其次关于矩阵方程(1.1)的解的自由度的数目, 有如下结论:

引理 1[13] 设矩阵方程(1.1)中的系数矩阵满足条件(2.1), 那么该矩阵方程的解的自由度的数目为rp.

令s表示Laplace算子, 设存在多项式$N(s)\in\mathbb{R}^{r\times r}[s]$, $M(s)\in\mathbb{R}^{n\times r}[s]$, 使得下述关系成立:

$$(A-sE)M(s)=BN(s). \tag{2.2}$$

并令$N(s)=[N_{ij}(s)]$, 以及

$$t=\max_{r\leqslant i,j\leqslant r}(\deg(N_{ij}(s))), \tag{2.3}$$

那么$M(s),N(s)$可以分别表示成s的多项式的形式, 即

$$\begin{cases}M(s)=\sum\limits_{i=0}^{t}M_is^i, M_i\in\mathbb{R}^{n\times r},\\ N(s)=\sum\limits_{i=0}^{t}N_is^i,\ N_i\in\mathbb{R}^{r\times r}.\end{cases} \tag{2.4}$$

将式(2.4)代入到式(2.2)中得到

$$A\sum_{i=0}^{t}M_is^i-\sum_{i=0}^{t}EM_is^{i+1}=B\sum_{i=0}^{t}N_is^i.$$

两边比较s的同次幂的系数得到

$$\begin{cases}AM_0=BN_0,\\ AM_i-EM_{i-1}=BN_i,\ i=1,2,\cdots,t,\\ -EM_t=0.\end{cases} \tag{2.5}$$

引理 2 设$F\in\mathbb{R}^{p\times p}$为任意矩阵, $M_i,N_i(i=0,\cdots,t)$如式(2.4)所定义, 那么

$$\mathrm{rank}\sum_{i=0}^{t}\left[(F^{\mathrm{T}})^i\otimes\begin{bmatrix}M_i\\ N_i\end{bmatrix}\right]=rp \tag{2.6}$$

成立当且仅当

$$\mathrm{rank}\begin{bmatrix}M(s)\\ N(s)\end{bmatrix}=r,\ \text{for any}\ s\in\sigma(F). \tag{2.7}$$

证 参见附录.

Luenberger函数观测器设计中需要求解如下的线性方程:

$$XA=B. \tag{2.8}$$

这里A,B为常数矩阵. 关于该方程的解, 有引理:

引理 3[19] 设矩阵方程(2.8)相容, 则其通解可以表示为

$$X=BA^-+W(I-AA^-). \tag{2.9}$$

这里W为适当维数的任意矩阵. A^-为A的一个广义逆矩阵.

2.2 主要定理(Main theorem)

关于矩阵方程(1.1)的解. 有如下结果:

定理 1 设E,A,B满足条件(2.1), $M_i,N_i,i=0,1,\cdots,t$由式(2.2)确定, 那么矩阵方程(1.1)的解可以表示为

$$\begin{cases}X=M_0Z+M_1ZF+\cdots+\\ \qquad M_{t-1}ZF^{t-1}+M_tZF^t,\\ Y=N_0Z+N_1ZF+\cdots+\\ \qquad N_{t-1}ZF^{t-1}+N_tZF^t.\end{cases} \tag{2.10}$$

这里$Z\in\mathbb{R}^{r\times p}$是任意的参数矩阵. 进而, 如果

$$\mathrm{rank}\begin{bmatrix}M(\lambda)\\ N(\lambda)\end{bmatrix}=r,\ \text{for all}\ \ \lambda\in\sigma(F) \tag{2.11}$$

成立, 则式(2.10)给出该矩阵方程的通解. 特别地, 如果

$$\mathrm{rank}\begin{bmatrix}M(s)\\ N(s)\end{bmatrix}=r,\ \forall\, s\in\mathbb{C}, \tag{2.12}$$

即$M(s),N(s)$右互质, 则对于任意F, 式(2.10)都给出了方程(1.1)的通解.

