第 24 卷第 2 期
2007 年 04 月

控 制 理 论 与 应 用
Control Theory & Applications

Vol. 24 No. 2
Apr. 2007

文章编号：1000−8152(2007)02−0229−07

不确定非线性环链系统的分散鲁棒控制

马跃超[1,2], 张庆灵[1], 童　松[1]

(1. 东北大学 系统科学研究所, 辽宁 沈阳 110004; 2. 燕山大学 理学院, 河北 秦皇岛 066004)

摘要: 提出了环链系统和一类不确定非线性环链系统, 利用线性代数理论, 给出了实现环链系统的充要条件. 运用李雅普诺夫稳定理论和矩阵理论研究了不确定非线性环链系统的鲁棒镇定, 并给出了一种非线性鲁棒镇定控制器的设计. 还考虑了一类非线性环链相似组合大系统，给出了分散鲁棒镇定条件. 最后给出数值例子说明设计方法的有效性.

关键词: 环链系统; 鲁棒镇定; 分散控制; 状态反馈

中图分类号: TP 13　　**文献标识码**: A

Decentralized robust control for the uncertain nonlinear circle-linked systems

MA Yue-chao [1,2], ZHANG Qing-ling [1], TONG Song [1]

(1. Institute of Systems Science, Northeastern University, Shenyang Liaoning 110004, China;
2. College of Science, Yanshan University, Qinhuangdao Hebei 066004, China)

Abstract: The circle-linked systems and a class of uncertain nonlinear circle-linked systems are proposed in this paper. Firstly, a sufficient and necessary condition for realization circle-linked systems is given by using linear algebra theory. Robust stabilization for the uncertain nonlinear circle-linked systems is then studied by employing Lyapunov stability theory and matrix theory, and a kind of nonlinear decentralized robust stabilization controller for the systems is also designed. Furthermore, a class of nonlinear circle-linked similar large-scale composite systems is considered and the condition of decentralized robust stabilization for the systems is obtained. Finally, a numerical example is given to illustrate the validity of the obtained design method.

Key words: circle-linked systems; robust stabilization; decentralized control; state feedback

1　引言(Introduction)

许多控制系统和大自然、实际工程等有着千丝万缕的联系, 因此研究有着实际背景的系统控制问题, 有重要的现实意义. 许多作者投身于有着实际背景的系统研究中, 取得了许多有意义的结果[1~3]. 在现实世界中, 有许多系统是由若干环链组成, 每个环链的元素之间循环制约. 整个系统的所有元素有着联系, 其他环链的元素对某一个环链有着影响. 例如, 一个生态系统由若干个生态链组成, 每个生态链的元素循环制约, 互为依存, 而各个生态链之间有着联系, 整个生态系统的所有元素相互关联. 由于自然的复杂性, 它们的关联又具有不确定因素的影响. 除了生态系统, 还有许多系统具有上面的特点.

例互联倒立双摆系统[4]: 考虑两个由弹簧连接的置于小车上的倒立摆, 其中弹簧可沿着摆滑动(见图1).

令 $x_1 = (\theta_1\, \dot\theta_1)^{\mathrm T}$, $x_1 = (\theta_2\, \dot\theta_2)^{\mathrm T}$, 则小车上的倒立双摆系统的动态方程为

$$\dot{x_1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \dfrac{g}{cl} & 0 \end{bmatrix} x_1 - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \dfrac{k(a(t)-cl)}{cml^2} & 0 \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{cml^2} \end{bmatrix} u_1 + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \dfrac{k(a(t)-cl)}{cml^2} & 0 \end{bmatrix} x_2 - \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{m}{M}(\sin\theta_1)\theta_1^2 + \dfrac{k(a(t)-cl)}{cml^2}\Delta y \end{bmatrix},$$

$$\dot{x_2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \dfrac{g}{cl} & 0 \end{bmatrix} x_2 - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \dfrac{k(a(t)-cl)}{cml^2} & 0 \end{bmatrix} x_2 +$$

收稿日期: 2005−09−04; 收修改稿日期: 2006−07−17.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(60574011); 辽宁省科技厅基金资助项目(20052022).

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{cml^2} \end{bmatrix} u_2 + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \dfrac{k(a(t)-cl)}{cml^2} & 0 \end{bmatrix} x_1 - \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{m}{M}(\sin\theta_2)\theta_2^2 + \dfrac{k(a(t)-cl)}{cml^2}\Delta y \end{bmatrix}.$$

其中: $c = \dfrac{M}{M+m}$, $\Delta y = y_1 - y_2$, k和g分别是弹簧系数和重力常数. 此系统为非线性环链组合系统(见本文第4部分).

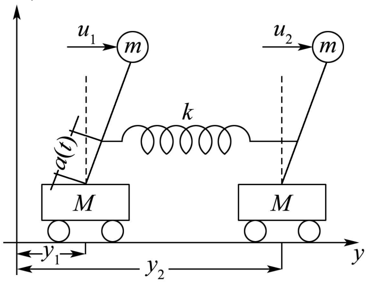

图 1　图1小车上的倒立双摆系统

Fig. 1　Two-handstand cycloids system on the car

在大系统中, 由于分散控制在工程实现的可靠性、实用性和经济性, 受到了人们的青睐, 已取得很多结果[5,6]. 基于上面的观察, 笔者提出了环链系统和一类不确定非线性环链系统, 讨论了不确定非线性环链系统的鲁棒控制问题, 并设计出了一种非线性分散鲁棒镇定控制器. 最后考虑了一类由N个子系统组成的非线性环链组合系统的镇定问题.

