文章编号：1000−8152(2007)02−0200−05

基于最优Hankel范数近似的线性相位IIR滤波器设计

邓　娜[1], 邵世煌[1], 顾国祥[2]

(1. 东华大学 信息学院, 上海 200051; 2. 美国路易斯安那州立大学 机电工程系, 美国 路易斯安那)

摘要: 提出了一类基于最优Hankel范数近似的线性相位无限脉冲响应(IIR)滤波器设计方法. 首先给出了Hankel范数的相关预备知识, 然后给出了离散时间单输入单数出系统Hankel范数近似的定理及证明, 最后给出了线性相位IIR滤波器的设计步骤. 该方法不但减小了逆矩阵求解过程中的计算量, 同时给出了L_∞范数近似的误差边界. 仿真结果验证了该方法的有效性.

关键词: FIR滤波器; IIR滤波器; 最优Hankel范数近; 模型降阶; 线性相位; 群时延

中图分类号: TP273　　**文献标识码**: A

Design of linear phase IIR filters via optimal Hankel-norm approximation

DENG Na[1], SHAO Shi-huang[1], GU Guo-xiang[2]

(1. College of Information Science and Technology, Donghua University Shanghai, 200051, China;
2. Department of Electrical and Computer Engineering, Louisiana State University, Louisiana, USA)

Abstract: The design of linear phase infinite impulsive response (IIR) filters is condidered via optimal Hankel-norm approximation. First, some mathematical preliminaries on Hankel-norm is introduced. Then for discrete time single-input single-output (SISO) system, a theorem of Hankel-norm approximation is proposed and proved. Finally the efficient design procedures of linear phase IIR filters are derived. The algorithm not only reduces computational load due to the matrix inversion in lower dimension but also gives L-infinity error bound. Example is worked out which shows the validity of the approach.

Key words: FIR filters; IIR filters; optimal Hankel-norm approximation; model reduction; linear phase.

1　引言(Introduction)

在数字滤波器中, 无限脉冲响应(IIR)滤波器可以用较少的阶数获得很高的选择特性, 运算量相对较小, 但是相位却是非线性的. 相反, 有限脉冲响应(FIR)滤波器可以得到严格的线性相位, 但是要获得一定的选择性则信号时延较大. 所以一般的数字IIR滤波器和FIR滤波器都难以做到严格的线性相位与小运算量兼顾. 目前在IIR滤波器研究中采用平衡截断、最优Hankel范数近似、最小平方根[1~4]等方法应用于线性相位IIR滤波器的设计, 利用FIR滤波器线性相位的特点对IIR滤波器进行设计.

本文进一步研究了最优Hankel 范数近似应用于IIR滤波器设计, 将给出一种新的具有离散时间误差边界的线性相位IIR滤波器的设计方法, 并给出仿真实例. 这种方法不同于文章[5,6]中需要$(n-1)\times(n-1)$阶逆矩阵计算, 它只需要$(k-1)\times(k-1)$阶逆矩阵计算$(k<n)$, 因而减小了计算量; 同时在线性相位IIR滤波器的设计中给出了Chebyshev范数(或称L_∞范数)的误差边界.

2　问题描述(Problem description)

用FIR滤波器对IIR滤波器进行近似属于模型降阶问题. 给定FIR数字滤波器, 用n阶传递函数$G(z)$表示, 需要找到阶数为$k(k<n)$的传递函数$\hat{G}(z)$使得$\|G(z)-\hat{G}(z)\|$尽可能的小. $\|\cdot\|$表示距离量度或者范数. 不同距离量度的选择则直接影响IIR滤波器$\hat{G}(z)$的性能. L_2 范数定义为

$$\|G-\hat{G}\|_2 := \sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|G(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})-\hat{G}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})\right|^2\mathrm{d}\omega}. \quad (1)$$

给定FIR滤波器$G(z)$得到的最小平方根近似$\hat{G}(z)$同样是FIR滤波器. 然而它却不能给出误差频率响应的最大边界. 基于这一原因, 通常使用

收稿日期: 2005−07−11; 收修改稿日期: 2006−05−15.

