

带有饱和执行器的T-S离散模糊系统的LQ模糊控制

刘 博, 贾新春, 高一博

(山西大学 数学科学学院, 山西 太原 030006)

摘要: 研究了带有饱和执行器的Takagi-Sugeno(T-S)离散模糊系统的LQ模糊控制问题, 利用Lyapunov稳定理论、PDC(平行分配补偿)技术以及线性矩阵不等式方法, 得到了闭环模糊系统的渐近稳定的充分条件, 给出了闭环系统的LQ模糊控制律的设计方法和吸引域的一个估计, 并建立了闭环系统的LQ性能函数上界的计算公式. 进一步, 针对两类优化问题, 即: LQ性能最小化问题和吸引域最大化问题, 给出了相应的带有线性矩阵不等式约束的计算方法. 最后, 一个仿真例子说明了所给方法的有效性.

关键词: T-S模糊系统; 模糊控制; LQ性能; 饱和执行器; 吸引域; 线性矩阵不等式

中图分类号: TP273 **文献标识码:** A

LQ fuzzy control of T-S discrete fuzzy systems with actuator saturation

LIU Bo, JIA Xin-chun, GAO Yi-bo

(School of Mathematical Sciences, Shanxi University, Taiyuan Shanxi 030006, China)

Abstract: The linear quadratic(LQ) fuzzy control problem for Takagi-Sugeno(T-S) discrete fuzzy systems with actuator saturation is studied in this paper. Firstly, by Lyapunov stability theory, parallel distributed compensation(PDC) technique, and linear matrix inequality(LMI) approach, a sufficient condition of asymptotic stability of the closed-loop fuzzy systems is obtained. Secondly, the design method of LQ fuzzy controllers and an estimate of domain of attraction for such systems are presented, and a computing formula of an upper-bound of the LQ performance cost function is also established. Furthermore, for two kinds of optimization problems, i.e., minimization of LQ performance and maximization of domain of attraction, two computing methods with LMI constraints are presented. Finally, a numerical example is given to illustrate the effectiveness of the proposed method.

Key words: T-S fuzzy system; fuzzy control; linear quadratic(LQ) performance; actuator saturation; domain of attraction; LMI

1 引言(Introduction)

自从1985年Takagi和Sugeno首先提出了T-S模糊连续模型^[1]以来, T-S模糊系统的系统分析和控制综合问题得到广泛研究^[2~5]. T-S模糊系统是非线性系统的万能逼近器, 能以任意精度逼近非线性系统, 是研究非线性系统的一种有效方法.

近几年, 带有饱和执行器的非线性系统的稳定性分析及控制律的设计有较多的研究. Cao and Lin^[6]利用T-S模糊方法研究了带有饱和执行器的非线性连续时间系统的稳定性问题及控制律设计问题. Hu and Lin^[7], Cao and Lin^[8]分别利用Lyapunov稳定理论, LMI方法研究了带有饱和执行器的非线性离散时间系统的控制问题. 据笔者所知, 还没有利用T-S模糊方法对带有饱和执行器的非线性离散系统的LQ模糊控制问题研究的相关报道.

本文主要工作是: 以T-S模糊系统描述的非线性离散系统为对象, 研究了带有饱和执行器的离散T-S模糊系统的LQ模糊控制问题. 利用二次Lyapunov稳定理论和PDC技术, 给出了T-S离散模糊系统局部渐近稳定条件和系统的一个LQ性能上界, 并在此基础上, 得到LQ模糊控制律设计方法, 并且针对两类不同目标函数优化问题, 建立了相应的具有LMIs约束的优化设计方法.

符号说明: A^T 表示矩阵 A 的转置, $\mathbb{R}^n$ 表示 n 维欧几里德空间, $\mathbb{R}^{n \times m}$ 表示 $n \times m$ 维实数矩阵的全体. $P > 0$ ($P \geq 0$)表示 P 为对称正定矩阵(半正定矩阵), 对称矩阵中 $*$ 表示其对称位置上元素的转置. $\text{tr}\{V\}$ 表示矩阵 V 的迹. $\text{diag}\{M_1, M_2, \dots, M_r\}$ 表示对角块矩阵. $\text{co}\{x_1, x_2, \dots, x_t\}$ 表示以 $x_1, x_2, \dots, x_t$ 为顶点的凸包. $E\{\cdot\}$ 表示随机向量的数学期望.

2 问题提出和准备知识(Problem statement and preliminaries)

考虑如下带有饱和执行器的T-S 离散模糊系统

$$R_i: \begin{cases} \text{If } e_1(k) \text{ is } G_{i1} \text{ and } \cdots \text{ and } e_q(k) \text{ is } G_{iq}, \\ \text{Then } x(k+1) = A_i x(k) + B_i \sigma_0(u(k)), \\ \quad z(k) = C_i x(k) + D_i \sigma_0(u(k)), \\ i = 1, \cdots, r. \end{cases} \quad (1)$$

