第 24 卷第 2 期
2007 年 04 月

控 制 理 论 与 应 用
Control Theory & Applications

Vol. 24 No. 2
Apr. 2007

文章编号：1000−8152(2007)02−0322−07

# 不确定多通道奇异大系统分散鲁棒$H_\infty$控制

陈 宁[1]，桂卫华[1]，IKEDA Masao[2]

(1. 中南大学 信息科学与工程学院, 湖南 长沙 410083; 2. 大阪大学 工学研究科, 日本 大阪 吹田 565-0871)

**摘要**: 研究不确定多通道奇异系统的鲁棒分散$H_\infty$ 控制问题. 假定不确定性是时不变、范数有界, 且存在于系统和控制输入矩阵中. 主要考虑分散$H_\infty$输出反馈控制问题. 推导出了使不确定多通道奇异系统能鲁棒稳定且满足一定的性能指标的充分必要条件, 没有等式约束的非线性矩阵不等式条件. 采用两步同伦法迭代来求解非线性矩阵不等式(NMI). 首先, 通过逐步对控制器的系数矩阵加上结构限制, 计算出当确定性不存在时的标称系统的分散$H_\infty$控制器. 然后, 逐步改变标称系统分散控制器的系数, 计算出不确定性参数存在时的分散鲁棒控制器. 在每一阶段, 每一次迭代过程中, 通过交替固定NMI的一个变量, 使NMI转变为线性矩阵不等式(LMI). 数值例子说明了本文提出的方法的有效性.

**关键词**: 分散$H_\infty$控制; 奇异系统; 参数不确定性; 同伦法; 非线性矩阵不等式; LMI

**中图分类号**: TP13　　**文献标识码**: A

# Robust decentralized H-infinity control of uncertain multi-channel descriptor systems

CHEN Ning[1], GUI Wei-hua[1], IKEDA Masao[2]

(1. School of Information Science and Engineering, Central South University, Changsha Hunan 410083, China;
2. Graduate School of Engineering, Osaka University, Suita Osaka 565-0871, Japan)

**Abstract:** The robust decentralized H-infinity dynamic output feedback control problem for multi-channel descriptor systems is addressed in this paper. The uncertainties are assumed to be time-invariant, norm-bounded, and existing in both the system and control input matrices. Firstly, a necessary and sufficient condition for an uncertain multi-channel descriptor system to be robustly stabilizable with a specified disturbance attenuation level is derived in terms of a strict nonlinear matrix inequality (NMI). A two-stage homotopy method is then employed to solve the NMI iteratively. The decentralized H-infinity controller for the nominal descriptor system is computed by gradually imposing block-diagonal constraints on the coefficient matrices of the controller. Then, the decentralized controller is gradually modified to cope with the uncertainties. On each stage, groups of variables are alternately fixed at the iterations to reduce the NMI to linear matrix inequalities (LMIs). Finally, a given example shows the efficiency of this method.

**Key words:** decentralized H-infinity control; descriptor systems; parametric uncertainty; homotopy method; nonlinear matrix inequality; LMI

## 1 引言 (Introduction)

由于奇异系统广泛地应用于各种实际工程中, 因此, 奇异系统的控制已经得到人们广泛的关注[1,2]. 奇异系统又称为广义系统, 广义状态空间系统, 微分代数系统等. 对奇异系统进行集中控制和分散控制的研究均已取得了许多成果. 在集中控制中, Masubuchi等应用LMI方法, 给出了奇异系统稳定和$H_\infty$控制器存在条件[3]. 但由于所得到的LMI条件中, 包含一个等式约束, 导致了求解的困难. 为了克服这个困难, Uezato和Ikeda提出了奇异系统稳定、镇定和$H_\infty$控制的严格LMI条件[4].

在分散控制中, Wang 和Soh 用分散输出反馈研究了脉冲模消除问题, 并给出了完全脉冲模消除的充分必要条件[5]. Chang和Davison 研究了分散稳定化和伺服问题, 通过把奇异系统转换成等价真状态空间模型构造了一种设计分散控制器的方法[6]. Ikeda等研究了关联奇异系统的分散稳定化控制器的集中设计方法[7]. 将关联奇异系统的分散控制问题归结为一种双线性矩阵不等式有解的问题, 并提出了一种基于同伦法求解此双线性矩阵不等式的设

收稿日期: 2005−08−08; 收修改稿日期: 2006−04−18.
基金项目: 国家自然科学基金重点资助项目(60634020); 中国博士后科学基金资助项目(20060390883); 高校博士点专项科研基金资助项目(20050533028).

计方法.

最近, 沃松林和邹云应用LMI方法研究了不确定奇异大系统的分散鲁棒镇定控制问题, 系统中不确定项具有数值界, 且不满足匹配条件, 得到了存在分散鲁棒控制器存在的充分条件[8].

本文针对不确定性多通道奇异系统, 研究其分散鲁棒$\mathrm{H}_\infty$动态输出反馈控制器的设计问题. 假定不确定性是时不变、范数有界, 且存在于系统和控制输入矩阵中. 根据严格非线性矩阵不等式条件, 推导出了使不确定多通道奇异系统能鲁棒镇定, 且满足一定的$\mathrm{H}_\infty$性能指标的充分必要条件. 采用两步同伦法[9,10]迭代来求解该非线性矩阵不等式. 首先, 通过逐步对控制器的系数矩阵加上结构限制, 计算出当确定性不存在时的标称系统的分散$\mathrm{H}_\infty$控制器. 然后, 逐步改变标称系统分散控制器的系数, 计算出不确定性参数存在时的分散鲁棒控制器. 在每一阶段, 每一次迭代过程中, 通过交替固定NMI的一个变量, 使NMI转变为LMI. 仿真结果表明了此方法的有效性.

## 2 问题的描述 (Problem description)

考虑具有$N$个通道的不确定性奇异系统

$$\begin{cases} E\dot{x} = (A+\delta A)x + B_1 w + \sum\limits_{i=1}^{N}(B_{2i}+\delta B_{2i})u_i, \\ z = C_1 x,\ y_i = C_{2i}x,\ i=1,2,\cdots,N. \end{cases} \tag{1}$$

其中: $x\in\mathbb{R}^n$是描述变量(descriptor variable), $w\in\mathbb{R}^q$是扰动输入, $z\in\mathbb{R}^p$是控制输出, $u_i\in\mathbb{R}^{m_i}$和$y_i\in\mathbb{R}^{l_i}$分别是第$i(i=1,2,\cdots,N)$通道的控制输入和测量输出; 矩阵$E$和$A$均为方阵, $E$可能是奇异的, 且rank $E=r\leqslant n$; 矩阵$B_1, B_{2i}, C_1$和$C_{2i}$是具有合适维数的常数矩阵, 且$\delta A$ 和$\delta B_{2i}$分别表示系统和控制输入矩阵中的不确定性. 假定不确定性满足

$$[\delta A\ \ \delta B_{21}\cdots\delta B_{2N}] = L\varDelta[F_1\ \ F_{21}\cdots F_{2N}]. \tag{2}$$

其中$L, F_1, F_{21},\cdots,F_{2N}$为已知常数矩阵, 且$\varDelta$是未知常数矩阵, 且满足

$$\varDelta^{\mathrm T}\varDelta\leqslant I. \tag{3}$$

**注 1**　系统(1)中笔者没有考虑从$w$和$u$到$z$和$y$的直接转换矩阵. 根据文献[3], 含有从$w$和$u$到$z$和$y$的直接转换矩阵的奇异系统通过增广描述变量, 得到系统(1)的形式. 因此, 系统(1)是奇异系统的一种一般表达形式.