Chebyshev范数. 定义为

$$\|G-\hat{G}\|_\infty := \sup_{0\leqslant\omega\leqslant 2\pi}\left|G(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})-\hat{G}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})\right|. \tag{2}$$

然而, 最优Chebyshev范数近似却不容易计算, 为此考虑使用Hankel范数[3,5,6].

所有传递函数的集合$X(z)$, 如果$\|X\|_2<\infty$, 则称其为Hilbert空间, 用L_2表示. 由著名的Parseval's定理知

$$\|X\|_2^2=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})\right|^2\mathrm{d}\omega=\sum_{t=-\infty}^{\infty}|x_t|^2.$$

其中$\{x_t\}_{t=-\infty}^{\infty}$是$X(z)$的脉冲响应. 定义$\mathrm{L}_{2+}\subset\mathrm{L}_2$是所有因果传递函数$G(z)\in\mathrm{L}_2$的集合, $\mathrm{L}_{2-}\subset\mathrm{L}_2$是所有非因果传递函数$F(z)\in\mathrm{L}_2$的集合. $\varPi_+$ 和$\varPi_-$分别作为从L_2到L_{2+}和L_{2-}的正交投影算子, 分别定义为$\varPi_+[X(z)]=\sum\limits_{t=0}^{\infty}x_tz^{-t}$和$\varPi_-[X(z)]=\sum\limits_{t=1}^{\infty}x_{-t}z^t$, $\varPi_+[X(z)]$为$X(z)$的因果部分, $\varPi_-[X(z)]$为$X(z)$的非因果部分, 并且$\|X\|_2^2=\|\varPi_+[X]\|_2^2+\|\varPi_-[X]\|_2^2$成立. $F(z)$是满足$\|F\|_\infty<\infty$的传递函数, Hankel算子$\varGamma_F$与$F(z)$有关, 是一种线性映射: $\mathrm{L}_{2+}\mapsto\mathrm{L}_{2-}$. 定义为

$$Y(z)=\varGamma_FX=\varPi_-[F(z)X(z)]\in\mathrm{L}_{2-}\ X(z)\in\mathrm{L}_{2+}. \tag{3}$$

$\{x_t\}_{t=0}^{\infty}$是$X(z)\in\mathrm{L}_{2+}$的脉冲响应. 式(3)可表示为

$$\begin{bmatrix}y_{-1}\\y_{-2}\\y_{-3}\\\vdots\end{bmatrix}=H_F\begin{bmatrix}x_0\\x_1\\x_2\\\vdots\end{bmatrix},\ H_F=\begin{bmatrix}f_{-1}&f_{-2}&f_{-3}&\cdots\\f_{-2}&f_{-3}&\cdots&\cdots\\f_{-3}&\cdots&\cdots&\cdots\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\end{bmatrix}. \tag{4}$$

Hankel算子仅与$F(z)$的非因果部分有关, 而与它的因果部分无关. 矩阵H_F 被称作Hankel矩阵. Hankel范数是一个诱导范数, 被定义为

$$\|\varGamma_F\|_H:=\sup_{X(z)\in\mathrm{L}_{2+}}\|\varPi_-[FX]\|_2=\overline{\sigma}(H_F),$$

$\overline{\sigma}(\cdot)$是最大奇异值, 以下引理可以在文献[5]中找到.

引理　如果$F(z)$是非因果的, 并且存在一个有界的Chebyshev范数, 则$\|F\|_2\leqslant\|F\|_H\leqslant\|F\|_\infty$.

这表明对于稳定的非因果系统, Hankel范数介于L_2 范数和Chebyshev范数之间. 前者条件太弱, 后者计算比较困难, Hankel范数恰好是两者的折中.

