

基于LMI和IMC的动态反馈抗饱和和补偿设计

缪银龙, 王景成, 吴 风

(上海交通大学 自动化系, 上海 200240)

摘要: 提出了一种基于线性矩阵不等式(LMI) 和内模控制(IMC) 的动态反馈抗饱和和补偿器的设计方法. 为此首先简要地介绍了基于统一框架的抗饱和和补偿器设计方法, 然后针对原框架计算量庞大的问题, 利用模型精确的IMC结构中对对象和控制器同时稳定就能保证系统闭环稳定的特性对框架进行改造. 并进一步选取了具有 $\mathcal{L}_2$ 范数形式的性能优化指标, 通过整定控制器的方法来优化闭环系统的工作性能, 给出了LMI形式的结果. 最后给出了运用此方法设计补偿器的一个仿真实例.

关键词: 抗饱和; 线性矩阵不等式; 内模控制; 动态反馈

中图分类号: TP13 **文献标识码:** A

Anti-windup compensation design based on LMI and IMC

MIAO Yin-long, WANG Jing-cheng, WU Feng

(Department of Automation, Shanghai Jiao Tong University, Shanghai 200240, China)

Abstract: A dynamic feedback compensator synthesis method based on linear matrix inequalities (LMI) and internal model control (IMC) is proposed in this paper. Firstly, compensator synthesis method based on the unified framework is briefly introduced. Then, based on the stability of closed-loop system guaranteed by stable controller and plant in an IMC structure with precise model, a reformed framework is presented to reduce computational complexity. Thirdly, the performance of closed-loop system is optimized through the minimization of a weighted $\mathcal{L}_2$ gain over LMI. Finally, an example is given to illustrate the synthesis method.

Key words: anti-windup; linear matrix inequality(LMI); internal model control(IMC); dynamic feedback

1 引言(Introduction)

在控制系统的设计过程中, 饱和问题始终是一个无法回避的重要问题, 其中比较常见的是执行器饱和问题. 执行器饱和又可以分为两类: 输入受限和模型替代. 当有输入受限发生时, 会造成控制器输出 u 和被控对象输入 $\hat{u}$ 之间的不匹配, 控制器的输出 u 无法正常驱动被控对象, 且其内部状态 x 也会同时发生错误; 当有模型替代发生时, 控制器输出 u 的瞬间跳变会导致系统输出 y 的不连续, 从而使被控变量也发生跳变, 一些更为严重的后果也很有可能发生. 在控制领域中, 饱和问题一般被解释为控制器输出 u 和控制器状态 y 的不一致.

在实际的综合问题中, 总是将输入受限问题和模型替代问题放在一起研究, 这就形成了所谓的AWBT(anti-windup and bumpless transfer) 问题. 20世纪末, 瑞典著名学者Kothare^[1,2]提出了用于解决AWBT问题的统一框架, 并在此基础上运用LMI(线

性矩阵不等式), 通过预先定义的性能优化指标, 将饱和系统的稳定性问题和性能优化问题转化为凸集优化问题. 统一框架的提出, 在客观上统一了AWBT领域的各个研究分支. 借助MATLAB中自带的LMI优化工具, 控制系统补偿器的解可以方便的求得. 另外, 通过对性能指标的预先设定, 在保证控制系统稳定的同时, 可以很好地解决其性能退化问题. 1994年, Zheng等^[3]将内模控制技术引入到抗饱和控制的研究中, 提出了改进的IMC框架, 用以提高传统IMC在发生饱和时的工作性能. 在被控对象模型精确匹配的前提下, 通过引入IMC技术, 可以减少在解决稳定性问题时必须考虑的因素, 也就是说可以简化复杂的控制器求解问题. 但是, 从闭环传递函数很容易就可以看出, 引入IMC技术对控制系统的性能优化问题影响不大. 经过上面的分析, 可以看到, 将上述两种技术同时运用到抗饱和控制系统综合问题的分析中, 可以达到扬长避短的效果, 而这就

是本文所要说明的主要内容.