引入分散输出反馈控制器

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_i = \hat{A}_i\hat{x}_i + \hat{B}_i y_i \\ u_i = \hat{C}_i\hat{x}_i + \hat{D}_i y_i \end{cases},\ i=1,2,\cdots,N. \tag{4}$$

其中: $\hat{x}_i\in R^{\hat{n}_i}$是第$i$个局部控制器的状态, 且$\hat{n}_i$具有某一固定的维数; $\hat{A}_i, \hat{B}_i, \hat{C}_i, \hat{D}_i, i=1,2,\cdots,N$是需要确定的常数矩阵.

为了得到闭环系统的表示形式, 定义如下系统(1)中的系数矩阵

$$\begin{cases} B_2 = [B_{21}\ B_{22}\ \cdots B_{2N}], \\ C_2 = [C_{21}^{\mathrm T}\ C_{22}^{\mathrm T}\ \cdots\ C_{2N}^{\mathrm T}]^{\mathrm T}, \\ \delta B_2 = [\delta B_{21}\ \delta B_{22}\ \cdots\delta B_{2N}], \\ F_2 = [F_{21}\ F_{22}\cdots F_{2N}], \end{cases} \tag{5}$$

并定义控制器(4)的状态和系数矩阵

$$\hat{x} = [\hat{x}_1^{\mathrm T}\ \ \hat{x}_2^{\mathrm T}\ \ \cdots\ \ \hat{x}_N^{\mathrm T}]^{\mathrm T},$$

$$\begin{cases} \hat{A}_D = \mathrm{diag}(\hat{A}_1,\hat{A}_2,\cdots,\hat{A}_N), \\ \hat{B}_D = \mathrm{diag}(\hat{B}_1,\hat{B}_2,\cdots,\hat{B}_N), \\ \hat{C}_D = \mathrm{diag}(\hat{C}_1,\hat{C}_2,\cdots,\hat{C}_N), \\ \hat{D}_D = \mathrm{diag}(\hat{D}_1,\hat{D}_2,\cdots,\hat{D}_N), \end{cases} \tag{6}$$

$$G_D = \begin{bmatrix} \hat{A}_D & \hat{B}_D \\ \hat{C}_D & \hat{D}_D \end{bmatrix}, \tag{7}$$

并引入如下描述:

$$\begin{aligned}
&\tilde{x} = \left[x^{\mathrm T}\quad \hat{x}^{\mathrm T}\right]^{\mathrm T}, \\
&\tilde{E} = \begin{bmatrix} E & 0_{n\times\hat{n}} \\ 0_{\hat{n}\times n} & I_{\hat{n}} \end{bmatrix}, \tilde{A} = \begin{bmatrix} A & 0_{n\times\hat{n}} \\ 0_{\hat{n}\times n} & 0_{\hat{n}\times\hat{n}} \end{bmatrix}, \\
&\tilde{B}_1 = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0_{\hat{n}\times q} \end{bmatrix}, \tilde{B}_2 = \begin{bmatrix} 0_{n\times\hat{n}} & B_2 \\ I_{\hat{n}} & 0_{\hat{n}\times m} \end{bmatrix}, \\
&\tilde{C}_1 = [C_1\ \ 0_{p\times\hat{n}}], \tilde{C}_2 = \begin{bmatrix} 0_{n\times\hat{n}} & I_{\hat{n}} \\ C_2 & 0_{l\times\hat{n}} \end{bmatrix}, \\
&\delta\tilde{A} = \begin{bmatrix} \delta A & 0_{n\times\hat{n}} \\ 0_{\hat{n}\times n} & 0_{\hat{n}\times\hat{n}} \end{bmatrix}, \delta\tilde{B}_2 = \begin{bmatrix} 0_{n\times\hat{n}} & \delta B_2 \\ 0_{\hat{n}\times\hat{n}} & 0_{\hat{n}\times m} \end{bmatrix}, \\
&\tilde{L} = \begin{bmatrix} L \\ 0 \end{bmatrix}, \tilde{F}_1 = [F_1\ \ 0], \tilde{F}_2 = [0\ \ F_2].
\end{aligned} \tag{8}$$

其中: $\hat{n} = \sum\limits_{i=1}^{N}\hat{n}_i, m = \sum\limits_{i=1}^{N}m_i, l = \sum\limits_{i=1}^{N}l_i$, 因此闭环系统可写为

$$\begin{cases} \tilde{E}\dot{\tilde{x}} = [\tilde{A}+\delta\tilde{A}+(\tilde{B}_2+\delta\tilde{B}_2)G_D\tilde{C}_2]\tilde{x}+\tilde{B}_1 w = \\ [\tilde{A}+\tilde{L}\varDelta\tilde{F}_1+(\tilde{B}_2+\tilde{L}\varDelta\tilde{F}_2)G_D\tilde{C}_2]\tilde{x}+\tilde{B}_1 w, \\ z = \tilde{C}_1\tilde{x}. \end{cases} \tag{9}$$

分散鲁棒$\mathrm{H}_\infty$ 控制问题: 针对不确定多通道奇异系统(1), 给定$\gamma>0$, 设计一个具有式(4)形式的分散输出反馈控制器, 使闭环系统稳定, 且满足从扰动输入$w$到被控输出$z$ 的闭环传递函数的$\mathrm{H}_\infty$范数小于$\gamma$.

这里一个奇异系统稳定是指该系统正则, 且仅存在衰减指数模和静态模[4].

## 3 分散鲁棒$H_\infty$控制器存在的条件 (Existence condition for robust decentralized $H_\infty$ conroller)

为了求解分散控制问题, 首先引入下述引理. 令$V,U\in\mathbb{R}^{n\times(n-r)}$为列满秩的矩阵, 且分别包含$E$和$E^{\mathrm T}$的零基底. 将$E$分解为$E=E_LE_R^{\mathrm T}$, 其中$E_L$和$E_R$均为列满秩.