基于Hankel范数研究模型降阶问题是由于最优Hankel范数近似问题存在一个“解析”解. 实际上, 在许多不同的模型降阶中, 它是唯一的具有可行闭环解的方法, 并且有可能找到较好的误差边界. 这形成了本文基于FIR滤波器利用最优Hankel范数近似来设计IIR滤波器的研究思路.

3　最优Hankel范数的近似(optimal Hankel-norm approximation)

本节将给出Hankel范数近似的闭环解及其L_∞范数的频率响应误差边界. 本文研究离散时间单输入单输出系统, 用传递函数$G(z)$ 表示, 它是因果的稳定的并满足$\|G\|_\infty<\infty$. 进一步假设$G(z)=C(zI_n-A)^{-1}B$, (A,B,C)是其最小实现, I_n是n阶单位矩阵. 因为$G(z)$ 是严格因果的, 所以$F(z)=G(z^{-1})$是非因果的. 笔者感兴趣的是寻找$\hat{F}(z)$, 它作为$F(z)$的最优Hankel范数近似, 并且$\hat{F}(z)$的非因果部分$\hat{G}(z^{-1})$具有$(k-1)$阶.

P和Q分别是以下两个Lyapunov等式的解:

$$P-APA^{\mathrm{T}}=BB^{\mathrm{T}},\ Q-A^{\mathrm{T}}QA=C^{\mathrm{T}}C. \tag{5}$$

P和Q分别被称作可控格莱姆矩阵和可观格莱姆矩阵. σ_i是Hankel奇异值, 按照降序排列$\sigma_1\geqslant\sigma_2\geqslant\cdots\geqslant\sigma_n>0$, 那么$\sigma_i=\sqrt{\lambda_i(PQ)}$, $i=1,2,\cdots,n$, 存在一个最小实现使得

$$P=\begin{bmatrix}\varSigma_1&0\\0&\sigma_kI_r\end{bmatrix},\ Q=\begin{bmatrix}\varSigma_2&0\\0&\sigma_kI_r\end{bmatrix}. \tag{6}$$

$\varSigma_l\ (l=1,2)$是对角线正定矩阵, σ_k是当$r\geqslant 1$时第k个Hankel奇异值, 并且$\det(\sigma_k^2I_{n-r}-\varSigma_1\varSigma_2)\neq 0$. 式(2)中的$P$和$Q$的实现称作“主轴实现”[4].

通常$r=1$, A,B和C分别与P和Q相匹配:

$$A=\begin{bmatrix}A_{11}&A_{12}\\A_{21}&A_{22}\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}B_1\\B_2\end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix}C_1&C_2\end{bmatrix}.$$

以下定理给出了最优Hankel范数$\hat{F}(z)$对$F(z)=G(z^{-1})$ 的近似.

定理 1　设$r=1$, $B_2\neq 0$是标量. $\varTheta,\varPhi$分别是下式的唯一解:

$$A_{21}^{\mathrm{T}}=\varTheta B_2,\ C_2A_{22}^{\mathrm{T}}=\varPhi B_2, \tag{7}$$

那么$F(z)=G(z^{-1})$的唯一Hankel范数近似为$\hat{F}(z)=\hat{D}+\hat{C}(zI-\hat{A})^{-1}\hat{B}$. 其中: $\hat{A}=A_{11}^{\mathrm{T}}-\varTheta B_1^{\mathrm{T}}$, $\hat{B}=\varTheta$, $\hat{C}=\kappa_1-\hat{D}B_1^{\mathrm{T}}$, $\hat{D}=C_1\varSigma_1\varTheta+\sigma_k\varPhi$, $\kappa_1=C_1\varSigma_1A_{11}^{\mathrm{T}}+\sigma_kC_2A_{12}^{\mathrm{T}}$, $\kappa_2=C_1\varSigma_1A_{21}^{\mathrm{T}}+\sigma_kC_2A_{22}^{\mathrm{T}}$.