2 基于LMI和IMC的抗饱和和框架(Anti-windup framework based on LMI and IMC)

一般地,被控对象的状态空间描述为

$$P(s) = C_p (sI - A_p)^{-1} B_p + D_p = \left[\begin{array}{c|c} A_p & B_p \\ \hline C_p & D_p \end{array} \right].$$

同理,将控制器的状态空间描述为

$$K(s) = C_k (sI - A_k)^{-1} B_k + D_k = \left[\begin{array}{c|c} A_k & B_k \\ \hline C_k & D_k \end{array} \right].$$

本文的研究对象主要是存在控制器输入受限的饱和控制系统,控制器输入受限问题的数学描述为 $\phi = \text{diag}(\phi_i)$.

其中

$$\phi_i(u) = \begin{cases} \phi_{\max}, & u \geq u_{\max}, \\ ku, & u_{\min} \leq u \leq u_{\max}, \\ \phi_{\min}, & u \leq u_{\min}. \end{cases} \quad (1)$$

文献[1]中指出,几乎所有的LTI(linear time invariant)系统的AWBT问题补偿器都可以被描述为

$$\hat{K}(s) = \begin{bmatrix} N(s) & R(s) \end{bmatrix}. \quad (2)$$

其中:

$$N(s) = \left[\begin{array}{c|c} A - H_1 C & B - H_1 D \\ \hline H_2 C & H_2 D \end{array} \right], \quad (3)$$

$$R(s) = \left[\begin{array}{c|c} A - H_1 C & H_1 \\ \hline H_2 C & I - H_2 \end{array} \right].$$

不难看出, $N(s)$ 和 $R(s)$ 是线性控制器 $K(s)$ 的左互质因子:

$$K(s) = [I - R(s)]^{-1} N(s).$$

本文对文献[4]提到的统一框架作了相应的修改,这个统一框架如图1所示.

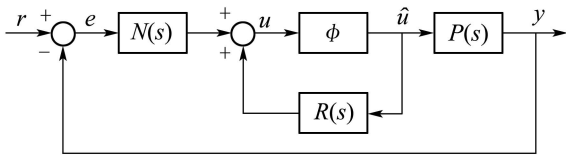


图1 文献[4]中的抗饱和统一控制框架

Fig. 1 Unified framework in literature[4]

其中: ϕ 为非线性环节, $\phi = I$ 时, 系统工作在线性状态下; $\phi \neq I$ 时, 系统进入饱和区, 导致 $u \neq \hat{u}$. 文献[4]在此框架基础上选取 $\sup_{\|w\|_2 \neq 0} \frac{\|u\|_2 - \sqrt{\gamma} \|\hat{u}\|_2}{\|w\|_2}$ 为性能优化指标, 同时运用LMI将饱和系统的稳定性问题转化为凸集优化问题, 得到的结果直观可

靠, 饱和性能也较以往有了明显的提高. 但是该文献只对补偿器 H_2 进行了设计(预先设定 $H_1 = 0$), 以此来减少补偿器设计过程中的计算量, 以达到优化的目的. 显然, 对于一个优化问题来讲这种补偿器的设计方法是不够的.

针对原框架计算量庞大的问题, 本文结合IMC的相关原理, 对原框架进行了改进, 得到图2所示的IMC抗饱和统一框架. 根据内模控制的相关原理, 当图2中的模型精确匹配时(即 $P(s) = \tilde{P}(s)$), 显然, 闭环系统的稳定性只与 $\Phi, R(s)$ 有关, 而与对象 $P(s)$ 无关; 如果选取和文献[4]一样的优化指标, 显然性能优化问题与 $P(s)$ 的结构也是无关的. 即整个补偿器的设计过程都与 $P(s)$ 的结构参数无关, 这将大大的减少文献[4]的计算量, 使本文很方便地就能在保证闭环性能和稳定性的基础上对补偿器 H_1 和 H_2 进行设计.

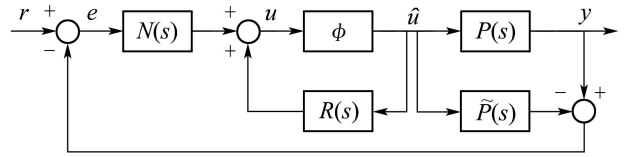


图2 IMC抗饱和统一控制框架

Fig. 2 Unified framework based on IMC

为了将饱和问题的结果转化为LMI形式, 也为了进一步分析, 将图2所示的IMC抗饱和统一框架等价转化为图3所示的结构. 其中 w 表示从周围环境进入系统的所有输入信号, 包括干扰, 传感器噪音等; z 表示系统的所有可控输出信号, 设计补偿器的目的就是在系统进入饱和区时, 保持 z 为一个较小的值.