证 首先证明式(2.10)满足方程(1.1). 将式(2.10)代入到矩阵方程(1.1)中得到

$$AX-EXF=$$
$$\sum_{i=0}^{t}AM_iZF^i-E\sum_{i=0}^{t}M_iZF^iF=$$

$$\sum_{i=0}^{t} AM_iZF^i - E\sum_{i=0}^{t} M_iZF^{i+1} =$$

$$AM_0Z+\sum_{i=1}^{t}(AM_i-EM_{i-1})ZF^i-EM_tZF^{t+1}.$$

将式(2.5)代入到上式, 并注意到式(2.10), 得到

$$AX-EXF=BN_0Z+\sum_{i=1}^{t}BN_iZF^i=$$

$$\sum_{i=0}^{t}BN_iZF^i=B\sum_{i=0}^{t}N_iZF^i=BY.$$

此即表明式(2.10)满足方程(1.1). 为了证明解的完全性, 需要用到Kronnecker乘积, 根据式(2.10)得到

$$\begin{cases} \operatorname{vec}(X)=\left[\sum_{i=0}^{t}(F^{\mathrm T})^i\otimes M_i\right]\operatorname{vec}(Z),\\ \operatorname{vec}(Y)=\left[\sum_{i=0}^{t}(F^{\mathrm T})^i\otimes N_i\right]\operatorname{vec}(Z),\end{cases}$$

或者写成矩阵的形式

$$\begin{bmatrix}\operatorname{vec}(X)\\ \operatorname{vec}(Y)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sum_{i=0}^{t}(F^{\mathrm T})^i\otimes M_i\\ \sum_{i=0}^{t}(F^{\mathrm T})^i\otimes N_i\end{bmatrix}\operatorname{vec}(Z). \tag{2.13}$$

根据引理1, 由于Z中的元素的个数刚好等于最大的自由度的数目, 所以只需要证明Z到(X,Y)的映射是一一映射, 即证明

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix}\sum_{i=0}^{t}(F^{\mathrm T})^i\otimes M_i\\ \sum_{i=0}^{t}(F^{\mathrm T})^i\otimes N_i\end{bmatrix}=$$

$$\operatorname{rank}\left(\sum_{i=0}^{t}(F^T)^i\otimes\begin{bmatrix}M_i\\ N_i\end{bmatrix}\right)=rp. \tag{2.14}$$

根据引理2, 式(2.14)成立的充要条件是式(2.11)成立. 如果$M(s), N(s)$ 右互质, 结论显然.

从通解的表达式(2.10)可见, 该通解相比于其他参考文献的结果, 不但具有形式简单的特点, 而且利于计算机求解. 因为只要求出了右互质分解得到了$N_i, M_i, i=0,1,\cdots,t$, 则只需要有限的矩阵乘法运算.

说明 1　如果F取为Jordan标准型, 将F代入到式(2.10)中, 通过简单运算, 可以发现文献[13]的结果与本文的结果是等价的.

在下节的Luenberger函数观测器的设计中, 需要求解方程(1.1)的对偶方程

$$XA-FXE=YC \tag{2.15}$$

这里: $E,A\in\mathbb{R}^{n\times n}, C\in\mathbb{R}^{m\times n}, F\in\mathbb{R}^{p\times p}$均为已知的常数矩阵, 假设矩阵束$(E,A,C)$是R−能观的, C行满秩, 即$\operatorname{rank}C=m$. 且设

$$V(s)(A-sE)=U(s)C. \tag{2.16}$$

这里: $U(s)=\sum_{i=0}^{t}U_is^i, V(s)=\sum_{i=0}^{t}V_is^i$. 那么根据定理1, 有如下推论:

推论 1　矩阵方程(2.15)的解可以表示为

$$\begin{cases} X=ZV_0+FZV_1+\cdots+F^{t-1}ZV_{t-1}+F^tZV_t,\\ Y=ZU_0+FZU_1+\cdots+F^{t-1}ZU_{t-1}+F^tZU_t.\end{cases} \tag{2.17}$$

这里$Z\in\mathbb{R}^{p\times m}$是任意的参数矩阵. 进而, 式(2.17)给出了该矩阵方程的全部解当且仅当

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix}U(\lambda) & V(\lambda)\end{bmatrix}=m, \text{for any } \lambda\in\sigma(F) \tag{2.18}$$

成立. 特别地, 如果式(2.16)的分解是左互质的, 则对于任意矩阵F, 式(2.17)给出了该矩阵方程的全部解.