2　定义及问题描述(Definitions and problem statement)

引入如下记号: $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n\times m}$ 分别表示n维实向量集和$n\times m$实矩阵集, A^{T}表示矩阵A 的转置, I_n表示n 阶单位阵, $A>0(<0)$ 表示是正定阵(负定阵), $\lambda_{\min}(A)$和$\lambda_{\max}(A)$ 分别表示正定矩阵A 的最小特征值和最大特征值, $\lambda_M(A)$表示矩阵A 的最大奇异值, $\|\cdot\|$表示欧几里德范数, $V_n^{\omega}(E)$ 表示定义在集合E上的n 维解析向量场集.

考虑系统

$$\dot{x} = Ax. \tag{1}$$

定义 1　对于系统(1), 若存在非奇异变换$x = T\overline{x}$, 使

$$\dot{\overline{x}} = \begin{bmatrix} 0 & \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_{n-1} \\ \lambda_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \overline{x}. \tag{2}$$

其中$\lambda_i \in \mathbb{R}, i = 1,2,\cdots,n$, 则称系统(1)可实现满环链系统.

定义 2　设$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, 若$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k (k \leqslant n)$为$\mathbb{R}^n$ 的一个线性无关组, 且存在$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k \in \mathbb{R}$, 使

$$\begin{cases} A\alpha_k = \lambda_{k-1}\alpha_{k-1},\ A\alpha_{k-1} = \lambda_{k-2}\alpha_{k-2}, \cdots, \\ A\alpha_2 = \lambda_1\alpha_1,\ A\alpha_1 = \lambda_k\alpha_k. \end{cases} \tag{3}$$

则称$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k$ 为A 的k 阶环链特征向量组.

下面给出几个引理.

引理 1　系统(1)可实现满环链系统的充要条件是存在由A 的n 阶环链特征向量组构成的基.

一般来说, 系统(1)不一定能实现满环链系统. 系统有时是由几个满环链子系统的组合. 例

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} x.$$

定义 3　对于系统(1), 若存在非奇异变换, $x = T\overline{x}$, 使

$$\dot{\overline{x}} = \begin{bmatrix} \square_1 & & & \\ & \square_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \square_q \end{bmatrix} \overline{x}. \tag{4}$$

其中:

$$\square_1 = \begin{bmatrix} 0 & \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_{k_1-1} \\ \lambda_{k_1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix},$$

$$\square_2 = \begin{bmatrix} 0 & \lambda_{k_1+1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{k_1+2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_{k_1+k_2-1} \\ \lambda_{k_1+k_2} & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \cdots,$$

$$\square_q = \begin{bmatrix} 0 & \lambda_{\sum_{i=1}^{q-1}k_i+1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{\sum_{i=1}^{q-1}k_i+2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_{n-1} \\ \lambda_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}. \tag{5}$$

其中: $k_1+k_2+\cdots+k_q = n$. $\lambda_i \in \mathbb{R}, i = 1,2,\cdots,n$. 则称系统(1)可实现环链系统.

由定义2和定义3不难证得

引理 2　系统(1)可实现环链系统的充要条件是$\mathbb{R}^n$存在由A 的$k_1,k_2,\cdots,k_q$ 阶环链特征向量构

成的基.

引理 3　若$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k$为$A$的$k$阶环链特征向量, 则$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k$是$A^k$的特征向量.

系统(4)可分解为

$$\dot{\overline{x_i}}=\square_i\overline{x_i},(i=1,2,\cdots,q).$$

考虑如下不确定非线性系统

$$\dot{x}=Ax+B(u+\Delta H(x))+f(x)+\Delta f(x).\quad(6)$$

其中: $A\in\mathbb{R}^{n\times n},B\in\mathbb{R}^{n\times m}$, $\Delta H(x)$ 为匹配不确定项, $f(x)$ 为非线性部分, $\Delta f(x)$ 为非匹配非线性不确定项. 称系统

$$\dot{x}=Ax+Bu\quad(7)$$

为系统(6)的名义子系统.

定义 4　对于系统(7), 若存在非奇异变换, $x=T\overline{x}$ 及反馈$u=Lx+v$, 使得系统(7)变为

$$\dot{\overline{x}}=\begin{bmatrix}\square_1&&&\\&\square_2&&\\&&\ddots&\\&&&\square_q\end{bmatrix}\overline{x}+\begin{bmatrix}B_1&&&\\&B_2&&\\&&\ddots&\\&&&B_q\end{bmatrix}v.\quad(8)$$

其中: $\square_i\in\mathbb{R}^{k_i\times k_i},B_i\in\mathbb{R}^{k_i\times m_i},\sum\limits_{i=1}^{q}k_i=n,\sum\limits_{i=1}^{q}m_i=m\geqslant q$. 则称系统(7)是反馈环链块解耦, $k_1,k_2,\cdots,k_q,m_1,m_2,\cdots,m_q$为块指数. 特别, 当$q=m$, 即$B_i\in\mathbb{R}^{k_i\times 1}(i=1,2,\cdots,m)$, 则称系统(7)是反馈环链线性解耦. 若$L=0$, 上面相应的定义分别称为环链块解耦和环链线性解耦.