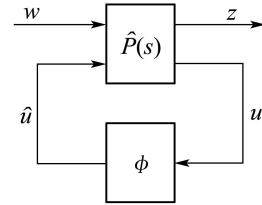


图3 AWBT问题的标准内部结构

Fig. 3 Interconnection for AWBT problem

假设 $w = r, z = e, x \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, 显然可以得到 $z = w$, 结合式(2)和(3), 得到图3所示的系统闭环系统的状态空间表达式为

$$\begin{cases} \dot{x} = (A - H_1 C) x + (B - H_1 D) w + H_1 \hat{u}, \\ u = H_2 C x + H_2 D w + (I - H_2) \hat{u}, \\ z = w. \end{cases} \quad (4)$$

3 稳定性条件(Stability)

由于这种抗饱和和控制器设计结构可以等价转化为LFT(linear fractional transformation)的形式, 在文献[5]中已经运用无源理论和多回路圆盘多变量

为LFT形式的系统稳定性提供了充要条件.

定义 1 设函数 $f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, 为无记忆的
非线性对角矩阵, 亦即 $f = \text{diag}(f_1, f_2, \dots, f_n)$, 且
 $f(0, t) = 0 (\forall t \geq 0)$, 如果 $K_2 - K_1 > 0$, 其中

$$\begin{cases} K_1 = \text{diag}(K_{11}, K_{12}, \dots, K_{1n}), \\ K_2 = \text{diag}(K_{21}, K_{22}, \dots, K_{2n}), \end{cases}$$

且 $K_{1i}x_i^2 \leq x_i f_i(x_i, t) \leq K_{2i}x_i^2$, $x_i \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$, $i = 1, 2, \dots, n$, 则认为 $f \in [K_1, K_2]$.

假设 $\tilde{\Delta}$ 为所有满足以下条件的无记忆时变非线性集合, 包括典型的输入非线性环节, 如输入饱和、死区、继电和模型切换等.

$$\tilde{\Delta} = \{\Delta: \mathbb{R}^{n_u} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n_u} | \Delta(0, t) = 0 (\forall t \geq 0), \\ \Delta = \text{diag}(\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_{n_u}), \Delta_i \in [0, 1]\}.$$

如图3的饱和环节满足上式的非线性环节, 即 $\phi \in \tilde{\Delta}$.

定理 1 (多回路圆盘定理) 如图3, 设 $\tilde{P}_{-11}(s) = \begin{bmatrix} A - H_1 C & H_1 \\ H_2 C & I - H_2 \end{bmatrix}$ 为从 $\hat{u}$ 到 u 的传递函数, 如果它满足

1) $\tilde{P}(s)$ 渐近稳定;

2) $\exists W = \text{diag}(W_1, W_2, \dots, W_{n_u}) \in \mathbb{R}^{n_u \times n_u}$, 如果同时闭环系统又满足 $W > 0$, $\delta > 0$, 而且 $W\tilde{P}_{-11}(j\omega) + \tilde{P}_{-11}^*(j\omega) \geq \delta I$, 则认为系统 $\mathcal{L}_2$ 闭环稳定.

以上条件等价于存在 $P = P^T > 0$, $W = \text{diag}(W_1, W_2, \dots, W_{n_u}) > 0$, $\delta > 0$, 满足

$$\begin{bmatrix} (A - H_1 C)^T P + P(A - H_1 C) & C^T H_2^T W + P H_1 \\ H_1^T P + W H_2 C & \delta I - W H_2 - H_2^T W \end{bmatrix} < 0. \quad (5)$$

从上式可知, 闭环系统的稳定性只与 $R(s)$ 有关, 而 $N(s), P(s)$ 的结构参数不会最终影响系统的稳定性优化过程.

证明请参看附录.