3　广义系统Luenberger函数观测器的参数化设计(Parametric approach for Luenberger observer design)

广义线性系统的正常Luenberger函数观测器有较低动态阶数, 但是却有很多的设计自由度, 因此是一种具有重要研究价值和应用价值的观测器. 首先给出问题的提法.

3.1　问题的提出(Problem formulation)

考虑如下定常广义线性系统

$$\begin{cases} E\dot{x}=Ax+Bu,\\ y=Cx.\end{cases} \tag{3.1}$$

其中: $x\in\mathbb{R}^n, u\in\mathbb{R}^r, y\in\mathbb{R}^m$分别是系统的状态向量, 控制向量和输出向量, $E\in\mathbb{R}^{n\times n}, A\in\mathbb{R}^{n\times n}, B\in\mathbb{R}^{n\times r}, C\in\mathbb{R}^{m\times n}$为已知的实数矩阵. 为了保证系统(3.1)的解的唯一性, 假设矩阵对(E,A)正则, 即存在$s\in\mathbb{C}$, 使得

$$\det(sE-A)\neq 0, \tag{3.2}$$

且该系统(3.1)是$R-$能观的, 即

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix}sE-A\\ C\end{bmatrix}=n, \forall s\in\mathbb{C}. \tag{3.3}$$

该系统的Luenberger函数观测器具有一般形式

$$\begin{cases} \dot{z}=Fz+Gy+Su,\\ \omega=Mz+Ny.\end{cases} \tag{3.4}$$

其中$z\in\mathbb{R}^p$为观测的动态向量. 设计的目的就是求取参数矩阵$F\in\mathbb{R}^{p\times p}, G\in\mathbb{R}^{p\times m}, S\in\mathbb{R}^{p\times r}, M\in\mathbb{R}^{r\times p}, N\in\mathbb{R}^{r\times m}$使得对于某个矩阵$K\in\mathbb{R}^{r\times n}$和任

意的初值$x(0), z(0)$以及任意的输入$u(t)$有

$$\lim_{t\to\infty}(Kx(t)-\omega(t))=0 \tag{3.5}$$

关于Luenberger函数观测器的条件, 有如下熟知结论:

引理 4[20] 假设系统(3.1)正则且满足R−能观, 则系统(3.4)构成系统(3.1)的一个正常Kx函数观测器当且仅当存在矩阵F, T, G, S, M, N满足条件:

$$\begin{cases} S=TB, \\ TA-FTE=GC, \\ K=MTE+NC, \\ F\text{是稳定矩阵}. \end{cases} \tag{3.6}$$

通过该引理可以发现, Luenberger函数观测器(3.4)的设计可以转化为求取满足引理4中的4个条件的参数矩阵F, T, G, S, M, N.

3.2 问题的求解(Solutions to problem)

从引理4可见, Luenberger函数观测器设计的关键一步是矩阵方程$TA-FTE=GC$的求解. 在该矩阵方程中, F是观测器(3.4)的系统矩阵, 实际构建观测器时, F可以是满足定理条件4的任意矩阵. 设$C(A-sE)^{-1}$具有如式(2.16)所示的分解. 有如下定理:

定理 2 假设系统(3.1)正则且满足R-能观条件, 则系统(3.4)构成系统(3.1)的一个正常Kx函数观测器当且仅当存在矩阵$Z\in\mathbb{R}^{p\times m}$满足条件

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix}\varPhi^{\mathrm T} & C^{\mathrm T}\end{bmatrix}^{\mathrm T}=\operatorname{rank}\begin{bmatrix}\varPhi^{\mathrm T} & C^{\mathrm T} & K^{\mathrm T}\end{bmatrix}^{\mathrm T}. \tag{3.7}$$

这里

$$\varPhi=(ZV_0+FZV_1+\cdots+F^{t-1}ZV_{t-1})E. \tag{3.8}$$

如果上述条件满足, 那么参数矩阵G, S, M, N可以表示为

$$\begin{cases} G=ZU_0+FZU_1+\cdots+F^{t-1}ZU_{t-1}+F^tZU_t, \\ S=TB, \\ T=ZV_0+FZV_0+\cdots+F^{t-1}ZV_{t-1}+F^tZV_t, \\ \begin{bmatrix}M\ N\end{bmatrix}= \\ K\begin{bmatrix}TE\\C\end{bmatrix}^{-}+W\left(I_{p+m}-\begin{bmatrix}TE\\C\end{bmatrix}\begin{bmatrix}TE\\C\end{bmatrix}^{-}\right). \end{cases} \tag{3.9}$$

这里$W\in\mathbb{R}^{r\times(p+m)}$为任意的参数矩阵. A^-表示矩阵A的一个任意广义逆矩阵.