**引理 1**[4] 考虑如下线性奇异系统

$$\begin{cases}E\dot x=Ax+Bw,\\ z=Cx.\end{cases}\tag{10}$$

其中: $x\in\mathbb{R}^n$是描述变量, $w\in\mathbb{R}^r$是输入, $z\in\mathbb{R}^p$是输出, 且$E,A,B,C$是具有合适维数的常数矩阵. 则对任意给定的常数$\gamma>0$, 系统(10)是稳定的且满足

$$\|C(sE-A)^{-1}B\|_\infty<\gamma\tag{11}$$

的充要条件是存在一个对称矩阵$P$和任意矩阵$S$满足如下LMIs:

$$\begin{bmatrix}\phi_{11}&\phi_{21}^{\mathrm T}\\ \phi_{21}&-\gamma^2I\end{bmatrix}<0,\ E_L^{\mathrm T}PE_L>0.\tag{12}$$

其中:

$$\phi_{11}=(PE+USV^{\mathrm T})^{\mathrm T}A+A^{\mathrm T}(PE+USV^{\mathrm T})+C^{\mathrm T}C,$$
$$\phi_{21}=B^{\mathrm T}(PE+USV^{\mathrm T}).$$

**引理 2**[11] 设$\varXi,E$和$F$是具有合适维数的矩阵, 且$\varXi$是对称的, 对所有$\varDelta$满足$\varDelta^{\mathrm T}\varDelta\leqslant I$. 那么

$$\varXi+E\varDelta F+F^{\mathrm T}\varDelta^{\mathrm T}E^{\mathrm T}<0,\tag{13}$$

当且仅当存在标量$\varepsilon>0$, 使得下式成立, 即

$$\varXi+\varepsilon EE^{\mathrm T}+\varepsilon^{-1}F^{\mathrm T}F<0.\tag{14}$$

根据以上两个引理, 我们可以得到如下分散$H_\infty$鲁棒控制器的存在的充要条件.

**定理 1** 给定一个常数$\gamma>0$, 不确定性系统(1)在具有$\widehat n_i$维的分散控制器(4)作用下, 是鲁棒稳定的且具有$H_\infty$性能指标$\gamma$的充要条件是: 存在一个具有式(7)形式的矩阵$G_D$, 一个正定矩阵$\widetilde P\in\mathbb{R}^{(n+\widehat n)\times(n+\widehat n)}$, 矩阵$\widetilde S\in\mathbb{R}^{(n-r)\times(n-r)}$和一个常数$\varepsilon>0$, 满足非线性矩阵不等式

$$\begin{cases}J(G_D,\widetilde P,\widetilde S,\varepsilon)=\begin{bmatrix}\widetilde\phi_{10}+\widetilde\phi_u&\widetilde\phi_{21}^{\mathrm T}\\ \widetilde\phi_{21}&-\gamma^2I\end{bmatrix}<0,\\ \widetilde E_L^{\mathrm T}\widetilde P\widetilde E_L>0.\end{cases}\tag{15}$$

其中:

$$\widetilde\phi_{10}=(\widetilde P\widetilde E+\widetilde U\widetilde S\widetilde V^{\mathrm T})^{\mathrm T}(\widetilde A+\widetilde B_2G_D\widetilde C_2)+(\widetilde A+\widetilde B_2G_D\widetilde C_2)^{\mathrm T}(\widetilde P\widetilde E+\widetilde U\widetilde S\widetilde V^{\mathrm T})+\widetilde C_1^{\mathrm T}\widetilde C_1,$$
$$\widetilde\phi_u=\varepsilon(\widetilde P\widetilde E+\widetilde U\widetilde S\widetilde V^{\mathrm T})\widetilde L\widetilde L^{\mathrm T}(\widetilde P\widetilde E+\widetilde U\widetilde S\widetilde V^{\mathrm T})^{\mathrm T}+\varepsilon^{-1}(\widetilde F_1+\widetilde F_2G_D\widetilde C_2)^{\mathrm T}(\widetilde F_1+\widetilde F_2G_D\widetilde C_2),$$
$$\widetilde\phi_{21}=\widetilde B_1^{\mathrm T}(\widetilde P\widetilde E+\widetilde U\widetilde S\widetilde V^{\mathrm T}),$$
$$\widetilde V=\begin{bmatrix}V\\0\end{bmatrix},\widetilde U=\begin{bmatrix}U\\0\end{bmatrix},\widetilde E_L=\begin{bmatrix}E_L&0\\0&I_{\widehat n}\end{bmatrix}.\tag{16}$$

**证** 根据引理1, 由不确定多通道奇异系统(1)和分散输出反馈控制器(4)构成的闭环系统(9)是鲁棒稳定的且具有$H_\infty$性能指标$\gamma$的充要条件是: 存在一个具有式(7)形式的矩阵$G_D$, 一个正定矩阵$\widetilde P$, 矩阵$\widetilde S$和一个常数$\varepsilon>0$, 满足

$$\begin{bmatrix}\widetilde\phi_{10}&\widetilde\phi_{21}^{\mathrm T}\\ \widetilde\phi_{21}&-\gamma^2I\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}(\widetilde P\widetilde E+\widetilde U\widetilde S\widetilde V^{\mathrm T})\widetilde L\\0\end{bmatrix}\varDelta\begin{bmatrix}\widetilde F_1+\widetilde F_2G_D\widetilde C_2\\0\end{bmatrix}^{\mathrm T}+\{\begin{bmatrix}(\widetilde P\widetilde E+\widetilde U\widetilde S\widetilde V^{\mathrm T})\widetilde L\\0\end{bmatrix}\varDelta\begin{bmatrix}(\widetilde F_1+\widetilde F_2G_D\widetilde C_2)\\0\end{bmatrix}^{\mathrm T}\}^{\mathrm T}<0,$$
$$\widetilde E_L^{\mathrm T}\widetilde P\widetilde E_L>0.\tag{17}$$

根据引理2, 不等式(17)成立的充要条件是：对任意$\varDelta$满足式(3), 当且仅当存在一个矩阵$G_D$, 一个正定矩阵$\widetilde P$, 矩阵$\widetilde S$和一个常数$\varepsilon>0$, 不等式(15)成立. 证毕.

**注 2** 到目前为止, 笔者已经考虑了系统矩阵$A$和控制输入矩阵$B_2$中的不确定性. 同样也能处理系统(1)的对偶形式, 即不确定性存在于系统矩阵$A$和测量矩阵$C_2$中的情形.

$$E\dot x=(A+\delta A)x+B_1w+\sum_{i=1}^N B_{2i}u_i,$$
$$z=C_1x,$$
$$y_i=(C_{2i}+\delta C_{2i})x,\ \ i=1,2,\cdots,N,\tag{18}$$
$$[\delta A\ \delta C_{21}\ \cdots\ \delta C_{2N}]^{\mathrm T}=[L_1\ L_{21}\ \cdots\ L_{2N}]^{\mathrm T}\varDelta F.\tag{19}$$

其中$L_1,L_{21},\cdots,L_{2N},F$为已知常数矩阵.