注 1　定义4类似于文献[7]的无反馈状态解耦线性化的概念, 并可用文献[7]中的方法判断系统(7)是否满足线性解耦的条件, 若满足条件可按文献[7]的办法求出非奇异变换T_1, 并使(7)分解为$\dot{x}_i^*=A_ix_i^*+B_iu_i(i=1,2,\cdots,q)$. 因为线性变换不改变系统的能控性, 若$(A,B)$ 能控, 则$(A_i,B_i)(i=1,2,\cdots,q)$ 能控. 若$(A_i,B_i)(i=1,2,\cdots,q)$能控, 则存在非奇异变换$S_i(i=1,2,\cdots,q)$, 使$(A_i,B_i)$变为能控标准型对, 不难知道, 再经过一次反馈, (A_i,B_i)变为$(\square_i,B_i)$, 即系统(7)反馈环链线性解耦. 令$S=\mathrm{diag}(S_1,S_2,\cdots,S_q)$, 则$T=T_1S$. 事实上, 若$(A,B)$ 能控, 且系统(7)满足文献[7]的条件, 则系统(7)可反馈环链线性解耦.

注 2　为了方便本文只讨论环链块解耦的情况, 反馈环链块解耦的情况可按环链块解耦的同样方法处理.

若系统(6)的名义子系统是环链块解耦, 则存在非奇异变换$x=T\overline{x}$, 使(6)变为

$$\dot{\overline{x}}=\begin{bmatrix}\square_1&&&\\&\square_2&&\\&&\ddots&\\&&&\square_q\end{bmatrix}\overline{x}+\begin{bmatrix}B_1&&&\\&B_2&&\\&&\ddots&\\&&&B_q\end{bmatrix}(u+\Delta H(x))+T^{-1}(f(x)+\Delta f(x)),$$

$$\begin{bmatrix}\dot{\overline{x}}_1\\\dot{\overline{x}}_2\\\cdots\\\dot{\overline{x}}_q\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\square_1&&&\\&\square_2&&\\&&\ddots&\\&&&\square_q\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\overline{x}_1\\\overline{x}_2\\\cdots\\\overline{x}_q\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}B_1&&&\\&B_2&&\\&&\ddots&\\&&&B_q\end{bmatrix}\times\left(\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\\cdots\\u_q\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\Delta H_1(x)\\\Delta H_2(x)\\\vdots\\\Delta H_q(x)\end{bmatrix}\right)+\begin{bmatrix}f_1(x)\\f_2(x)\\\vdots\\f_q(x)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\Delta f_1(x)\\\Delta f_2(x)\\\vdots\\\Delta f_q(x)\end{bmatrix},\quad(9)$$

并且式(9)可分解为

$$\dot{\overline{x}}_i=\square_i\overline{x}_i+B_i(u_i+\Delta H_i(x))+f_i(x)+\Delta f_i(x).\quad(10)$$

其中: $\overline{x}_i\in\mathbb{R}^{k_i},u_i\in\mathbb{R}^{m_i},\square_i\in\mathbb{R}^{k_i\times k_i},B_i\in\mathbb{R}^{k_i\times m_i}$, $f_i(x)\in V_{k_i}^{\omega}(\varOmega),f_i(0)=0,i=1,2,\cdots,q$.

引理 4　若$(\square_i,B_i)$ 能控, 则存在反控律k_i, 对任意正定阵$Q_i\in\mathbb{R}^{k_i\times k_i}$, 使

$$(\square_i+B_iK_i)^{\mathrm{T}}P_i+P_i(\square_i+B_iK_i)=-Q_i\quad(11)$$

有唯一正定解P_i.

引理 5[8]　若$\phi(x)\in V_k^{\omega}(\varOmega)$及$\phi(0)=0$, 则存在$\varOmega$上的光滑函数矩阵$R(x)$, 使得$\phi(x)=R(x)x$.

引理 6　$A\in\mathbb{R}^{n\times n}$, 如果$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s$ 是$A^k(k\geqslant 1)$ 的s个互不相同的特征值, 在特征子空间$V_{\lambda_i}^{A^k}$中任取线性无关的向量组$\alpha_{i1},\alpha_{i2},\cdots,\alpha_{ir_i}(i=1,2,\cdots,s)$则向量组$\alpha_{11},\alpha_{12},\cdots,\alpha_{1r_1},\cdots,\alpha_{s1},\alpha_{s2},\cdots,\alpha_{sr_s}$线性无关.

引理 7　$A\in\mathbb{R}^{n\times n}$, 则$A^k$的属于特征值$\lambda$的特征子空间$V_{\lambda}^{A^k}$ 的维数不大于λ 的重数, 即$\dim V_{\lambda}^{A^k}\leqslant s$($s$ 为λ 的重数).

笔者要考虑两个问题:

1) 可实现环链系统的非奇异变换的求法;

2) 系统(6)满足什么条件时, 系统(6)存在稳定鲁棒控制器.

3　一类非线性环链系统的分散控制(Decentralized control for a class of nonlinear circle-linked systems)

设$A\in\mathbb{R}^{n\times n}$, A所有的环链特征向量组的阶分别为$k_1,k_2,\cdots,k_q$. 取k 为$k_1,k_2,\cdots,k_q$的最小公倍数.

定理 1　系统(1)可实现环链系统的充要条件是

1) A_k的特征值都属于$\mathbb{R}$;

2) A_k的每一特征值λ的维数等于$\dim V_{\lambda}^{A^k}$ 的重数;

3) 对每一个λ, $V_{\lambda}^{A^k}$ 都存在A的若干个k_i 阶环链特征向量组成的基.

证　由引理2、引理3、引理6、引理7及线性代数

的方法不难证明.