令$\hat{F}(z)=\hat{F}_a(z)+\hat{F}_c(z)$, $\hat{F}_a(z)$是$\hat{F}(z)$ 的非因果部分, $\hat{F}_c(z)$是$\hat{F}(z)$的因果部分. 那么$\hat{F}_a(z)$有$(k-1)$个不稳定的极点(在单位圆外部), $\hat{F}_c(z)$有$(n-k)$个稳定的极点(在单位圆内部). $\hat{G}(z)=\hat{F}_a(z^{-1})$, 具有$(k-1)$阶, 那么具有均衡的上界

$$\|G-\hat{G}\|_\infty\leqslant\sum_{i=k}^{n}\sigma_i. \tag{8}$$

证　因为$B_2\neq 0$, 所以

$$\hat{F}(z)\left[1+B_1^{\mathrm{T}}(zI_{n-1}-A_{11}^{\mathrm{T}})^{-1}\hat{B}\right]B_2=$$

$$[\hat{D}+\kappa_1(zI_{n-1}-A_{11}^{\mathrm{T}})^{-1}\hat{B}]B_2.$$

$\hat{B}B_2=\Theta B_2=A_{21}^{\mathrm{T}}$, 从而$\hat{D}B_2=\kappa_2$得到

$$\hat{F}(z)[B_2+B_1^{\mathrm{T}}(zI_{n-1}-A_{11}^{\mathrm{T}})^{-1}A_{21}^{\mathrm{T}}]=[\kappa_2+\kappa_1(zI_{n-1}-A_{11}^{\mathrm{T}})^{-1}A_{21}^{\mathrm{T}}]. \tag{9}$$

$\mu_k=\nu_k=[0\ \ 1]^{\mathrm{T}}$ 是n阶向量, 由式(6)知, $P\nu_k=\sigma_k\mu_k$和$Q\mu_k=\sigma_k\nu_k$. 因为

$$V_k(z)=(zI_n-A^{\mathrm{T}})^{-1}\nu_k=\begin{bmatrix} zI_{n-1}-A_{11}^{\mathrm{T}} & -A_{21}^{\mathrm{T}} \\ -A_{12}^{\mathrm{T}} & z-A_{22}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(zI_{n-r}-A_{11}^{\mathrm{T}})^{-1}A_{21}^{\mathrm{T}}\\1\end{bmatrix}S(z).$$

其中

$$S(z)=[(z-A_{22}^{\mathrm{T}})-A_{12}^{\mathrm{T}}(zI_{n-1}-A_{11}^{\mathrm{T}})^{-1}A_{21}^{\mathrm{T}}]^{-1}\neq 0.$$

式(9)可表示为

$$\hat{F}(z)B^{\mathrm{T}}(zI_n-A^{\mathrm{T}})^{-1}\nu_k=CPA^{\mathrm{T}}(zI_n-A^{\mathrm{T}})^{-1}\nu_k,$$

或者

$$\hat{F}(z)B^{\mathrm{T}}V_k(z)=CPA^{\mathrm{T}}V_k(z). \tag{10}$$

由于

$$X_k(z)=B^{\mathrm{T}}V_k(z)=B^{\mathrm{T}}(zI_n-A^{\mathrm{T}})^{-1}\nu_k,$$
$$Y_k(z)=z^{-1}C(z^{-1}I_n-A)^{-1}\mu_k.$$

那么

$$\begin{aligned}&F(z)X_k(z)=\\&C(z^{-1}I_n-A)^{-1}BB^{\mathrm{T}}(zI_n-A^{\mathrm{T}})^{-1}\nu_k=\\&C(I_n+(z^{-1}I_n-A)^{-1}A)P\nu_k+\\&CPA^{\mathrm{T}}(zI_n-A^{\mathrm{T}})^{-1}\nu_k=\\&\sigma_k z^{-1}C(z^{-1}I_n-A)^{-1}\mu_k+\\&CPA^{\mathrm{T}}(zI_n-A^{\mathrm{T}})^{-1}\nu_k=\\&\sigma_kY_k(z)+CPA^{\mathrm{T}}V_k(z).\end{aligned} \tag{11}$$