## 4 求解算法 (Computation algorithm)

分散鲁棒$H_\infty$控制器的存在条件(15)是一个关于变量$G_D$,$\widetilde P$,$\widetilde S$和$\varepsilon$的NMI. 为了求解这个问题, 采用同伦法. 首先, 将式(15)的左边部分$J(G_D,\widetilde P,\widetilde S,\varepsilon)$分解成两个部分: 一部分为$J_0(G_D,\widetilde P,\widetilde S)$, 由标称系统的系数矩阵组成, 另一部分$J_u(G_D,\widetilde P,\widetilde S,\varepsilon)$, 由扰动项组成, 即

$$J(G_D,\widetilde P,\widetilde S,\varepsilon)=J_0(G_D,\widetilde P,\widetilde S)+J_u(G_D,\widetilde P,\widetilde S,\varepsilon).\tag{20}$$

其中:

$$J_0(G_D,\widetilde P,\widetilde S)=\begin{bmatrix}\widetilde\phi_{10}&\widetilde\phi_{21}^{\mathrm T}\\ \widetilde\phi_{21}&-\gamma^2I\end{bmatrix},\tag{21}$$

$$J_u(G_D,\widetilde P,\widetilde S,\varepsilon)=\begin{bmatrix}\widetilde\phi_u&0\\0&0\end{bmatrix}.\tag{22}$$

下面给出采用两步同伦法求解NMI(15)的迭代算法. 首先考虑标称系统的分散$H_\infty$控制器的求解

方法. 在这种情形下, 由于不存在不确定性项, NMI (15) 变为一个BMI$J_0(G_D,\widetilde{P},\widetilde{S})<0$, $\widetilde{E}_L^{\mathrm{T}}\widetilde{P}\widetilde{E}_L>0$. 为了求解这个问题, 可引入一个从0到1变化的实数$\lambda$, 定义如下同伦函数

$$H_0(G_D,\widetilde{P},\widetilde{S},\lambda)=J_0((1-\lambda)G_F+\lambda G_D,\widetilde{P},\widetilde{S}).\quad(23)$$

其中

$$G_F=\begin{bmatrix}A_F & B_F\\ C_F & D_F\end{bmatrix}.\quad(24)$$

其中$A_F,B_F,C_F,D_F$为任意满足扰动水平$\gamma$ 且与分散控制器具有相同维数的集中$\mathrm{H}_\infty$控制器的系数矩阵. 由式(23)定义的矩阵函数$H_0(G_D,\widetilde{P},\widetilde{S},\lambda)$ 包含了一个在集中控制器上逐渐加上块对角约束的分散控制器. 很明显,

$$H_0(G_D,\widetilde{P},\widetilde{S},\lambda)=\begin{cases}J_0(G_F,\widetilde{P},\widetilde{S}),\lambda=0,\\ J_0(G_D,\widetilde{P},\widetilde{S}),\lambda=1.\end{cases}\quad(25)$$

寻找NMI (15)的可行解的问题就变为求解如下一族参数化问题:

$$H_0(G_D,\widetilde{P},\widetilde{S},\lambda)<0,\widetilde{E}_L^{\mathrm{T}}\widetilde{P}\widetilde{E}_L>0,\lambda\in[0,1].\quad(26)$$

首先求解当$\lambda=0$时, 式(26)的解, 即作为求解分散$\mathrm{H}_\infty$ 控制器所需要初始条件, 集中$\mathrm{H}_\infty$ 控制器的解. 原则上任意的求解集中$\mathrm{H}_\infty$ 控制器的方法均可以使用. 这儿笔者建议使用文[4]中提出的奇异系统$\mathrm{H}_\infty$ 控制器的求解方法. 先用奇异的方式计算集中$\mathrm{H}_\infty$控制器, 然后将其转换成状态方程的形式. 用状态空间表示的集中控制器的维数是$r$.

如果分散控制器(4)的维数$\widehat{n}$等于$r$, 可以应用同伦法来求解控制器[12]. 即以离散方式使$\lambda$从0增大到1, 并在每一个$\lambda$值上, 通过固定$G_D$或$(\widetilde{P},\widetilde{S})$来计算可行性问题(26)的解. 此时, 矩阵函数$H_0(G_D,\widetilde{P},\widetilde{S},\lambda)$ 变为LMI. 若获得$\lambda=1$可行性问题(26)的解, 即为标称系统的分散$\mathrm{H}_\infty$ 控制器.

如果分散控制器(4)的维数$\widehat{n}$小于$r$, 可以使用矩阵增广技术来获得较低维数的分散控制器. 对分散控制器$G_D$ 进行增广

$$\widehat{G}_D=\left[\begin{array}{cc|c}\widehat{A}_D & 0_{\widehat{n}\times(r-\widehat{n})} & \widehat{B}_D\\ * & -I_{r-\widehat{n}} & **\\ \hline \widehat{C}_D & 0_{m\times(r-\widehat{n})} & \widehat{D}_D\end{array}\right].\quad(27)$$

其中符号$*,**$ 代表任意具有合适维数的子矩阵, 且$\widehat{A}_D,\widehat{B}_D,\widehat{C}_D,\widehat{D}_D$ 如式(6)定义. 注意到如果抽出式(27)中的可控部分和可观部分的话, 由式(27)定义的$r$维控制器$\widehat{G}_D$ 等价于由(7) 式定义的$\widehat{n}$维控制器$G_D$. 因此, 用$\widehat{G}_D$ 替换矩阵函数(23)中的$G_D$, 可用同伦法求解可行性问题(26).

如果分散控制器(4)的维数$\widehat{n}$大于$r$, 可以对集中控制器$G_F$进行增广

$$\widehat{G}_F=\left[\begin{array}{cc|c}A_F & 0_{\widehat{n}\times(\widehat{n}-r)} & B_F\\ * & -I_{\widehat{n}-r} & **\\ \hline C_F & 0_{m\times(\widehat{n}-r)} & D_F\end{array}\right].\quad(28)$$

其中$A_F$,$B_F$,$C_F$ 和$D_F$由式(24)定义. 注意到如果抽出式(28)中的可控部分和可观部分的话, 由式(28)定义的$\widehat{n}$维控制器$\widehat{G}_F$ 等价于由式(7)定义的$r$维控制器$G_F$. 这时, 用$G_F$代替矩阵函数(23)中的$\widehat{G}_F$, 可用同伦法求解可行性问题(26).

**注 3** 在本文中, 笔者考虑了具有确定维数的局部控制器的设计方法. 但有时当局部控制器的维数之和等于整个奇异大系统的维数时, 并不一定使整个奇异系统稳定. 为此, 分两种情况讨论: $\widehat{n}>r$和$\widehat{n}\leqslant r$. 实际上, 当使用高维的局部控制器时, 有可能获得较好的性能指标.