算法步骤如下:

1) 分析A的所有k_i阶环链特征向量组, 其阶分别为$k_1,k_2,\cdots,k_q$, 取k为$k_1,k_2,\cdots,k_q$的最小公倍数;

2) 求A^k的全部特征值;

3) 解$(\lambda I-A^k)x=0$, 确定A的k_i阶环链特征向量组组成的齐次方程$(\lambda I-A^k)x=0$的解空间的基础解系;

4) 若对每一个λ, 都存在A的环链特征向量组构成的基础解系. $\operatorname{rank}(\lambda I-A^k)=n-s$, s为λ的重数, 那么系统(1)可实现环链系统. 以这些解为列做成T, T非奇异, 令$x=T\overline{x}$, 则系统(1)变为

$$\dot{\overline{x}}=\begin{bmatrix}\Box_1 & & & \\ & \Box_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \Box_q\end{bmatrix}\overline{x}.$$

下面讨论系统(6)的镇定问题. 当$q=1$, 即系统(6)是满环链的, 这时在非奇异变换$x=T\overline{x}$变换下, 式(6)变为

$$\dot{\overline{x}}_i=\Box_1\overline{x}+T^{-1}B(u+\Delta H(x))+T^{-1}(f(x)+\Delta f(x)).\tag{12}$$

定理 2 若系统(6)是可实现满环链的, 且满足下列条件:

1) $(\Box_1,T^{-1}B)$能控.

2) $\|\Delta H(x)\|\leqslant\rho(x)$, $\|\Delta f(x)\|\leqslant\eta(x)$. 这里$\eta(\cdot),\rho(\cdot)$均为已知的连续函数, 且$\dfrac{\eta(x)}{\|(T^{-1}B)^{\mathrm T}P\overline{x}\|}$是可连续化函数. 当$\overline{x}^{\mathrm T}PT^{-1}B=0$时, $\eta(x)=0$.

3) $[\lambda_{\min}(Q)-2\lambda_M(PT^{-1}R(x)T)]>0$($x\in\Omega$, Ω为x的邻域). 这里Q根据需要选择, P由式(11)确定. 则系统(6)在区域Ω上可鲁棒镇定.

证 设计控制器

$$u=KT^{-1}x+u_1(x)+u_2(x).\tag{13}$$

其中:

$$u_1(x)=\begin{cases}\dfrac{-(T^{-1}B)^{\mathrm T}P\overline{x}}{\|(T^{-1}B)^{\mathrm T}P\overline{x}\|}\rho(x), & \overline{x}^{\mathrm T}PT^{-1}B\neq0,\\ 0, & \overline{x}^{\mathrm T}PT^{-1}B=0,\end{cases}$$

$$u_2(x)=\begin{cases}\dfrac{-(T^{-1}B)^{\mathrm T}P\overline{x}}{\|(T^{-1}B)^{\mathrm T}P\overline{x}\|^2}\lambda_{\max}(PT^{-1})\|\overline{x}\|\eta(x), & \\ & \overline{x}^{\mathrm T}PT^{-1}B\neq0,\\ 0, & \overline{x}^{\mathrm T}PT^{-1}B=0.\end{cases}\tag{14}$$

则系统(12)和(13)构成的闭环系统为

$$\dot{\overline{x}}_i=\Box_1\overline{x}+T^{-1}B(KT^{-1}x+u_1(x)+u_2(x)+\Delta H(x))+T^{-1}(f(x)+\Delta f(x)).\tag{15}$$

对系统(15)构造李雅普诺夫函数

$$V=\overline{x}^{\mathrm T}P\overline{x},$$

把V沿系统(15)的轨迹求导得

$$\dot V=-\overline{x}^{\mathrm T}Q\overline{x}+2\overline{x}^{\mathrm T}PT^{-1}B(u_1(x)+\Delta H(x))+2\overline{x}^{\mathrm T}PT^{-1}(f(x)+\Delta f(x)+Bu_2(x)).$$

当$\overline{x}^{\mathrm T}PT^{-1}B=0$时, 由式(14)及定理2的条件2)得

$$\begin{aligned}&\overline{x}^TPT^{-1}B(u_1(x)+\Delta H(x))=0,\\&\overline{x}PT^{-1}(\Delta f(x)+Bu_2(x))=\\&\overline{x}PT^{-1}\Delta f(x)\leqslant\\&\lambda_{\max}(PT^{-1})\|\overline{x}\|\|\Delta f(x)\|\leqslant\\&\lambda_{\max}(PT^{-1})\|\overline{x}\|\|\eta(x)\|=0.\end{aligned}$$

当$\overline{x}^{\mathrm T}PT^{-1}B\neq0$时, 由(14)式及定理2的条件2)得

$$\begin{aligned}&\overline{x}^{\mathrm T}PT^{-1}(Bu_2(x)+\Delta f(x))=\\&\frac{-\overline{x}^{\mathrm T}PT^{-1}B(T^{-1}B)^{\mathrm T}P\overline{x}}{\|(T^{-1}B)^{\mathrm T}P\overline{x}\|^2}\lambda_{\max}(PT^{-1})\eta(x)\|\overline{x}\|+\\&\overline{x}^TPT^{-1}\Delta f(x)\leqslant\\&-\lambda_{\max}(PT^{-1})\|\overline{x}\|(\eta(x)-\|\Delta f(x)\|)\leqslant0,\\&\overline{x}^{\mathrm T}PT^{-1}(u_1(x)+\Delta H(x))=\\&\frac{-\overline{x}^{\mathrm T}PT^{-1}B(T^{-1}B)^{\mathrm T}P\overline{x}}{\|(T^{-1}B)^{\mathrm T}P\overline{x}\|}\rho(x)+\\&\overline{x}^{\mathrm T}PT^{-1}B\Delta H(x)\leqslant\\&-\|\overline{x}^{\mathrm T}(PT^{-1}B)\|(\rho(x)-\|\Delta H(x)\|)\leqslant0.\end{aligned}$$

由引理5知, 存在函数阵$R(x)$, 使$f(x)=R(x)x$. 所以

$$\dot V\leqslant-\lambda_{\min}(Q)\|\overline{x}\|^2+2\lambda_M(PT^{-1}R(x)T)\|\overline{x}\|^2=-(\lambda_{\min}(Q)-2\lambda_M(PT^{-1}R(x)T))\|\overline{x}\|^2.$$

由定理2的条件3, $\dot V$在区域Ω上负定. 证毕.