注意到$X_k(z)\in \mathrm{L}_{2+}$, $Y_k(z)\in \mathrm{L}_{2-}$. 比较式(11)和(10)的不同, 可以得到

$$\left[F(z)-\hat{F}(z)\right]X_k(z)=\sigma_kY_k(z). \tag{12}$$

很容易得到$\|X_k\|_2=\|Y_k\|_2$, 实际上$Y_k(z)/X_k(z)$是全通的, 从而由(12)式知$\hat{F}(z)$是$F(z)$的最优Hankel范数近似[2,3]. 由于最优Hankel范数近似是唯一的, 由文献[6]中的结果可得到式(8)的误差边界.

笔者注意到过去的有关最优Hankel范数近似的工作, 逆矩阵是$(n-1)\times(n-1)$的. 在定理中, 逆矩阵$\hat{G}(z)=\hat{F}_a(z^{-1})$的计算只需要$(k-1)\times(k-1)$阶, 计算的复杂程度变小了. 更重要的是定理给出了在模型降阶中最优Hankel范数近似的误差边界, 这在文献[5,6]的Hankel近似方法中并没有给出. 笔者注意到平衡截断技术产生的误差边界是定理给出的错误边界的两倍, 在定理中, 如果$G(z)=C(zI_n-A)^{-1}B+D$, 那么$\hat{D}$表示为

$$\hat{D}=C_1\Sigma_1\Theta+\sigma_k\Phi+D. \tag{13}$$

4 最优Hankel范数近似在IIR滤波器上的应用(Optimal Hankel-norm approximation application in IIR filters)

前面已经阐明了线性相位IIR滤波器可以转化为FIR滤波器的设计问题. $G(z)$作为FIR滤波器因果的稳定的传递函数:

$$G(z)=\sum_{t=0}^{n}g_tz^{-t},\ \ g_n\neq 0. \tag{14}$$

$G(z)$ 的最小实现有n 阶, 由于Hankel矩阵和$F(z)=G(z^{-1})$有关, 表示为

$$H_F=\begin{bmatrix} g_1 & g_2 & g_3 & \cdots & g_n\\ g_2 & g_3 & \cdots & g_n & 0\\ g_3 & \cdots & g_n & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ g_n & 0 & \cdots & \cdots & 0\end{bmatrix}, \tag{15}$$

其中: $g_n\neq 0$, $H_F=U\Sigma V^{\mathrm{T}}$, 让$H_F$进行Hankel 矩阵奇异值分解, U和V是平方酉矩阵, $\Sigma=\mathrm{diag}(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_n)$, 那么可以给出$G(z)$的$(A,B,C)$实现[4]:

$$\begin{cases}A=[V(2:n,1:n)]^{\mathrm{T}}V(1:n-1,1:n),\\ B=[V(1,1:n)]^{\mathrm{T}},\\ C=[g_1\ \ g_2\ \ \cdots\ \ g_n]V.\end{cases} \tag{16}$$

它的可控和可观格莱姆矩阵分别为

$$\begin{cases}P=I_n,\\ Q=H_F^{\mathrm{T}}H_F=(U\Sigma V^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}(U\Sigma V^{\mathrm{T}})=V\Sigma^2V^{\mathrm{T}}.\end{cases} \tag{17}$$