**注 4** 为简便起见, 式(27)$\widehat{G}_D$的$(2,2)$块和式(28)$\widehat{G}_F$的$(2,2)$块均被设定为$-I$, 也可设定为任意稳定的矩阵和变量.

假定已经得到在第1步同伦法中式(26)当$\lambda=1$时的解$(G_D,\widetilde{P},\widetilde{S})$, 并把它表示为$(\widehat{G}_{D0},\widehat{\widetilde{P}}_0,\widehat{\widetilde{S}}_0)$. 也就是说, 已经得到了不含不确定性奇异系统的分散$\mathrm{H}_\infty$ 控制问题的一个解.

下面进行第2步, 笔者考虑含有不确定性的多通道奇异系统(1). 为了计算NMI(15)的解, 再次使用同伦算法, 引入一个实数$\widetilde{\lambda}\in[0,1]$, 并定义矩阵函数

$$\begin{aligned}&H_1(G_D,\widetilde{P},\widetilde{S},\varepsilon,\widetilde{\lambda})=\\ &J_0(G_D,\widetilde{P},\widetilde{S})+\widetilde{\lambda}J_u(G_D,\widetilde{P},\widetilde{S},\varepsilon).\end{aligned}\quad(29)$$

因此

$$H_1(G_D,\widetilde{P},\widetilde{S},\varepsilon,\widetilde{\lambda})=\begin{cases}J_0(G_D,\widetilde{P},\widetilde{S}),\widetilde{\lambda}=0,\\ J(G_D,\widetilde{P},\widetilde{S},\varepsilon),\widetilde{\lambda}=1.\end{cases}\quad(30)$$

求解NMI(15)的问题被转化为一族参数化的问题:

$$H_1(G_D,\widetilde{P},\widetilde{S},\varepsilon,\widetilde{\lambda})<0,\widetilde{E}_L^{\mathrm{T}}\widetilde{P}\widetilde{E}_L>0,\widetilde{\lambda}\in[0,1].\quad(31)$$

注意到当$\widetilde{\lambda}=0$时, 矩阵不等式(31)的解$(\widehat{G}_{D0},\widehat{\widetilde{P}}_0,\widehat{\widetilde{S}}_0)$ 已经在第1阶段获得.

为了获得矩阵不等式(31)的解, 首先采用Schur补对(31)进行变换. 考虑如下两个等价矩阵不等式:

$$\begin{aligned}&H_{11}(G_D,\widetilde{P},\widetilde{S},\varepsilon,\widetilde{\lambda})=\\ &\begin{bmatrix}\widetilde{\phi}_{10}+\phi_{u1} & \widetilde{\phi}_{21}^{\mathrm{T}} & (\widetilde{F}_1+\widetilde{F}_2G_D\widetilde{C}_2)^{\mathrm{T}}\\ \widetilde{\phi}_{21} & -\gamma^2I & 0\\ \widetilde{F}_1+\widetilde{F}_2G_D\widetilde{C}_2 & 0 & -\varepsilon\widetilde{\lambda}^{-1}I\end{bmatrix}<0,\end{aligned}\quad(32)$$

$$\widetilde{E}_L^{\mathrm{T}}\widetilde{P}\widetilde{E}_L>0,$$

$$\phi_{u1}=\varepsilon\widetilde{\lambda}(\widetilde{P}\widetilde{E}+\widetilde{U}\widetilde{S}\widetilde{V}^{\mathrm{T}})\widetilde{L}\widetilde{L}^{\mathrm{T}}(\widetilde{P}\widetilde{E}+\widetilde{U}\widetilde{S}\widetilde{V}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}},$$

和

$$H_{12}(G_D,\widetilde{P},\widetilde{S},\varepsilon^{-1},\widetilde{\lambda})=\begin{bmatrix}\widetilde{\phi}_{10}+\phi_{u2} & \widetilde{\phi}_{21}^{\mathrm{T}} & (\widetilde{P}\widetilde{E}+\widetilde{U}\widetilde{S}\widetilde{V}^{\mathrm{T}})\widetilde{L}\\ \widetilde{\phi}_{21} & -\gamma^2 I & 0\\ \widetilde{L}^{\mathrm{T}}(\widetilde{P}\widetilde{E}+\widetilde{U}\widetilde{S}\widetilde{V}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} & 0 & -\varepsilon^{-1}\widetilde{\lambda}^{-1}I\end{bmatrix}<0,$$

$$\widetilde{E}_L^{\mathrm{T}}\widetilde{P}\widetilde{E}_L>0,$$

$$\phi_{u2}=\varepsilon^{-1}\widetilde{\lambda}(\widetilde{F}_1+\widetilde{F}_2G_D\widetilde{C}_2)^{\mathrm{T}}(\widetilde{F}_1+\widetilde{F}_2G_D\widetilde{C}_2). \quad (33)$$

注意到若固定$\widetilde{P}$和$\widetilde{S}$, 则$H_{11}(G_D,\widetilde{P},\widetilde{S},\varepsilon,\widetilde{\lambda})<0$变为关于变量$G_D$和$\varepsilon$的LMI. 另一方面, 若固定$G_D$, 则$H_{12}(G_D,\widetilde{P},\widetilde{S},\varepsilon^{-1},\widetilde{\lambda})<0$变为关于变量$\widetilde{P}$, $\widetilde{S}$和$\varepsilon^{-1}$的LMI. 本文在第2步同伦法中使用了这个特性.

采用离散化的方法[13], 令$M$为一任意正数, 考虑在区间$[0,1]$内的$(M+1)$个点$\widetilde{\lambda}_k/M(k=0,1,\cdots,M)$, 从而产生一族问题

$$H_1(G_D,\widetilde{P},\widetilde{S},\varepsilon,\widetilde{\lambda}_k)<0,\ \widetilde{E}_L^{\mathrm{T}}\widetilde{P}\widetilde{E}_L>0. \quad (34)$$

如果该问题在第$k$个点上有解, 将其表示为$(G_{Dk},\widetilde{P}_k,\widetilde{S}_k)$. 通过分别固定变量$\widetilde{P}=\widetilde{P}_k$, $\widetilde{S}=\widetilde{S}_k$或$G_D=G_{Dk}$可以使$H_{11}(G_D,\widetilde{P},\widetilde{S},\varepsilon,\widetilde{\lambda}_{k+1})<0$或$H_{12}(G_D,\widetilde{P},\widetilde{S},\varepsilon^{-1},\widetilde{\lambda}_{k+1})<0$, $\widetilde{E}_L^{\mathrm{T}}\widetilde{P}\widetilde{E}_L>0$变为LMI, 计算它们的解$(G_{D,k+1},\widetilde{P}_{k+1},\widetilde{S}_{k+1})$. 若这一族问题$H_1(G_D,\widetilde{P},\widetilde{S},\varepsilon,\widetilde{\lambda}_k)<0$,$\widetilde{E}_L^{\mathrm{T}}\widetilde{P}\widetilde{E}_L>0$, $k=1,2,\cdots,M$均有解, 则就得到NMI(15)在$k=M(\widetilde{\lambda}=1)$时的解. 若这一族问题无解,即$H_{11}(G_D,\widetilde{P}_k,\widetilde{S}_k,\varepsilon,\widetilde{\lambda}_{k+1})<0$和$H_{12}(G_{Dk},\widetilde{P},\widetilde{S},\varepsilon^{-1},\widetilde{\lambda}_{k+1})<0$, $\widetilde{E}_L^{\mathrm{T}}\widetilde{P}\widetilde{E}_L>0$在第$k$点无解存在, 将增大$M$, 考虑区间$[\widetilde{\lambda}_k,1]$内更多的点, 从$\widetilde{\lambda}=\widetilde{\lambda}_k$处的解$(G_{Dk},\widetilde{P}_k)$开始, 重复上述过程.