证 首先说明式(3.7). 根据推论, 矩阵方程$TA-FTE=GC$的全部参数解可以表示为式(2.17). 注意到定理中的第3个方程等价于

$$K=[M\ \ N][(TE)^{\mathrm T}\ \ C^{\mathrm T}]. \tag{3.10}$$

显然上述方程有解当且仅当

$$\operatorname{rank}[(TE)^{\mathrm T}\ \ C^{\mathrm T}]^{\mathrm T}=\operatorname{rank}[(TE)^{\mathrm T}\ \ C^{\mathrm T}\ \ K^{\mathrm T}]^{\mathrm T} \tag{3.11}$$

成立. 注意到式(2.17), 有

$$TE=(ZV_0+FZV_1+\cdots+F^{t-1}ZV_{t-1}+F^tZV_t)E. \tag{3.12}$$

从式(2.16)可以知道$V_tE=0$, 将此式代入到式(3.12), 即可知式(3.11)等价于式(3.7). 其次如果式(3.7)成立, 式(3.10)是相容方程, 根据引理3, 立得定理2的结论.

上述定理表明, 广义系统正常Luenberger函数观测器的设计被转化为求取满足式(3.7)的参数矩阵Z. 因此, 只要满足式(3.7)的矩阵Z确定, 那么观测器的其他参数就可以确定了, 因而具有设计简单的特点. 而且整个设计过程中的参数矩阵都是实的, 运算也相对简单.

3.3 求解算法(Algorithm)

下面根据上节的定理, 给出广义系统正常Luenberger函数观测器设计的算法步骤:

第1步 求解满足式(2.16)的互质分解$V(s)$, $U(s)$, 并表示成$U(s)=\sum\limits_{i=0}^{t}U_is^i, V(s)=\sum\limits_{i=0}^{t}V_is^i$的形式;

第2步 任意选取观测器的稳定的系统矩阵F; 确定满足关系式(3.7)的参数矩阵Z, 并求取矩阵

$$[(TE)^{\mathrm T}\ \ C^{\mathrm T}]^{\mathrm T}$$

的一个广义逆矩阵;

第3步 按照式(3.9)求取参数矩阵G, S, T, M, N.

说明 2 观测器(3.4)的系统矩阵F在稳定的前提下, 以便于构建观测器系统为原则;

说明 3 如果满足(3.7)的参数矩阵Z不存在, 则可以通过重新挑选F或者增加F的维数来重新设计;

说明 4 关于互质分解式(2.16), 可以参考文献[13]和文献[21,22].

4 数值例子(Numerical example)

考虑形如(3.1)的广义线性系统, 其参数矩阵为

$$E=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix},\ A=\begin{bmatrix}-5&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix},$$

$$C=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{bmatrix}.$$

本文的目的是设计渐近跟踪Kx的Luenberger函数观测器, 其中

$$K=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&-1\end{bmatrix}$$

能镇定该系统. 下面应用本文的算法求解观测器的增益矩阵.

第1步　求得左互质分解的系数矩阵分别为

$$U_0=\begin{bmatrix}0&1\\-5&0\end{bmatrix},\ U_1=\begin{bmatrix}0&0\\-1&0\end{bmatrix},$$

$$V_0=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix},\ V_1=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}.$$

第2步　设观测器系统矩阵的极点为$\{-1+j,-1-j\}$, 为了方便, 可以取友矩阵$F=\begin{bmatrix}0&-2\\1&-2\end{bmatrix}$.

为了求取满足条件(3.7)的参数矩阵Z. 注意到$t=1$,

$$\begin{bmatrix}\varPhi\\C\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}z_{12}&0&z_{11}\\z_{22}&0&z_{21}\\1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}\phi\\C\\K\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}z_{12}&z_{22}&1&0&0&1\\0&0&0&1&1&0\\z_{11}&z_{21}&0&0&0&-1\end{bmatrix}^{\mathrm T},$$

那么条件(3.7)等价于z_{11}, z_{21}不全为零.