实现(A,B,C)不是均衡的, 但是却具有均衡实现相同的性质. 为了和式(6)具有相同的可控和可观格莱姆矩阵, 做相同的转换:

$$A_b=S^{-1}AS,\ B_b=S^{-1}B,\ C_b=CS. \tag{18}$$

其中

$$S=\mathrm{diag}(1,\cdots,1,\frac{1}{\sqrt{\sigma_k}},1,\cdots,1),$$

得到的(A_b,B_b,C_b)可控和可观格莱姆矩

$$P_b=\mathrm{diag}\left(1,\cdots,1,\sigma_k,1,\cdots,1\right), \tag{19}$$

$$Q_b=\mathrm{diag}(\sigma_1^2,\cdots,\sigma_{k-1}^2,\sigma_k,\sigma_{k+1}^2,\cdots,\sigma_n^2). \tag{20}$$

最后, 应用一个简单的置换来使得σ_k从P_b和Q_b矩阵的第(k,k) 位置到第(n,n)位置, 从而和式(6)相匹配.

$$\begin{cases} A_f = T_p' A_b T_p,\ B_f = T_p' B_b, \\ C_f = C_b T_p,\ T_p = \begin{bmatrix} I_{k-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & I_{n-k} & 0 \end{bmatrix}. \end{cases} \tag{21}$$

最后的实现(A_f,B_f,C_f,D), 本文得到相关的可控和可观格莱姆矩阵

$$P_f = \mathrm{diag}\,(\Sigma_1,\sigma_k) = \mathrm{diag}\,(1,1,\cdots,1,\sigma_k)\,, \tag{22}$$

$$Q_f = \mathrm{diag}\,(\Sigma_2,\sigma_k) = \mathrm{diag}\left(\sigma_1^2,\cdots,\sigma_{k-1}^2,\sigma_{k+1}^2,\cdots,\sigma_n^2,\sigma_k\right). \tag{23}$$

A_f,B_f,C_f, 相对应的P_f和Q_f分别可由式(22)(23)给出, 根据定理很容易求出最优Hankel范数近似值. 总结上文得出基于最优Hankel范数近似的线性相位IIR滤波器设计的步骤, 如式(14)给出FIR滤波器的$G(z)$:

第1步　Hankel矩阵H_F由式(15)得到, 并进行奇异值分解;

第2步　根据式(16)计算(A,B,C), 由式(18)计算(A_b,B_b,C_b), 由式(21)计算(A_f,B_f,C_f);

第3步　(A_f,B_f,C_f)相对应的P_f和Q_f 可由式(22)(23)给出, 然后可以根据定理计算$(\hat{A},\hat{B},\hat{C})$, 根据式(13)计算$\hat{D}$;

第4步　计算分解结果$\hat{F}(z) = \hat{D} + \hat{C}(zI_{n-1} - \hat{A})^{-1}\hat{B} = \hat{F}_a(z) + \hat{F}_c(z)$, 其中$\hat{F}_a(z)$有确切的$(k-1)$个不稳定的极点, $\hat{F}_c(z)$有$(n-k)$个稳定的极点. 最优Hankel范数近似为$\hat{G}(z) = \hat{F}_a(z^{-1})$.

在选择$(k-1)$阶最优Hankel范数近似中, 需要$\sigma_{k-1} >> \sigma_k$, 至少在σ_{k-1}和σ_k 之间存在较大的差距, 由定理的误差边界可知较大的差距意味着系统的动态特性可以由前$(k-1)$阶模型表示[3]. 在结束本节之前, 简要地讨论一下线性相位FIR滤波器, 通常它具有$z^{-N}H(z)$ 的形式, 其中:

$$H(z) = \sum_{k=-N}^{N} h_k z^{-k},\ h_k = h_{-k},\ \forall\, k.$$

$H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$实际上是$\omega$的函数, 在这种情况下可写成

$$z^{-m}H(z) = H_a(z) + H_c(z),$$

$$H_c(z) = \sum_{k=0}^{N+m} h_{k-m} z^{-k}.$$

其中$H_a(z)z^{-m}H(z)$是$z^{-m}H(z)$ 的非因果部分, 由于最优Hankel范数近似仅应用于$G(z) = H_c(z)$ (它是$z^{-m}H(z)$的因果部分), 则需要适当地选取群时延$m(m>0)$, 使得$\|H_a\|_\infty$ 较小. 笔者注意到如果取N和m同, 则$\|H_a\|_\infty$将得到较小的值.