下面讨论$q>1$的情形.

定理 3 若系统(6)满足下列条件:

1) 系统(6)的名义子系统(7)环链块解耦, 其块指数为$(k_1,k_2,\cdots,k_q)$, $(m_1,m_2,\cdots,m_q)$, $(\Box_i,B_i)$能控$(i=1,2,\cdots,q)$.

2) $\|\Delta H_i(x)\|\leqslant\rho_i(x)$, $\|\Delta f_i(x)\|\leqslant\eta_i(x)$. 这里$\eta_i(\cdot),\rho_i(\cdot)$均为已知的连续函数, 且$\dfrac{\eta_i(x)}{\|B_i^{\mathrm T}P_i\overline{x}_i\|}$是可连续化函数. 当$\overline{x}_i^{\mathrm T}P_iB_i=0$时, $\eta_i(x)=0.1\leqslant i\leqslant q$.

3) 矩阵$W^{\mathrm T}(x)+W(x)$($W=(W_{ij})_{q\times q}$)在区域Ω上是正定的. 其中

$$W_{ij}=\begin{cases}\lambda_{\min}(Q_i)-2\lambda_M(P_iR_i(x)T),\ i=j,\\ -2\lambda_M(P_iR_i(x)T), \quad i\neq j.\end{cases}$$

其中Q_i P_i由式(11)确定. 则系统(6)在区域Ω上可分散鲁棒镇定.

证 做非奇异变换$x=T\overline{x}$, 使式(6)变为式(10). 设计控制器

$$u_i=K_i\overline{x}_i+u_i^1(x)+u_i^2(x),\ 1\leqslant i\leqslant q. \tag{16}$$

其中:

$$u_i^1(x)=\begin{cases}\dfrac{-B_i^{\mathrm T}P_i\overline{x}_i}{\|B_i^{\mathrm T}P_i\overline{x}_i\|}\rho_i(x),\ \overline{x}_i^{\mathrm T}P_iB_i\neq 0,\\ 0, \quad \overline{x}_i^{\mathrm T}P_iB_i=0,\end{cases} \tag{17}$$

$$u_i^2(x)=\begin{cases}\dfrac{-B_i^{\mathrm T}P_i\overline{x}_i}{\|B_i^{\mathrm T}P_i\overline{x}_i\|^2}\lambda_{\max}(P_i)\|\overline{x}_i\|\eta_i(x),\ \overline{x}_i^{\mathrm T}P_iB_i\neq 0,\\ 0, \quad \overline{x}_i^{\mathrm T}P_iB_i=0.\end{cases} \tag{18}$$

则系统(10)和(16)构成的闭环系统为

$$\begin{aligned}\dot{\overline{x}}_i=&\ \square_i\overline{x}_i+B_i(K_i\overline{x}_i+u_i^1(x)+u_i^2(x)+\\ &\Delta H_i(x))+f_i(x)+\Delta f_i(x),\\ &1\leqslant i\leqslant q.\end{aligned} \tag{19}$$

构造李雅普诺夫函数

$$V(\overline{x}_1,\overline{x}_2,\cdots,\overline{x}_q)=\sum_{i=1}^{q}\overline{x}_i^{\mathrm T}P_i\overline{x}_i.$$

由引理5, 存在函数阵$R_i(x)$, 使$f_i(x)=R_i(x)x, 1\leqslant i\leqslant q$. 由式(17)和式(18), 并参照定理2的证明过程不难完成定理3的证明.

4 非线性环链组合系统的镇定(Stabilization for the nonlinear circle- linked composite systems)

最后考虑下面由N个子系统组成的非线性环链组合系统

$$\begin{aligned}\dot{x}_i=&\ Ax_i+f_i(x_i)+\Delta f_i(x_i)+B(u_i+\\ &\Delta g_i(x_i))+\sum_{j=1,j\neq i}^{N}(H_{ij}(x_j)+\\ &\Delta H_{ij}(x_j)),\ i=1,2,\cdots,N.\end{aligned} \tag{20}$$

其中: $x_i\in\mathbb{R}^n, u_i\in\mathbb{R}^m, A\in\mathbb{R}^{n\times n}, B\in\mathbb{R}^{n\times m}$, $f_i(x_i)$ 为第i个环链子系统的非线性部分, $\Delta f_i(x_i)$和$\Delta g_i(x_i)$分别是第i个子系统的连续的非匹配和匹配不确定项, $\sum\limits_{j=1,j\neq i}^{N}H_{ij}(x_j)$ 是互联项, $\sum\limits_{j=1,j\neq i}^{N}\Delta H_{ij}(x_j)$是不确定互联项, $f_i(x_i)$ 和$H_{ij}(x_j)$分别是其定义域上的n维解析向量场, $f_i(0)=\Delta f_i(0)=H_{ij}(0)=\Delta g_i(0)=0, i,j=1,2,\cdots,N, i\neq j$.

下面给出几个假设:

假设 1 系统(20)第i个子系统的名义子系统是环链块解耦的, 且块指数为$(k_1,k_2,\cdots,k_q)$,$(m_1, m_2,\cdots,m_q)$.