$[(TE)^{\mathrm T}\ \ C^{\mathrm T}]^{\mathrm T}$的一个广义逆矩阵可以表示为

$$\begin{bmatrix}TE\\C\end{bmatrix}^{-}=\begin{bmatrix}-\dfrac{z_{21}(z_{22}z_{11}-z_{12}z_{21})}{\varDelta}&\dfrac{z_{11}(z_{22}z_{11}-z_{12}z_{21})}{\varDelta}&\dfrac{z_{11}^2+z_{21}^2}{\varDelta}&0\\0&0&0&1\\\dfrac{-z_{12}z_{22}z_{21}+z_{11}z_{22}^2+z_{11}}{\varDelta}&-\dfrac{z_{22}z_{12}z_{11}-z_{21}z_{12}^2-z_{21}}{\varDelta}&-\dfrac{z_{12}z_{11}+z_{22}z_{21}}{\varDelta}&0\end{bmatrix}.$$

这里$\varDelta=z_{12}^2z_{21}^2+z_{22}^2z_{11}^2+z_{11}^2+z_{21}^2-2z_{12}z_{11}z_{22}z_{21}$.

第3步　根据式(3.9)求得参数矩阵

$$G=\begin{bmatrix}-5z_{12}+2z_{22}&z_{11}\\-2z_{22}-z_{12}&z_{21}\end{bmatrix},\ S=\begin{bmatrix}z_{12}&z_{11}\\z_{22}&z_{21}\end{bmatrix},$$

$$T=\begin{bmatrix}z_{12}&z_{11}&-2z_{21}\\z_{22}&z_{21}&z_{11}-2z_{21}\end{bmatrix}$$

以及

$$\begin{bmatrix}M\ N\end{bmatrix}=K\begin{bmatrix}TE\\C\end{bmatrix}^{-}+W_{2\times4}\left[I_4-\begin{bmatrix}TE\\C\end{bmatrix}\begin{bmatrix}TE\\C\end{bmatrix}^{-}\right].$$

特别地选取$Z=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}$, $W=0$, 可以得到特解:

$$G=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix},\ S=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix},\ T=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix},$$

$$M=\begin{bmatrix}0&0\\-1&0\end{bmatrix},\ N=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}.$$

5　结论(Conclusion)

本文利用多项式矩阵$(sE-A)^{-1}B$的右互质分解给出了矩阵方程$AX-EXF=BY$的完全解析通解. 相比于现有的结果, 这里不需要假定F具有任何的标准型, 其极点也可以待定, 因此具有方便应用的特点. 此外, 该通解还具有形式简洁的特点. 作为一个应用, 考虑了广义系统Luenberger函数观测器的设计问题, 给出了该问题的全部的参数化解. 一个数值例子证明了方法的有效性.

参考文献(References):

[1] DUAN G R, NICHOLS N K, LIU G P. Robust pole assignment in descriptor linear systems via state feedback[J]. *European J of Control*, 2002, 8(2): 136 – 149.

[2] OWENS T J, DUAN G R, NICHOLS N K, et al. Discussion on 'Robust pole assignment in descriptor linear systems via state feedback'[J]. *European J of Control*, 2002, 8(2): 150 – 151.

[3] GAVIN K R, BHATTACHARYYA S P. Robust and well-conditioned eigenstructure assignment via Sylvester's equation[J]. *Optimal Control Applications and Methods*, 1983, (4): 205 – 212.

[4] DUAN G R. Solutions to matrix equation $AV+BW=VF$ and their application to eigenstructure assignment in linear systems[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1993, 38(2): 276 – 280.

[5] DUAN G R. Solution to matrix equation $AV+BW=EVF$ and eigenstructure assignment for descriptor systems[J]. *Automatica*, 1992, 28(3): 639 – 643.

[6] KWON B H, YOUN M J. Eigenvalue-generalized eigenvector assignment by output feedback[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1987, 32(5): 417 – 421.

[7] DUAN G R, LIU W Q, LIU G P. Robust model reference control for multivariable linear systems: A parametric approach[J]. *J of Systems and Control Engineering, part I of The Transaction the Institute of Mechanical Engineers*, 2001, (21): 599 – 610.

[8] TSUI C C. New approach to robust observer design[J]. *Int J Control*, 1988, 47(3): 745 – 751.