通常, 群时延m越小, 计算量越小. 但是, 群时延m越大, $\|H_a\|_\infty$越小. 在这种境况下一些试错的方法在$k < m < 2k$之间进行, 以便取得较为合适的m值. 降阶的IIR滤波器具有$(k-1)$阶, FIR滤波器需要选取具有衰减特性的脉冲响应. 基于这个原因, 窗口设计方法是首选的, 因为它可以加速脉冲响应的衰减.

5　仿真实例(Simulation)

为了说明该方法的有效性, 本文给出了一个带通滤波器的例子[1]. 其理想带通滤波器的幅值响应为

$$\left|H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})\right| = \begin{cases} 0.0, & 0 \leqslant |\omega| \leqslant 0.2\pi, \\ 1.0, & 0.3\pi \leqslant |\omega| \leqslant 0.6\pi, \\ 0.0, & 0.7\pi \leqslant |\omega| \leqslant \pi. \end{cases}$$

抑制频带的幅值不超过-40 dB.

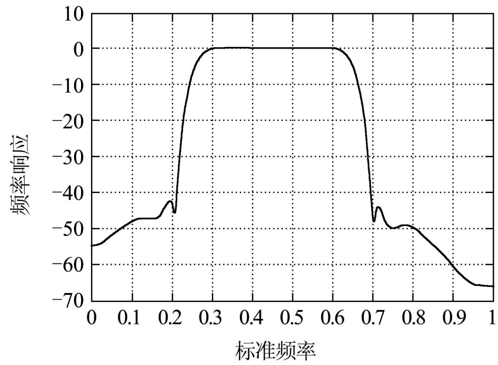

图 1　IIR滤波器频率响应

Fig. 1　Magnitude response of IIR filter

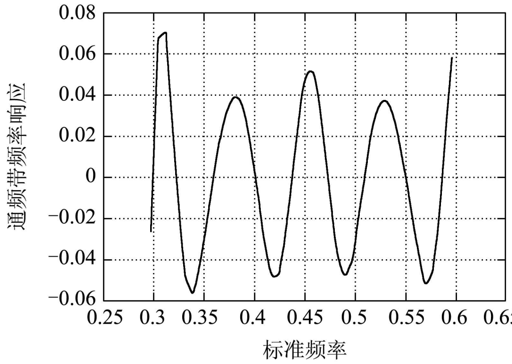

图 2　通频带频率响应

Fig. 2　Magnitude response in passband

设FIR滤波器的阶数$n = 70$, 用试错的方法确定群时延为26, 在计算的过程中, 对于文献[8]需要计算$(70-1)\times(70-1)$逆矩阵, 从而获得阶数为24的IIR滤波器, 而本文的方法只需计算22×22逆矩阵, 就可以获得阶数为22的IIR滤波器. 通过计算机仿真, 完全频率响应和通频带的频率响应分别如图1,2所示. 从图1可以看到抑制频带衰减的最小值在靠近转换频带时小于-42 dB,在另一个抑制频带中则更小. 图2说明了通频带的最大波动也是很小的. 因此本文给出了IIR滤波器的抑制频带和通频带

的很好近似. 同时, 通过计算机仿真, IIR滤波器的误差频率响应在图3中给出, 通频带相位响应在图4中给出, 图中的直线说明设计的IIR滤波器在通频带具有线性相位.