4 性能优化(Optimization)

在抗饱和和补偿器的设计过程中, 除了必须保证闭环系统的稳定性以外, 还需要考虑系统性能优化问题. 为了能和文献[4]的结果作比较, 本文也选取以控制器输出 u , 被控对象输入 $\hat{u}$ 以及系统输入信号 w 组成的性能优化指标:

$$\sup_{\|w\|_2 \neq 0} \frac{\|u\|_2 - \sqrt{\gamma} \|\hat{u}\|_2}{\|w\|_2} = \Gamma. \quad (6)$$

结合上述性能指标, 得到如下的性能优化定理:

定理 2 对如图3所示的系统状态空间表达式(4), 设 $0 \leq \gamma \leq 1$ 是一个给定的常数, 给定性能指标的上限为 $\Gamma \geq 0$, 若存在 $P = P^T > 0$, $W = \text{diag}(W_1, W_2, \dots, W_{n_u}) > 0$, $\delta > 0$, 满足下面的线性矩阵不等式:

$$\begin{bmatrix} (A - H_1 C)^T P + P(A - H_1 C) & P(B - H_1 D) \\ (B - H_1 D)^T P & -\Gamma W \\ H_1^T P + W H_2 C & W H_2 D \\ W H_2 C & W H_2 D \\ P H_1 + C^T H_2^T W & C^T H_2^T W \\ D^T H_2^T W & D^T H_2^T W \\ \delta I - W H_2 - H_2^T W - \gamma W & W - H_2^T W \\ W - W H_2 & -W \end{bmatrix} < 0,$$

则闭环系统 $\mathcal{L}_2$ 稳定, 并且同时满足了性能优化条件 $\frac{\|u\|_2 - \sqrt{\gamma} \|\hat{u}\|_2}{\|w\|_2} \leq \sqrt{\Gamma}$.

证明请参看附录.

可见, 即使是同时考虑了稳定性和性能优化的过程也只是限制在两个补偿器 $R(s)$ 和 $N(s)$ 范围内的设计, 而与系统的其余部分无关, 这种方法很大程度上简化了以前复杂的设计过程, 在保证系统的稳定性与性能得到优化的同时, 完成对抗饱和和补偿器 $R(s)$ 和 $N(s)$ 的设计. 这里 δ 是一个待定的参数, 用来保证所选取 Lyapunov 函数的正定性, 在运用 MATLAB 中的 LMI Toolbox 求解 H_1 及 H_2 的过程中, 包括 δ, W 等在内的其他未定参数将同时通过计算机在这个优化过程中被确定.

5 与几种相关控制方法之比较(Comparison with previous methods)

利用文献[3]中提供的几种 IMC 控制器和文献[4]的实例, 假设图2中, 通过建模得到的被控对象和控制器的结构参数为

$$P(s) = \frac{10}{100s + 1} \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}, \\ K(s) = (1 + \frac{1}{100s}) \begin{bmatrix} 2 & 2.5 \\ 1.5 & 2 \end{bmatrix}.$$

定义 $w = r$, $z = e$, 显然可以得到 $z = w$, 闭环系统的状态空间表达式为

$$\begin{cases} \dot{x} = (A - H_1 C)x + (B - H_1 D)w + H_1 \hat{u}, \\ u = H_2 Cx + H_2 Dw + (I - H_2)\hat{u}, \\ z = w. \end{cases}$$

通过选取 $\gamma = 0.99$, 根据本文所述方法, 选取性能优化指标 $\Gamma = 0.48$, 最终得到控制系统两个补偿器的参数:

$$H_1 = \begin{bmatrix} 0.1119 & -0.1396 \\ -0.1012 & 0.1345 \end{bmatrix},$$

$$H_2 = \begin{bmatrix} 0.0934 & -0.1006 \\ -0.0888 & 0.1285 \end{bmatrix}.$$

为了进一步比较的需要, 分别对与本文相关的各种框架进行仿真, 在 $t = 0$ 时, 向系统输入一个幅值为 $[0.63 \ 0.79]^T$ 的阶跃信号, 在饱和环节的幅值为 ± 2 , t 取 $0 \sim 10$ s 的情况下, 将本文的设计结果与几种相关方法得到的性能指标进行比较, 结果如表1.