[9] DUAN G R, PATTON R J. Robust fault detection using Luenberger-type unknown input observers-a parametric approach[J]. *Int J of Systems Science*, 2001, 32(4): 533 – 540.

[10] DUAN G R. Design of Luenberger function observers with disturbance decoupling[J]. *Chinese J of Automation (English edition)*, 1994, 7(3): 177 – 181.

[11] PARK J, RIZZONI G. An eigenstructure assignment algorithm for the design of fault detection filters[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1994, 39(7): 1521 – 1524.

[12] CHEN J, PATTON R, ZHANG H. Design unknown input observers and robust fault detection filters[J]. *Int J Control*, 1996, 63(1): 85 – 105.

[13] DUAN G R. On the solution to Sylvester matrix equation $AV + BW = EVF$[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1996, 41(4): 612 – 614.

[14] TSUI C C. An overview of the applications and solutions of a fundamental matrix equation pair[J]. *J of The Franklin Institute*, 2004, 341(6): 465 – 475.

[15] TSUI C C. A complete analytical solution to the equation $TA - FT = LC$ and its applications[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1987, 32(8): 742 – 744.

[16] ZHOU B, DUAN G R. An explicit solution to the matrix equation $AX - XF = BY$[J]. *Linear Algebra and Its Applications*, 2005, 402: 345 – 366.

[17] TSUI C C. The applications and a general solution of a fundamental matrix equation pair[C]//*European Control Conference (ECC)*. Cambridge: Cambridge University Press, 2003: 2179 – 2184.

[18] WILKINSON J H. *Algebra Eigenvalue Problem*[M]. Oxford: Oxford University Press, 1965.

[19] RAO C R, MITRA S K. *Generalized Inverse of Matrices and Its Applications*[M]. New York: Wiley, 1971.

[20] DAI L. *Singular control systems, Lecture Note in Control and Information Science*[M]. Berlin: Spring-Verlag, 1989.

[21] BEELEN T G, VELTKAMP J G W. Numerical computation of a coprime factorization of a transfer-function matrix[J]. *Systems & Control Letters*, 1987, 9(4): 281 – 288.

[22] ALMUTHAIRI N F, BINGULAC S. On coprime factorization and minimal-realization of transfer-function matrices using pseudo-observability concept[J]. *Int J of Systems Science*, 1994, 25(27): 1819 – 1844.

附录 引理2的证明(Appendix Proof of Lemma 2)

设F^{T}的Jordan标准型具有v个Jordan块，每个Jordan块的维数为P_j, 其特征值为s_j(不必互异), $j = 1, 2, \cdots, v$ 那么F^{T}的Jordan标准型为

$$J = \mathrm{blockdiag}(J_1, \cdots, J_v), \tag{A1}$$

$$J_j = \begin{bmatrix} s_j & 1 & & \\ & s_j & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & s_j \end{bmatrix}_{p_j \times p_j}. \tag{A2}$$

再设F^{T}的特征向量矩阵为V, 那么根据定义有

$$F^{\mathrm{T}} = VJV^{-1}, \tag{A3}$$

所以

$$\begin{aligned}&\sum_{i=0}^{t}\left[(F^T)^i \otimes \begin{bmatrix} M_i \\ N_i \end{bmatrix}\right] = \sum_{i=0}^{t}\left[V(J)^i V^{-1} \otimes \begin{bmatrix} M_i \\ N_i \end{bmatrix}\right] = \\ &(V \otimes I_{n+r})\left[\sum_{i=0}^{t} J^i \otimes \begin{bmatrix} M_i \\ N_i \end{bmatrix}\right](V^{-1} \otimes I_r) = \\ &(V \otimes I_{n+r})\sum_{i=0}^{t}(\mathrm{blockdiag}(J_1^i, \cdots, J_v^i)) \otimes \begin{bmatrix} M_i \\ N_i \end{bmatrix}(V^{-1} \otimes I_r).\end{aligned}$$

所以有

$$\begin{aligned}&\mathrm{rank}\sum_{i=0}^{t}\left[(F^T)^i \otimes \begin{bmatrix} M_i \\ N_i \end{bmatrix}\right] = \\ &\mathrm{rank}\sum_{i=0}^{t}(\mathrm{blockdiag}(J_1^i, \cdots, J_v^i)) \otimes \begin{bmatrix} M_i \\ N_i \end{bmatrix} = \\ &\sum_{j=0}^{v}\left[\mathrm{rank}\left[\sum_{i=0}^{t} J_j^i \otimes \begin{bmatrix} M_i \\ N_i \end{bmatrix}\right]\right].\end{aligned} \tag{A4}$$