于是存在非奇异变换$x_i=T\overline{x}_i$, 使得系统(20)变为

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}\dot{\overline{x}}_{i1}\\ \dot{\overline{x}}_{i2}\\ \cdots\\ \dot{\overline{x}}_{iq}\end{bmatrix}=&\begin{bmatrix}\square_1&&&\\&\square_2&&\\&&\ddots&\\&&&\square_q\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\overline{x}_{i1}\\ \overline{x}_{i2}\\ \cdots\\ \overline{x}_{iq}\end{bmatrix}+\\ &T^{-1}f_i(x_i)+\begin{bmatrix}\Delta f_{i1}(x_i)\\ \Delta f_{i2}(x_i)\\ \vdots\\ \Delta f_{iq}(x_i)\end{bmatrix}+\\ &\begin{bmatrix}B_1&&&\\&B_2&&\\&&\ddots&\\&&&B_q\end{bmatrix}\times(u_i+\begin{bmatrix}\Delta g_{i1}(x_i)\\ \Delta g_{i2}(x_i)\\ \vdots\\ \Delta g_{iq}(x_i)\end{bmatrix})+\\ &T^{-1}(\sum_{j=1,j\neq i}^{N}(H_{ij}(x_j)+\Delta H_{ij}(x_j))).\end{aligned} \tag{21}$$

其中:

$$\begin{aligned}&T^{-1}\Delta f_i(x_i)=(\Delta f_{il}(x_i))_{q\times 1},\\ &\Delta g_i(x_i)=(\Delta g_{il}(x_i))_{q\times 1},\\ &\overline{x}_i=T^{-1}x_i=(\overline{x}_{il})_{q\times 1},\ i=1,2,\cdots,N.\end{aligned}$$

假设 2 $\square_l, B_l$ 能控$(l=1,2,\cdots,q)$.

由假设2, 则存在反馈律K_l, 对任意正定阵$Q_l\in\mathbb{R}^{K_l\times K_l}$, Lyapunov方程(11)有正定解$P_l$.

记

$$\begin{aligned}&P=\operatorname{diag}(P_1,P_2,\cdots,P_q),\\ &Q=\operatorname{diag}(Q_1,Q_2,\cdots,Q_q),\\ &K=\operatorname{diag}(K_1,K_2,\cdots,K_q).\end{aligned}$$

假设 3

$$\begin{aligned}&\|\Delta f_{il}(x_i)\|\leqslant\eta_l(x_i),\ l=1,2,\cdots,q,\ i=1,2,\cdots,N,\\ &\|\Delta g_{il}(x_i)\|\leqslant\rho_l(x_i),\ l=1,2,\cdots,q,\ i=1,2,\cdots,N,\\ &\|\Delta H_{ij}(x_i)\|\leqslant\beta_{ij}\|x_j\|,\ i,j=1,2,\cdots,N,\ i\neq j.\end{aligned}$$

这里$\eta_l(\cdot),\rho_l(\cdot)$均为已知的连续函数, 且$\dfrac{\eta_l(x_i)}{\|B_l^{\mathrm T}P_l\overline{x}_{il}\|}$是可连续化函数. 当$\overline{x}_{il}^{\mathrm T}P_lB_l=0$时, $\eta_l(x_i)=0$.

由引理5知, 存在解析函数矩阵$M_i(x_i)$和$N_{ij}(x_j)$, 使得$f_i(x_i)=M_i(x_i)x_i, H_{ij}(x_j)=N_{ij}(x_j)x_j, 1\leqslant i,j\leqslant N, i\neq j$.

假设 4 矩阵$W^{\mathrm{T}}(x)+W(x)(W=(W_{ij})_{N\times N})$在区域$\Omega$上是正定的. 其中

$$W_{ij}=\begin{cases}\lambda_{\min}(Q)-2\lambda_M(PT^{-1}M_i(x_i)T),\ i=j,\\ -2(\lambda_M(PT^{-1}N_{ij}(x_j)T)+\lambda_M(PT^{-1})\|T\|\beta_{ij}),\\ \qquad i\neq j.\end{cases}$$

定理 4 若系统(20)满足假设1~4, 则系统(20)存在分散鲁棒镇定控制器.

证 设计控制器

$$u_i=KT^{-1}x_i+u_i^{\alpha}(x_i)+u_i^{\beta}(x_i),1\leqslant i\leqslant q,\tag{22}$$

$$u_i^{\alpha}(x_i)=\begin{bmatrix}u_{i1}^{\alpha}(x_i)\\u_{i2}^{\alpha}(x_i)\\\vdots\\u_{iq}^{\alpha}(x_i)\end{bmatrix},\ u_i^{\beta}(x_i)=\begin{bmatrix}u_{i1}^{\beta}(x_i)\\u_{i2}^{\beta}(x_i)\\\vdots\\u_{iq}^{\beta}(x_i)\end{bmatrix}.$$

其中:

$$u_{il}^{\alpha}(x_i)=\begin{cases}\dfrac{-B_l^{\mathrm{T}}P_l\overline{x}_{il}}{\|B_l^{\mathrm{T}}P_l\overline{x}_{il}\|}\rho_l(x),\ \overline{x}_{il}^{\mathrm{T}}P_lB_l\neq 0,\\ 0,\qquad \overline{x}_{il}^{\mathrm{T}}P_lB_l=0,\end{cases}\tag{23}$$

$$u_{il}^{\beta}(x_i)=\begin{cases}\dfrac{-B_l^{\mathrm{T}}P_l\overline{x}_{il}}{\|B_l^{\mathrm{T}}P_l\overline{x}_{il}\|^2}\|\overline{x}_{il}\|\lambda_{\max}(P_l)\eta_l(x_i)\|,\ \overline{x}_{il}^{\mathrm{T}}P_lB_l\neq 0,\\ 0,\qquad \overline{x}_{il}^{\mathrm{T}}P_lB_l=0,\end{cases}\tag{24}$$