表1 抗饱和控制方法性能指标之比较

Table 1 Performance comparison

方法	$\ \hat{u}\ _2 / \ u\ _2$ input1	$\ \hat{u}\ _2 / \ u\ _2$ input2	$\ z\ _2$ input1	$\ z\ _2$ input2
经典IMC	40/114	40/71	6.3	7.9
特殊IMC	40/307	40/205.6	6.3	7.9
文献[4]方法	42.62/44.66	33.29/33.29	6.31	7.91
本文方法	40/41.2	28.4/28.4	6.3	7.91

从表1可以看出, 经典IMC抗饱和法简单易行, 但是其应用较小, 闭环系统性能无法令人满意; 特殊IMC是通过选取 f 来对抗饱和控制器进行设计的, 但是由于 f 的选择是随机的, 并没有一套有效的解决饱和问题的方案; 文献[4]通过选取性能优化指标, 将系统的稳定性问题化为凸集优化问题, 系统性能有了较大提高; 本文结合IMC的相关原理, 通过选取与文献[4]一样的方法, 不仅达到了同时针对两个补偿器 H_1 和 H_2 进行设计的目的, 而且闭环系统的工作性能也有了较大地提高. 表1证明, 无论在补偿器的设计方面, 还是在闭环系统性能方面, 本文所述方法明显优于文中所述其他各种抗饱和和分析方法.

参考文献(References):

- [1] KOTHARE M V, CAMPO P J, MORARI M, et al. A unified framework for the study of anti-windup designs[J]. *Automatica*, 1994, 30(12): 1869 – 1883.
- [2] MULDER E F, KOTHARE M V, MORARI M. Multivariable anti-windup controller synthesis using linear matrix inequalities[J]. *Automatica*, 2001, 37(1): 1407 – 1416.
- [3] ZHENG A, KOTHARE M V, MORARI M. Anti-windup design for internal model control[J]. *Int J Control*, 1994, 60(5): 1015 – 1024.
- [4] 戴丹, 王景成. 基于线性矩阵不等式的动态反馈抗饱和和补偿设计[J]. 上海交通大学学报, 2004, 38(5): 787 – 790.
(DAI Dan, WANG Jingcheng. Anti-windup Compensation design using linear matrix inequality(LMI)-based on dynamic feedback[J]. *J of Shanghai Jiao Tong University*, 2004, 38(5): 787 – 790.)
- [5] KOTHARE M V, MORARI M. Multiplier theory for stability analysis of anti-windup control systems[J]. *Automatica*, 1999, 35(5): 917 – 928.

附录(Appendix):

定理1的证明 构造Lyapunov函数

$$V(x, \hat{u}) = x^T P x + \int_0^t \hat{u}^T(\tau) \delta \hat{u}(\tau) d\tau + 2 \sum_{i=1}^{n_u} W_i \int_0^t [\hat{u}_i(\tau) u_i(\tau) - \hat{u}_i(\tau) \hat{u}_i(\tau)] d\tau.$$

根据Lyapunov稳定性条件, 如图3所示的闭环系统的非线性环节 $\phi \in \bar{\Delta}$, $P = P^T > 0$, $W = \text{diag}(W_1, W_2, \dots, W_{n_u}) > 0$, $\delta > 0$, 若满足条件:

- 1) 当 $(x, \hat{u}) \neq 0$ 时, $V(x, \hat{u}) > 0$; 仅当 $\begin{pmatrix} x \\ \hat{u} \end{pmatrix} = 0$ 时, $V(x, \hat{u}) = 0$;
- 2) 当 $\begin{pmatrix} x \\ \hat{u} \end{pmatrix} \neq 0$ 时, $\frac{d}{dt} V(x, \hat{u}) < 0$.

可认为系统 $\mathcal{L}_2$ 稳定, 结合式(4)和 $\frac{d}{dt} V(x, \hat{u}) < 0$, 得到可以保证系统闭环稳定性的线性矩阵不等式(5).

定理2的证明 取闭环系统的性能指标为

$$\sup_{\|w\|_2 \neq 0} \frac{\|u\|_2 - \sqrt{\gamma} \|\hat{u}\|_2}{\|w\|_2} = \Gamma,$$

结合定理1的证明, 也构造一个Lyapunov函数

$$V(x, w, \hat{u}) = x^T P x + \int_0^t \hat{u}^T(\tau) \delta \hat{u}(\tau) d\tau + 2 \sum_{i=1}^{n_u} W_i \int_0^t [\hat{u}_i(\tau) u_i(\tau) - \hat{u}_i(\tau) \hat{u}_i(\tau)] d\tau + W[(\int_0^t u^T u d\tau - \gamma \int_0^t \hat{u}^T \hat{u} d\tau) - \Gamma t \int_0^t w^T w d\tau].$$