根据上述思想, 本文给出计算鲁棒分散$\mathrm{H}_\infty$控制器的算法.

**Step 1** 初始化$M$为一个正整数, 设定$M$的上限值$M_{\max}$. 令$k:=0$, 设第一阶段的解作为初始值: $\widetilde{P}_k=\widehat{\widetilde{P}}_0$, $\widetilde{S}_k=\widehat{\widetilde{S}}_0$和$G_{Dk}=G_{D0}$.

**Step 2** 令$k:=k+1$和$\widetilde{\lambda}_k=k/M$, 计算矩阵不等式$H_{11}(G_D,\widetilde{P}_{k-1},\widetilde{S}_{k-1},\varepsilon,\widetilde{\lambda}_k)<0$, $\widetilde{E}_L^{\mathrm{T}}\widetilde{P}_{k-1}\widetilde{E}_L>0$的解$(G_D,\varepsilon)$, 若该矩阵不等式无解, 转到Step 3. 否则, 令$G_{Dk}=G_D$, 并计算$H_{12}(G_{Dk},\widetilde{P},\widetilde{S},\varepsilon^{-1},\widetilde{\lambda}_k)<0$,$\widetilde{E}_L^{\mathrm{T}}\widetilde{P}\widetilde{E}_L>0$的解$(\widetilde{P},\widetilde{S},\varepsilon^{-1})$. 然后, 令$\widetilde{P}_k=\widetilde{P}$, $\widetilde{S}_k=\widetilde{S}$,转到Step 5.

**Step 3** 计算矩阵不等式$H_{12}(G_{D,k-1},\widetilde{P},\widetilde{S},\varepsilon^{-1},\widetilde{\lambda}_k)<0$, $\widetilde{E}_L^{\mathrm{T}}\widetilde{P}\widetilde{E}_L>0$的解$(\widetilde{P},\varepsilon^{-1})$. 若该矩阵不等式无解, 转到Step 4. 否则, 令$\widetilde{P}_k=\widetilde{P}$, $\widetilde{S}_k=\widetilde{S}$, 并计算$H_{11}(G_D,\widetilde{P}_k,\widetilde{S}_k,\varepsilon,\widetilde{\lambda}_k)<0$, $\widetilde{E}_L^{\mathrm{T}}\widetilde{P}_k\widetilde{E}_L>0$的解$(G_D,\varepsilon)$. 然后, 令$G_{Dk}=G_D$, 转到Step 5.

**Step 4** 令$M:=2M$, 若$M\leqslant M_{\max}$,令$\widetilde{P}_{2(k-1)}=\widetilde{P}_{k-1}$,$\widetilde{S}_{2(k-1)}=\widetilde{S}_{k-1}$, $G_{D,2(k-1)}=G_{D,k-1}$, $k:=2(k-1)$转到Step 2. 否则, 该算法不收敛.

**Step 5** 若$k<M$, 则转到Step 2. 若$k=M$, 所得的解$(G_{DM},\widetilde{P}_M,\widetilde{S}_M,\varepsilon)$使NMI (15)的一个解.

**注 5** 在Step 2, Step 3中, 笔者认为通过分别固定矩阵不等式(32)或(33)中一个或两个变量来求解两个LMI. 尽管在理论上一般不必求解第2个LMI, 但是根据笔者的经验, 这样做可以提高算法的收敛性.

**注 6** 在Step 4中, 也可以令$M:=2M$, $k:=0$, 然后转到Step 2. 这意味着我们从零开始选用不同的同伦法路径来计算.

## 5 算例 (Example)

在这一部分, 本文给出一个例子来说明所提算法的有效性. 设具有两个通道的不确定性奇异时间系统(1), 其标称系统的系数矩阵为

$$E=\begin{bmatrix}1&1&0&0\\1&-1&1&0\\2&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix},A=\begin{bmatrix}0&0.6&-1&0\\-3&0&0.8&0\\0&0&1.5&-1\\-1&1&0&0\end{bmatrix},$$

$$B_1=[1\ 0\ 0\ 1]^{\mathrm{T}},B_{21}=[1\ 0\ 1\ 0]^{\mathrm{T}},B_{22}=[0\ 1\ 0\ 1]^{\mathrm{T}},$$

$$C_1=[1\ \ 0\ \ 0\ \ 1],C_{21}=[-2\ \ 3\ \ -2\ \ 1],$$

$$C_{22}=[2\ \ -1\ \ 1\ \ 0].$$

不确定性矩阵为

$$L=[-0.2\ \ 0.3\ \ 0.1\ \ 0.3]^{\mathrm{T}},F_1=[0.5\ \ 0.1\ \ 0.6\ \ -0.2],$$

$$F_2=[-0.6\ \ 0.5].$$

首先, 考虑$r>\widehat{n}$的情形. 令$\gamma=8.5$, 并设计包含两个局部控制器的分散$\mathrm{H}_\infty$控制器, 它们的维数分别为$\widehat{n}_1=1$和$\widehat{n}_2=1$. 很明显, 两个局部分散控制器的维数之和$\widehat{n}=\widehat{n}_1+\widehat{n}_2=2$小于整个控制系统的维数$r=3$.