$l=1,2,\cdots,q,i=1,2,\cdots,N.$

则系统(21)和(22)构成的闭环系统为

$$\begin{aligned}\dot{\overline{x}}_i=&\begin{bmatrix}\square_1&&&\\&\square_2&&\\&&\ddots&\\&&&\square_q\end{bmatrix}\overline{x}_i+T^{-1}f_i(x_i)+\\&T^{-1}\Delta f_i(x_i)+T^{-1}B[KT^{-1}x_i+u_i^{\alpha}(x_i)+\\&u_i^{\beta}(x_i)+\Delta g_i(x_i)]+\\&T^{-1}(\sum_{j=1,j\neq i}^{N}(H_{ij}(x_j)+\Delta H_{ij}(x_j))),\\&i=1,2,\cdots,N.\end{aligned}\tag{25}$$

对系统(25)构造李雅普诺夫函数

$$V=\sum_{i=1}^{N}\sum_{l=1}^{q}\overline{x}_{il}^{\mathrm{T}}P_l\overline{x}_{il}=\sum_{i=1}^{N}\overline{x}_i^{\mathrm{T}}P\overline{x}_i.$$

沿系统(25)的轨迹求导得

$$\begin{aligned}\dot V=&\sum_{i=1}^{N}\overline{x}_i^{\mathrm{T}}Q\overline{x}_i+\sum_{i=1}^{N}2\overline{x}_i{}^{\mathrm{T}}PT^{-1}f_i(x_i)+\\&\sum_{i=1}^{N}2\overline{x}_i^{\mathrm{T}}PT^{-1}\sum_{j=1,j\neq i}^{N}(H_{ij}(x_j)+\Delta H_{ij}(x_j))+\\&2\sum_{i=1}^{N}\sum_{l=1}^{q}\overline{x}_{il}^{\mathrm{T}}P_lB_l(u_i^{\alpha}(x_i)+\Delta g_{il}(x_i))+\\&2\sum_{i=1}^{N}\sum_{l=1}^{q}\overline{x}_{il}^{\mathrm{T}}P_l(B_l(u_i^{\beta}(x_i)+\Delta f_{il}(x_i))).\end{aligned}$$

由式(23)(24)、假设3,4和引理5, 类似定理2的证明过程可完成定理4的证明.

注 3 需要说明的是, 定理2,3的条件3)和定理4的条件4)的一个重要作用在于它可以估计相应系统的镇定域Ω的大小, 可以通过适当选择正定阵来增大镇定域.

注 4 本文的设计方法适用于不具有环链解耦性的一般非线性系统, 但没有本文这么好的分散性.

5 数例仿真(Example and simulation)

考虑非线性环链系统

$$\dot x=\begin{bmatrix}-2&-1&0&0\\2&2&0&0\\0&0&0&1\\0&0&-1&0\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}-1&0\\1&0\\0&0\\0&1\end{bmatrix}(u+\Delta H(x))+\frac{\sqrt{13}}{52}+\begin{bmatrix}\|x\|x_1\\0\\\|x\|x_1\\0\end{bmatrix}.\tag{26}$$

这里:

$$\Delta H(x)=\begin{bmatrix}\Delta H_1(x)\\\Delta H_2(x)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\|x\|\sin(x_1\theta_1)\\2\|x\|\cos(x_3^2\theta_2)\end{bmatrix},$$
$$(\theta_1,\theta_2)\in\Omega_*=\{(\theta_1,\theta_2):|\theta_1|<2,|\theta_2|<1\}.$$

由定理1后面求T的步骤, 求出$T=\begin{bmatrix}1&-1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$, 令$x=T\overline{x}$, $\overline{x}=\begin{bmatrix}\overline{x}_1\\\overline{x}_2\\\overline{x}_3\\\overline{x}_4\end{bmatrix}=T^{-1}x$. 则系统(26)变为

$$\begin{bmatrix}\dot{\overline{x}}_1\\\dot{\overline{x}}_2\\\dot{\overline{x}}_3\\\dot{\overline{x}}_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\2&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&-1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\overline{x}_1\\\overline{x}_2\\\overline{x}_3\\\overline{x}_4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0\\1&0\\0&0\\0&1\end{bmatrix}(\begin{bmatrix}u_1\\u_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\Delta H_1(x)\\\Delta H_2(x)\end{bmatrix})+\frac{\sqrt{13}}{52}\begin{bmatrix}\|x\|x_1\\0\\\|x\|x_3\\0\end{bmatrix},\tag{27}$$

$$\begin{bmatrix}\dot{\overline{x}}_1\\\dot{\overline{x}}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1\\2&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\overline{x}_1\\\overline{x}_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}(u_1+\Delta H_1(x))+\frac{\sqrt{13}}{52}\begin{bmatrix}\|x\|x_1\\0\end{bmatrix},\tag{28}$$

$$\begin{bmatrix}\dot{\overline{x}}_3\\ \dot{\overline{x}}_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\overline{x}_3\\ \overline{x}_4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}(u_2+\Delta H_2(x))+\frac{\sqrt{13}}{52}\begin{bmatrix}\|x\|x_3\\0\end{bmatrix}. \tag{29}$$