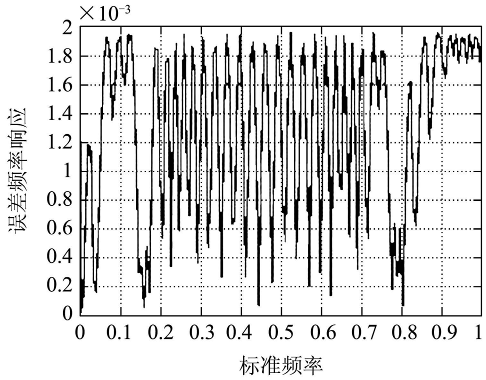

图 3 误差频率响应

Fig. 3 Magnitude of error response

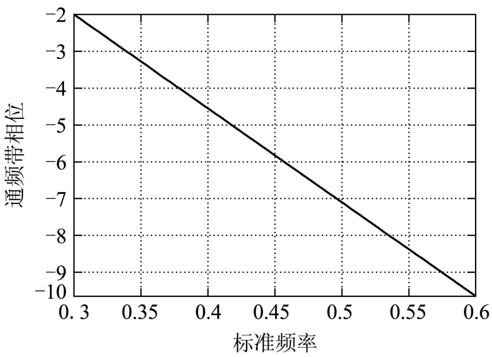

图 4 通频带相位

Fig. 4 Phase response in passband

6 结论(Conclusion)

本文给出了一类基于最优Hankel范数近似的线性相位IIR滤波器设计方法. 该方法在求解过程中只需要计算$(k-1)\times(k-1)$阶逆矩阵, 与计算$(n-1)\times(n-1)$阶逆矩阵相比$(k<n)$, 减小了计算量. 本文给出了基于FIR滤波器利用Hankel范数近似设计线性相位IIR滤波器的详细步骤, 仿真结果验证了该方法的有效性.

参考文献(References):

[1] GU G. All optimal Hankel-norm approximations and their L_∞-error bounds in discrete-time[C]//*Proc of the 41st IEEE Conf on Dec & Control*. Las Vegas, NV: IEEE Press, 2002: 3742 – 3747.

[2] KUNG S Y. Optimal Hankel-norm model reductions: scalar systems[C]//*Proc of 1980 Joint Automation Control Conference*. San Francisco, CA: American Automatic Control Council, 1980.

[3] GLOVER K. All optimal Hankel-norm approximation of linear multivariable systems and their L_1-error bounds[J]. *Int J Control*, 1984, 39(12): 1115 – 1193.

[4] MULLIS C T, ROBERTS R A. Synthesis of minimum roundoff noise fixed point digital filters[J]. *IEEE Trans on Circuits and Systems*, 1976, 23(9): 551 – 562.

[5] CHEN B S, PENG S C, CHIOU B W. IIR filter design via optimal Hankel-norm approximation[J]. *IEEE Proc-G*, 1992, 139(5): 586 – 590.

[6] BELICZYNSKI B, GRYKA J, CAIN G D, et al. IIR filter design via Hankel-norm optimal approximation of FIR prototype filters: A streamlined approach[J]. *Electronic Letters*, 1994, 30(4): 292 – 293.

[7] GU G, KHARGONEKAR P P, LEE E B. Approximation of infinity-dimensional systems[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1989, 34(6): 610 – 618.

[8] BRANDENSTEIN H, UNBEHAUEN R. Weighted least-squares approximation of FIR by IIR digital filters[J]. *IEEE Trans on Signal Processing*, 2001, 49(3): 558 – 568.

作者简介:

邓 娜 (1977—), 女, 博士研究生, 主要从事智能控制、控制理论与应用等方面的研究, E-mail:choumao@mail.dhu.edu.cn;

邵世煌 (1938—), 男, 博士生导师, 主要从事智能控制、生物信息学、控制理论与应用等方面的研究, E-mail: shshao@dhu.edu.cn;

顾国祥 (1955—)男, 特聘教授, 美国路易斯安纳州立大学教授, 主要从事鲁棒控制、系统辨识、信号处理等方面的研究, E-mail:ggu@gigo.ece.lsu.edu .