为了计算第1步同伦法的初始值, 使用文[4]中设计奇异系统集中$\mathrm{H}_\infty$控制器的方法, 得到如下集中控制器的系数矩阵

$$G_F=\left[\begin{array}{ccc|cc}-1.97&0.99&-0.20&-0.09&0.33\\2.69&-4.34&-1.18&1.07&0.12\\1.47&-0.66&-1.32&-0.04&0.54\\\hline -0.27&-1.12&-0.17&0.24&-0.20\\0.75&0.53&-0.65&-0.82&0.69\end{array}\right].$$

用$G_F$代替$\widehat{G}_D$, 计算$H_0(G_D,\widetilde{P},\widetilde{S},\lambda)<0$, $\widetilde{E}_L^{\mathrm{T}}\widetilde{P}\widetilde{E}_L>0$的可行解, 作为变量$(\widetilde{P},\widetilde{S})$初始值

$$\widetilde{P}_0 =\begin{bmatrix}16.79 & 2.12 & 0.37 & -3.53 & -1.69 & -6.04 & 2.03\\ 2.12 & 6.36 & 10.63 & -3.42 & 2.20 & -0.83 & -0.84\\ 0.37 & 10.63 & -6.05 & 6.48 & -0.76 & 3.48 & -0.41\\ -3.53 & -3.42 & 6.48 & 14.39 & 2.00 & 2.91 & -7.25\\ -1.69 & 2.20 & -0.76 & 2.00 & 21.59 & 5.18 & 1.33\\ -6.04 & -0.83 & 3.48 & 2.91 & 5.18 & 6.67 & -2.55\\ 2.03 & -0.84 & -0.41 & -7.25 & 1.33 & -2.55 & 20.14\end{bmatrix},$$

$$\widetilde{S}_0 = -6.18.$$

对标称奇异系统, 设计包含两个局部控制器的分散H$_\infty$ 控制器(4), 两个局部控制器的维数分别为$\widehat{n}_1 = 1$ 和$\widehat{n}_2 = 1$. 基于式(27)对矩阵$G_D$进行增广, 得到新控制器矩阵$\widehat{G}_D$. 利用文[12]的方法, 当$M = 64$时, 标称奇异系统的分散鲁棒H$_\infty$ 控制器的系数矩阵

$$\widehat{G}_D=\left[\begin{array}{ccc|cc}0.01 & 0 & 0 & 0.03 & 0\\ 0 & -2.92 & 0 & 0 & -1.68\\ -0.06 & 1.94 & -0.01 & 0.22 & 1.51\\ \hline 0.09 & 0 & 0 & -0.16 & 0\\ 0 & 1.70 & 0 & 0 & 2.51\end{array}\right]$$

通过抽取出上述矩阵中可控和可观的部分, 得到第2步同伦算法的初始解

$$\widehat{G}_{D0} = \left[\begin{array}{cc|cc}0.01 & 0 & -0.03 & 0\\ 0 & -2.92 & 0 & -1.68\\ \hline 0.09 & 0 & -0.16 & 0\\ 0 & 1.70 & 0 & 2.51\end{array}\right].$$

令$\widehat{G}_D=\widehat{G}_{D0}$, 计算$J_0(G_D, \widetilde{P}, \widetilde{S}) < 0$, $\widetilde{E}_L^{\rm T}\widetilde{P}\widetilde{E}_L > 0$的可行解, 从而得到变量$(\widetilde{P}, \widetilde{S})$ 初始值$(\widehat{\widetilde{P}_0}, \widehat{\widetilde{S}_0})$:

$$\widehat{\widetilde{P}}_0=\begin{bmatrix}-1.46 & -10.05 & 1.53 & -21.09 & -4.58 & 3.72\\ -10.05 & 1.63 & 13.84 & -10.70 & -0.71 & 7.35\\ 1.53 & 13.84 & 13.27 & 16.87 & -2.59 & -7.64\\ -21.09 & -10.70 & 16.87 & 17.97 & 2.40 & 7.45\\ -4.58 & -0.71 & -2.59 & 2.40 & 24.16 & 0.63\\ 3.72 & 7.35 & -7.64 & 7.45 & 0.63 & 33.66\end{bmatrix},$$

$$\widehat{\widetilde{S}}_0 = -0.95.$$

在上述初始条件下, 再次运用同伦法, 当$M = 4$时, 得到分散鲁棒H$_\infty$ 控制器的系数矩阵

$$\widehat{G}_D = \left[\begin{array}{cc|cc}-27.74 & 0 & 0.25 & 0\\ 0 & -2.08 & 0 & -1.56\\ \hline -5.64 & 0 & -0.10 & 0\\ 0 & 1.32 & 0 & 2.48\end{array}\right].$$

其次, 考虑$r < \widehat{n}$的情形, 令$\gamma = 3$. 设计包含两个局部控制器的分散H$_\infty$控制器, 它们的维数分别为$\widehat{n}_1 = 2$ 和$\widehat{n}_2 = 2$. 此时, 两个局部分散控制器的维数之和$\widehat{n} = \widehat{n}_1 + \widehat{n}_2 = 4$ 大于整个控制系统的维数$r = 3$. 在第1步同伦法中, 先计算出$r$维集中H$_\infty$控制器, 并按式(28)将其增广为$\widehat{G}_F$:

$$\widehat{G}_F=\left[\begin{array}{cccc|cc}-4.67 & 2.84 & -0.71 & 0 & -0.05 & 0.44\\ 4.41 & -9.25 & -2.84 & 0 & 2.76 & 1.49\\ 4.51 & -2.80 & -1.29 & 0 & -0.07 & -0.04\\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1\\ \hline -4.01 & 0.17 & -1.40 & 0 & 0.79 & 0.55\\ 5.56 & -1.23 & 0.14 & 0 & -1.67 & -1.16\end{array}\right].$$

使用$\widehat{G}_F$ 作为初始值, 用$\widehat{G}_F$替代$G_D$, 计算$H_0(G_D, \widetilde{P},\ \widetilde{S}, \lambda) < 0$, $\widetilde{E}_L^{\rm T}\widetilde{P}\widetilde{E}_L > 0$的可行解, 从而得到变量$(\widehat{P}, \widehat{S})$ 初始值

$$\widetilde{P}_0 = \begin{bmatrix}11.71 & 2.60 & -5.31 & -10.96 & -6.93 & -2.71 & -0.85 & 2.54\\ 2.60 & 20.60 & 9.12 & -7.01 & 1.09 & 7.11 & -4.30 & 3.34\\ -5.31 & 9.12 & 9.11 & 13.40 & 3.05 & 3.59 & 2.73 & -5.87\\ -10.96 & -7.01 & 13.40 & 15.02 & 0.17 & 2.15 & -7.00 & 0.21\\ -6.93 & 1.09 & 3.05 & 0.17 & 37.13 & 1.61 & 1.07 & 2.65\\ -2.71 & 7.11 & 3.59 & 2.15 & 1.61 & 14.53 & -3.19 & -0.23\\ -0.85 & -4.30 & 2.73 & -7.00 & 1.07 & -3.19 & 33.99 & -1.80\\ 2.54 & 3.34 & -5.87 & 0.21 & 2.65 & -0.23 & -1.80 & 5.13\end{bmatrix}, \widetilde{S}_0 = -4.04.$$

接着, 用同伦法计算出当$M = 64$时, 标称奇异系统的分散鲁棒H$_\infty$ 控制器的系数矩阵

$$\widehat{G}_{D0} = \left[\begin{array}{cccc|cc}-13.39 & 18.80 & 0 & 0 & -4.35 & 0\\ -0.08 & -2.95 & 0 & 0 & 1.04 & 0\\ 0 & 0 & -27.99 & -3.78 & 0 & 0.72\\ 0 & 0 & -3.76 & -2.09 & 0 & -3.94\\ \hline -13.05 & 16.33 & 0 & 0 & -3.61 & 0\\ 0 & 0 & 0.59 & 0.20 & 0 & 1.93\end{array}\right].$$