从而系统(26)是环链线性解耦. $\square_1=\begin{bmatrix}0&1\\2&0\end{bmatrix}$, $\square_2=\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}$, $B_1=B_2=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$. $(\square_1,B_1),(\square_2,B_2)$是能控的. 选取$K_1=[-4\ \ -2]$, $K_2=[-1\ \ -2]$, $Q_1=Q_2=4I_2$. 解Lyapunov方程(11)可得

$$P_1=P_2=\begin{bmatrix}5&1\\1&\frac{3}{2}\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}\|x\|x_1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\|x\|&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1&x_2&x_3&x_4\end{bmatrix}^{\mathrm{T}},$$

$$\begin{bmatrix}\|x\|^2x_3\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&\|x\|&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1&x_2&x_3&x_4\end{bmatrix}^{\mathrm{T}},$$

$$\|\Delta H_1(x)\|\leqslant\|x\|,\ \|\Delta H_2(x)\|\leqslant 2\|x\|,$$

$$W(x)=\begin{bmatrix}4-\|x\|&-\|x\|\\-0.7071\|x\|&4-0.7071\|x\|\end{bmatrix}.$$

取$\Omega=\{x,\|x\|<2\}$, 则$W^{\mathrm{T}}(x)+W(x)$ 在区域Ω上正定.

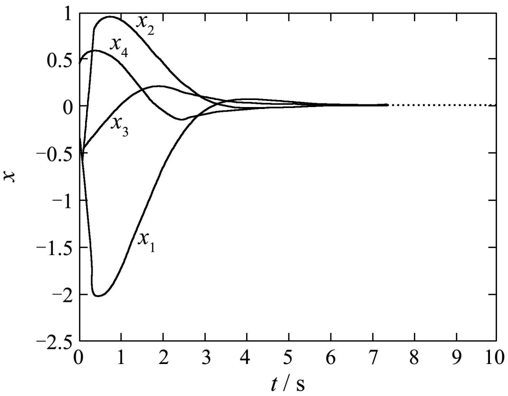

图 2　系统(26)的闭环系统状态响应

Fig. 2　State response of closed-loop system (26)

$$u_1(x)=\begin{cases}-\|x\|, & [\overline{x}_1\ \ \overline{x}_2]P_1B_1\geqslant 0,\\ \|x\|, & [\overline{x}_1\ \ \overline{x}_2]P_1B_1<0,\end{cases}$$

$$u_2(x)=\begin{cases}-2\|x\|, & [\overline{x}_3\ \ \overline{x}_4]P_2B_2\geqslant 0,\\ 2\|x\|, & [\overline{x}_3\ \ \overline{x}_4]P_2B_2<0,\end{cases}$$

则使系统(26)在区域Ω 上关于$x=0$ 渐近稳定的分散鲁棒控制器为

$$u_1=\begin{bmatrix}-4&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\overline{x}_1\\ \overline{x}_2\end{bmatrix}-\|x\|\mathrm{sgn}(\begin{bmatrix}\overline{x}_1\\ \overline{x}_2\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}P_1B_1),$$

$$u_2=\begin{bmatrix}-1&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\overline{x}_3\\ \overline{x}_4\end{bmatrix}-2\|x\|\mathrm{sgn}(\begin{bmatrix}\overline{x}_3\\ \overline{x}_4\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}P_2B_2).$$

取初值$x(0)=[0.1\ \ -1.2\ \ -0.5\ \ 0.3]$, $\theta_1=\theta_2=0.5$, 进行仿真, 得对应系统的状态响应曲线见(图2). 仿真结果表明, 本文的设计方法是有效的.

6　结论(Conclusion)

本文考虑了环链系统和一类不确定非线性环链系统. 利用李雅普诺夫稳定论和矩阵理论讨论了系统的镇定问题. 设计出了一种非线性分散鲁棒镇定控制器, 并举例仿真说明这种设计方法是可行的. 进一步要讨论的是: 构建和研究其他非线性环链系统的控制问题.

参考文献(References):

[1] YANG G H, ZHANG S Y. Stability for large-scale composite systems with similarity[J]. *Automatica*, 1995, 31(2): 337 – 340.

[2] 张嗣瀛. 复杂控制系统的对称性及相似结构[J]. 控制理论与应用, 1994, 11(2): 231 – 237.
(ZHANG Siying. Symmetry and similar structure for complex control systems[J]. *Control Theory & Applications*, 1994, 11(2): 231 – 237.)

[3] TANAKA R. Symmetric failures in symmetric control systems[J]. *Linear Algebra and its Applications*, 2000, 318(3): 145 – 72.

[4] LIN S, SUNI L K. Decentralized control for interconnected uncertain systems: extensions to higher-order uncertainties[J]. *Int J Control*, 1993, 57(6): 1453 – 1468.

[5] LI B, ZHENG D Z. Decentralized output stabilization of interconnected systems using output feedback[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1989, 34(1): 1297 – 1300.

[6] WANG R X, SANDEEP J, FARSHAD K. Decentralized adaptive output feedback design for large-scale nonlinear systems[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1997, 42(5): 729 – 735.

[7] 严星刚, 林辉, 戴冠中. 基于微分同胚的非线性系统解耦线性化[J]. 纯粹数学与应用数学, 1998, 14(3): 93 – 98.
(YAN Xinggang, LIN Hui, DAI Guanzhong. Linearization and simultaneous decoupling for nonlinear system based on diffeomorphism[J]. *Pure and Applied Mathematics*, 1998, 14(3): 93 – 98.)

[8] BANKS S P, ALJURANI S K. Lie algebra and stability of nonlinear systems[J]. *Int J Control*, 1994, 60(3): 315 – 329.

作者简介:

马跃超　(1963—), 男, 东北大学博士研究生, 研究领域为鲁棒控制、广义系统、复杂系统, E-mail: myc6363@126.com;

张庆灵　(1956—), 男, 东北大学教授, 博士生导师, 研究领域为广义系统、鲁棒控制;

童　松　(1963—), 女, 东北大学博士研究生, 研究领域为广义系统、鲁棒控制.