下面求

$$\sum_{i=0}^{t} J_j^i \otimes \begin{bmatrix} M_i \\ N_i \end{bmatrix} \tag{A5}$$

这部分的秩. 定义矩阵

$$E_i = \left[\begin{array}{c:c} 0 & I_{p_j-1} \\ \hdashline 0 & 0 \end{array}\right]_{p_j \times p_j}. \tag{A6}$$

容易验证

$$E_j^l = \left[\begin{array}{c:c} 0 & I_{p_j-l} \\ \hdashline 0 & 0 \end{array}\right]. \tag{A7}$$

那么有分解

$$J_j = s_j I_{p_j} + E_j,\ j = 1, \cdots, v. \tag{A8}$$

所以

$$J_j^i = s_j^i I_{p_j} + s_i^{i-1} C_i^1 E_j^1 + \cdots + s_j^0 C_i^i E_j^i. \tag{A9}$$

将式(A9)代入到式(A5)中得到

$$\begin{aligned}&\sum_{i=0}^{t} J_j^i \otimes \begin{bmatrix} M_i \\ N_i \end{bmatrix} = \\ &\sum_{i=0}^{t}(s_j^i I_{p_j} + s_i^{i-1} C_i^1 E_j^1 + \cdots + s_j^0 C_i^i E_j^i) \otimes \begin{bmatrix} M_i \\ N_i \end{bmatrix} = \\ &\sum_{i=0}^{t}\left[s_j^i I_{p_j} C_i^0 \otimes \begin{bmatrix} M_i \\ N_i \end{bmatrix}\right] + \sum_{i=0}^{t-1}\left[s_j^i E_j^1 C_{i+1}^1 \otimes \begin{bmatrix} M_{i+1} \\ N_{i+1} \end{bmatrix}\right] + \cdots + \\ &\sum_{i=0}^{1}\left[s_j^i I_{p_j} E_j^{t-1} C_{i+t-1}^{t-1} \otimes \begin{bmatrix} M_{i+t-1} \\ N_{i+t-1} \end{bmatrix}\right] + \\ &\sum_{i=0}^{0}\left[s_j^i I_{p_j} E_j^t C_{i+t}^0 \otimes \begin{bmatrix} M_{i+t} \\ N_{i+t} \end{bmatrix}\right] = \\ &I_{p_j}\sum_{i=0}^{t}\left[s_j^i C_i^0 \otimes \begin{bmatrix} M_i \\ N_i \end{bmatrix}\right] + \\ &E_j^1\sum_{i=0}^{t-1}\left[s_j^i C_{i+1}^1 \otimes \begin{bmatrix} M_{i+1} \\ N_{i+1} \end{bmatrix}\right] + \cdots + \\ &E_j^{t-1}\sum_{i=0}^{0}\left[s_j^i I_{p_j} C_{i+t-1}^{t-1} \otimes \begin{bmatrix} M_{i+t-1} \\ N_{i+t-1} \end{bmatrix}\right] + \\ &E_j^t\sum_{i=0}^{0}\left[s_j^i I_{p_j} C_{i+t}^0 \otimes \begin{bmatrix} M_{i+t} \\ N_{i+t} \end{bmatrix}\right].\end{aligned} \tag{A10}$$

如果记

$$\theta_j^k = \sum_{i=0}^{k}\left[s_j^i C_{i+t-k}^{t-k} \otimes \begin{bmatrix} M_{i+t-k} \\ N_{i+t-k} \end{bmatrix}\right],\ k = 0, 1, \cdots, t. \tag{A11}$$