然后, 令$G_D=\widehat{G}_{D0}$计算$J_0(G_D,\widetilde{P},\widetilde{S})<0$, $\widetilde{E}_L^{\mathrm{T}}\widetilde{P}\widetilde{E}_L>0$的解$(\widehat{\widetilde{P}}_0,\widehat{\widetilde{S}}_0)$:

$$\widehat{\widetilde{P}}_0=\begin{bmatrix} 0.57 & -5.64 & 4.55 & -19.98 & -6.24 & -1.41 & -0.85 & 2.69\\ -5.64 & 14.26 & 15.24 & -7.36 & -7.32 & 12.54 & -0.71 & 6.42\\ 4.55 & 15.24 & 6.79 & 17.56 & -8.14 & -4.23 & 1.30 & -5.27\\ -19.98 & -7.36 & 17.56 & 21.07 & 2.98 & 3.08 & -0.55 & 5.99\\ -6.24 & -7.32 & -8.14 & 2.98 & 16.86 & 6.84 & -0.24 & 1.49\\ -1.41 & 12.54 & -4.23 & 3.08 & 6.84 & 27.91 & 0.50 & -1.31\\ -0.85 & -0.71 & 1.30 & -0.55 & -0.24 & 0.50 & 15.99 & 1.12\\ 2.69 & 6.42 & -5.27 & 5.99 & 1.49 & -1.31 & 1.12 & 10.25 \end{bmatrix},\ \widehat{\widetilde{S}}_0=-4.05.$$

最后, 应用同伦法计算出当$M=32$时, 不确定性奇异系统的分散鲁棒$\mathrm{H}_\infty$控制器的系数矩阵

$$G_D=\left[\begin{array}{cccc|cc} -20.00 & 27.51 & 0 & 0 & -6.13 & 0\\ -2.63 & 0.57 & 0 & 0 & 0.22 & 0\\ 0 & 0 & -20.85 & -2.48 & 0 & 1.40\\ 0 & 0 & -1.24 & -2.14 & 0 & -5.03\\ \hline -20.97 & 27.02 & 0 & -5.88 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1.73 & -0.07 & 0 & 2.14 \end{array}\right].$$

## 6 结论 (Conclusion)

本文研究了不确定性奇异大系统的分散鲁棒$\mathrm{H}_\infty$控制问题. 基于奇异系统严格有界实引理的形式, 推导出了使不确定多通道奇异系统能鲁棒镇定, 且满足一定的扰动水平的充分必要条件, 没有等式约束的非线性矩阵不等式条件. 采用两步同伦法迭代来求解该非线性矩阵不等式. 首先, 通过逐步对控制器的系数矩阵加上结构限制, 计算出当确定性不存在时的标称系统的分散控制器. 然后, 逐步改变标称系统分散控制器的系数, 计算出不确定性参数存在时的分散鲁棒控制器. 提出了既可以高于又可以低于集中$\mathrm{H}_\infty$控制器的维数的分散鲁棒$\mathrm{H}_\infty$控制器的设计方法. 仿真结果表明了此方法的有效性.

## 参考文献 ( References):


[1] DAI L. *Singular Control Systems*[M]. Berlin: Springer-Verlag, 1989.

[2] LEWIS F L. A survey of linear singular systems[J]. *Circuits, Systems, and Signal Processing*, 1986, 5(1): 3 – 36.

[3] MASUBUCHI I, KAMITANE Y, OHARA A, et al. $\mathrm{H}_\infty$ control for descriptor systems: A matrix inequalities approach[J]. *Automatica*, 1997, 33(4): 669 – 673.

[4] UEZATO E, IKEDA M. Strict LMI conditions for stability, robust stabilization, and $\mathrm{H}_\infty$ control for descriptor systems[C]// *Proc of the 38th IEEE Conf on Decision and Control*. Arizona, USA: [s.n.], 1999: 4092 – 4097.

[5] WANG D, SOH C B. On regularizing singular systems by decentralized output feedback[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1999, 44(1): 148 – 152.

[6] CHANG T N, DAVISON E J. Decentralized control of descriptor systems[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2001, 46(10): 1589 – 1595.

[7] IKEDA M, ZHAI G, UEZATO E. Centralized design of decentralized stabilizing controllers for large-scale descriptor systems[J]. *DCDIS Journal, Series B: Algorithms and Applications*, 2004, 11(4): 509 – 520.

[8] 沃松林, 邹云. 参数不确定广义大系统的分散鲁棒镇定控制[J]. 控制与决策, 2004, 19(8): 931 – 934.
(WO Songlin, ZOU Yun. Decentralized robust stabilization for singular large scale systems with parameter uncertainty[J]. *Control and Decision*, 2004, 19(8): 931 – 934.)

[9] CHEN Ning, IKEDA M, GUI Weihua. Design of robust $\mathrm{H}_\infty$ control of interconnected systems: a homotopy. method[J]. *Int J Control, Automation and Systems*, 2005, 3(2): 143 – 151.

[10] CHEN Ning, IKEDA M, GUI Weihua. Robust decentralized $\mathrm{H}_\infty$ control of interconnected systems: A design method using homotopy[C]// *Preprints of The 10th IFAC/IFORS/IMACS /IFIP Symposium on Large Scale Systems: Theory and Applications*. Osaka, Japan: [s.n.], 2004: 330 – 336.

[11] PETERSEN I R. A stabilization algorithm for a class of uncertain linear systems[J]. *Systems & Control Letters*, 1987, 8(4): 351 – 357.

[12] ZHAI G, IKEDA M, FUJISAKI Y. Decentralized $\mathrm{H}_\infty$ controller design: a matrix inequality approach using a homotopy method[J]. *Automatica*, 2001, 37(4): 565 – 573.

[13] ALVA J H. The feasibility of continuation methods for nonlinear equations[J]. *SIAM J on Numerical Analysis*, 1974, 11(1): 102 – 120.


## 作者简介:


**陈 宁** (1970—), 女, 副教授, 博士, 主要研究方向为大系统、奇异大系统分散鲁棒控制及参数稳定性理论研究及应用, E-mail: ningchen@mail.csu.edu.cn;

**桂卫华** (1950—), 男, 教授, 博士生导师, 主要研究方向为工业大系统递阶和分散控制理论及应用、鲁棒控制、复杂生产过程建模与控制等, E-mail: gwh@mail.csu.edu.cn;

**IKEDA Masao** (1947—), 男, 教授, 博士生导师, IEEE高级会员, 日本SICE协会主席, 主要研究方向为分散控制、非线性系统和时变系统的镇定、伺服系统的控制及控制理论的实际应用等, E-mail: ikeda@mech.eng.osaka-u.ac.jp.