结合闭环系统的状态空间表达式 (4) 和 $\frac{d}{dt} V(x, w, \hat{u}) < 0$, 即

$$\frac{d}{dt} \{x^T P x + \int_0^t \hat{u}^T(\tau) \delta \hat{u}(\tau) d\tau + 2 \sum_{i=1}^{n_u} W_i \int_0^t [\hat{u}_i(\tau) u_i(\tau) - \hat{u}_i(\tau) \hat{u}_i(\tau)] d\tau\} + W[(u^T u - \gamma \hat{u}^T \hat{u}) - \Gamma w^T w] < 0.$$

可以推导出下面这个不等式:

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \\ \hat{u}(t) \end{bmatrix}^T \left\{ \begin{bmatrix} (A - H_1 C)^T P + P(A - H_1 C) & (B - H_1 D)^T P & H_1^T P + W H_2 C \\ P(B - H_1 D) & P H_1 + C^T H_2^T W & D^T H_2^T W \\ W H_2 D & \delta I - W H_2 - H_2^T W - \gamma W \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C^T H_2^T \\ D^T H_2^T \\ I - H_2^T \end{bmatrix} W \begin{bmatrix} C^T H_2^T \\ D^T H_2^T \\ I - H_2^T \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \\ \hat{u}(t) \end{bmatrix} < 0.$$

其中: $P = P^T > 0$, $W = \text{diag}(W_1, W_2, \dots, W_{n_u}) > 0$, $\delta > 0$, 性能优化指标 $\Gamma > 0$, 根据Schur补性质, 如果列向量 $[x(t) \ w(t) \ \hat{u}(t)]^T \neq 0$, 上式等价于 (下转第311页)

[5] 李果, 余达太. 电动车制动防抱死控制系统[J]. 控制理论与应用, 2005, 22(1): 134 – 138.

(LI Guo, YU Dadai. Antilock brake fuzzy controller of electric vehicles[J]. *Control Theory & Applications*, 2005, 22(1): 134 – 138.)

作者简介:

李 果 (1963—), 男, 教授, 1996年北京理工大学博士后出站, 主要研究领域为机器人控制与规划、智能控制、工业过程控制和鲁

棒自适应控制等, E-mail: guo6396@sina.com

胡剑飞 (1978—), 男, 硕士生, 主要研究领域为智能控制、工业过程控制和鲁棒自适应控制等, E-mail: jianfei@sina.com;

余达太 (1946—), 男, 教授, 博士生导师, 日本九州工业大学研究生院毕业, 主要研究领域为控制理论、工业自动化及智能控制, E-mail: datai@sina.com.

(上接第302页)

作者简介:

杨 政 (1978—), 男, 西北工业大学应用数学系博士研究生, 主要研究非线性时间序列与动态数据处理, E-mail: yzeagle@yahoo.com.cn;

田 铮 (1948—), 女, 教授, 博士生导师, 主要从事非线性时间

序列分析、多尺度非线性随机模型、计算机视觉与图像处理等研究, E-mail: zhtian@nwpu.edu.cn;

党怀义 (1967—), 男, 中国飞行试验研究院测试技术研究所研究员, 主要从事飞行试验数据处理技术、飞行试验数据库技术及相关的应用软件技术研究, E-mail: hydang@sohu.com.

(上接第306页)

$$\begin{bmatrix} (A - H_1 C)^T P + P(A - H_1 C) & P(B - H_1 D) & P H_1 + C^T H_2^T W & C^T H_2^T W \\ (B - H_1 D)^T P & -\Gamma W & D^T H_2^T W & D^T H_2^T W \\ H_1^T P + W H_2 C & W H_2 D \delta I - W H_2 - H_2^T W - \gamma W & W - H_2^T W & \\ W H_2 C & W H_2 D W - W H_2 & -W & \end{bmatrix} < 0.$$

这就是定理2的结果.

作者简介:

缪银龙 (1979—), 男, 硕士研究生, 研究方向为鲁棒控制;

王景成 (1972—), 男, 上海交通大学自动化系教授, 研究方向为实时系统控制与仿真, E-mail: jcwang@sjtu.edu.cn;

吴 风 (1983—), 男, 硕士研究生, 研究方向为抗饱和控制.