注意到θ_j^0和式(2.4)的关系, 得到

$$\theta_j^0 = \begin{bmatrix} M(s_j) \\ N(s_j) \end{bmatrix}. \tag{A12}$$

将上式代入式(A10), 并注意到式(A6)(A7), 得到

$$\sum_{i=0}^{t} J_j^i \otimes \begin{bmatrix} M_i \\ N_i \end{bmatrix} =$$

$$I_{p_j} \otimes \theta_j^0 + E_j^1 \otimes \theta_j^1 + \cdots + E_j^{t-1} \otimes \theta_j^{t-1} + E_j^t \otimes \theta_j^t =$$

$$\begin{bmatrix} \theta_j^0 & \theta_j^1 & \cdots & \theta_j^t & 0 & \cdots & 0 \\ & \theta_j^0 & \theta_j^1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \theta_j^0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \theta_j^t \\ & & & & \theta_j^0 & \theta_j^1 & \vdots \\ & & & & & \theta_j^0 & \theta_j^1 \\ & & & & & & \theta_j^0 \end{bmatrix}_{p_j \times p_j}. \tag{A13}$$

显然, 式(2.6)成立当且仅当

$$\operatorname{rank}\left[\sum_{i=0}^{t} J_j^i \otimes \begin{bmatrix} M_i \\ N_i \end{bmatrix}\right] = rp_j.$$

根据式(A13), 此式成立当且仅当

$$\operatorname{rank}\theta_j^0 = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} M(s_j) \\ N(s_j) \end{bmatrix} = r$$

成立, 原命题得证.

作者简介:

周　彬　(1981—), 男, 博士研究生, 目前研究方向为线性系统理论、受限系统的控制, E-mail: binzhou@hit.edu.cn;

段广仁　(1962—), 男, 教授, 目前研究方向为线性系统理论、广义线性系统理论、鲁棒控制理论.

(上接第192页)

[10] MARCHAND H, SAMMAN M. Incremental design of a power transformer station controller synthesis methodology[J]. *IEEE Trans on Software Engineering*: 2000, 26(8): 729 – 741.

[11] BORGNE M L, BENVENISTE A, GUERNIC P Le. Polynomial ideal theoretic methods in discrete events and hybrid dynamical systems[C]//*Proc of the 28th Conf on Decision and Control*. New York: IEEE Control Systems Society, 1989, 3(3): 2695 – 2700.

[12] BORGNE M L, BENVENISTE A, GUERNIC P Le. Dynamical systems over galois fields and DEDS control problems[C]//*Proc of the 30th Conf on Decision and Control*. New York: IEEE Control Systems Society, 1991: 1505 – 1510.

[13] MARCHAND H, BORGNE M L. On the optimal control of polynomial dynamical systems over $Z/_pZ$[C]//*Proc of the 4th IEE Int Workshop on Discrete Event Systems*. New York: IEEE Control Systems Society, 1998: 385 – 390.

[14] GERMUNDSSON R. *Symbolic systems: theory, computation and applications* [D]. Linkoping, Sweden: Linkoping University, 1995.

[15] CLARKE E M, GRUMBERG O, PELED D A. *Model Checking*[M]. Cambridge: The MIT Press, 1999.

[16] CAI K Y, CANGUSSU J W, DECARLO R A, et al. An overview of software cybernetics[C]//*Proc of the 11th Software Technology and Engineering Practice*. New York: IEEE Control Systems Society, 2003: 77 – 86.

[17] CAI K Y. Optimal software testing and adaptive software testing in the context of software cybernetics[J]. *Information and Software Technology*: 2002, 44(14): 841 – 855.

作者简介:

王向云　(1976—), 女, 博士, 2007年在北京航空航天大学获工学博士学位, 研究方向为软件可靠性, E-mail: wangxy-18@sohu.com;

张文辉　(1963—), 男, 研究员, 博士生导师, 1988年在挪威奥斯陆大学获理学博士学位, 研究方向包括程序正确性、模型检测、逻辑推理、形式化方法等, E-mail: zwh@ios.ac.cn;

王　鹏　(1981—), 男, 硕士, 2006年在北京航空航天大学获工学硕士学位, 研究方向为软件可靠性和离散事件动态系统的监控理论, E-mail: wp2204@126.com;

李永超　(1977—), 男, 硕士, 2003年在北京航空航天大学获工学硕士学位, 研究方向为软件可靠性, E-mail: liyongchao@263.net;

蔡开元　(1965—), 男, 教授, 1991年在北京航空航天大学获工学博士学位, 1995年担任北航教授, 1998年获国家杰出青年基金, 1999年成为长江学者, 研究方向包括软件可靠性与测试、智能系统与控制、软件控制论, E-mail: kycai@buaa.edu.cn.