其中: R_i 是第*i*条模糊规则, $x(k) \in \mathbb{R}^n$ 是状态向量, $z(k) \in \mathbb{R}^n$ 是被调输出, $u(k) \in \mathbb{R}^m$ 是控制输入, $A_i, B_i, C_i, D_i (i = 1, \cdots, r)$ 是已知定常矩阵, r 是模糊If-Then规则的个数, G_{ij} 是给定的模糊集, $e(k) = [e_1(k), \cdots, e_q(k)]^T$ 是前件变量, 函数 $\sigma_0(u(k))$ 是适当维数的标准饱和函数, 即 $\sigma_0(u) = [\sigma_0(u_1), \cdots, \sigma_0(u_m)]^T$, $\sigma_0(u_i) = \text{sgn } u_i \min\{1, |u_i|\}$ ($i = 1, 2, \cdots, m$), 在此, σ_0 既表示向量的饱和函数又表示标量的饱和函数. 则T-S 离散模糊系统(1)可进一步描述为

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + B\sigma_0(u(k)), \\ z(k) = Cx(k) + D\sigma_0(u(k)). \end{cases} \quad (2)$$

这里:

$$A = \sum_{i=1}^r p_i A_i, \quad B = \sum_{i=1}^r p_i B_i, \quad C = \sum_{i=1}^r p_i C_i, \\ D = \sum_{i=1}^r p_i D_i, \quad p_i = p_i(e(k)) = \frac{w_i(e(k))}{\sum_{j=1}^r w_j(e(k))},$$

$$w_i(e(k)) = \prod_{j=1}^q G_{ij}(e_j(k)).$$

其中: $G_{ij}(e_j(k))$ 是 $e_j(k)$ 在 G_{ij} 的模糊隶属度函数, $\sum_{j=1}^r p_j = 1, 0 \leq p_j \leq 1$.

T-S离散模糊系统(2)的LQ性能函数选取为

$$J = \sum_{k=0}^{\infty} z^T(k)z(k), \quad (3)$$

由模糊系统(2)易知, 性能函数(3)既含有状态向量又含有控制输入.

基于PDC技术, 对于T-S离散模糊系统(2), 选取如下模糊控制律:

$$C_i: \begin{cases} \text{If } e_1(k) \text{ is } G_{i1} \text{ and } \cdots \text{ and } e_q(k) \text{ is } G_{iq}, \\ \text{Then } u(k) = F_i x(k), \quad i = 1, \cdots, r, \end{cases} \quad (4)$$

则全局状态反馈控制律为

$$u(k) = \sum_{i=1}^r p_i F_i x(k). \quad (5)$$

将控制律(5)代入T-S离散模糊系统(2), 得闭环模糊

系统

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + B\sigma_0(\sum_{j=1}^r p_j F_j x(k)), \\ z(k) = Cx(k) + D\sigma_0(\sum_{j=1}^r p_j F_j x(k)). \end{cases} \quad (6)$$

本文的目的是: 针对带有饱和执行器的T-S离散模糊系统(2), 设计模糊控制律(4)使得闭环模糊系统(6)局部渐近稳定, 并给出该系统的LQ性能(3)的一个确定上界和系统吸引域的一个估计. 模糊控制律(4)称为模糊系统(2)的LQ模糊控制律.

定义多面体: $\Gamma(H_j) = \{x \in \mathbb{R}^n : |h_{jd}x| \leq 1, d = 1, \cdots, m\}$, h_{jd} 是矩阵 $H_j (j = 1, \cdots, r)$ 的第*d*行. 令 Λ 为对角线元素为0或1的 $m \times m$ 维对角矩阵组成的集合, 则 Λ 中有 2^m 个元素, 其中元素记为 $E_s (s = 1, \cdots, 2^m)$, 定义 $E_s^- = I - E_s$, 显然 E_s^- 也为 Λ 中元素. 对于正定矩阵 $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$, 定义椭圆域: $\Omega(P, 1) = \{x \in \mathbb{R}^n : x^T P x \leq 1\}$. 考虑如下Lyapunov函数:

$$V(x) = x^T(k)Px(k). \quad (7)$$

引理 1 对给定的适当维数矩阵 $F_j, H_j \in \mathbb{R}^{m \times n} (j = 1, \cdots, r)$. 对 $x \in \mathbb{R}^n$, 如果 $x \in \bigcap_{j=1}^r \Gamma(H_j)$, 则有

$$\sigma_0(\sum_{j=1}^r p_j F_j x) \in \text{co}\{E_s \sum_{j=1}^r p_j F_j x + E_s^- \sum_{j=1}^r p_j H_j x\},$$

即

$$\sigma_0(\sum_{j=1}^r p_j F_j x) = \sum_{s=1}^{2^m} \sum_{j=1}^r \eta_s p_j (E_s F_j + E_s^- H_j) x. \quad (8)$$

其中: η_s 是状态 x 的函数, $0 \leq \eta_s \leq 1, \sum_{s=1}^{2^m} \eta_s = 1$.

证 由标准隶属度函数性质, 得

$$\bigcap_{j=1}^r \Gamma(H_j) \subset \Gamma(\sum_{j=1}^r p_j H_j).$$

再根据文献[7]中的引理, 可知结论成立.

由引理1, 如果 $x(k) \in \bigcap_{j=1}^r \Gamma(H_j)$, 则闭环模糊系统(6)有如下表示:

$$\begin{cases} x(k+1) = Mx(k), \\ z(k) = Nx(k). \end{cases} \quad (9)$$

其中:

$$M = A + B \sum_{s=1}^{2^m} \sum_{j=1}^r \eta_s p_j (E_s F_j + E_s^- H_j),$$

$$N = C + D \sum_{s=1}^{2^m} \sum_{j=1}^r \eta_s p_j (E_s F_j + E_s^- H_j).$$

3 主要结论(Main results)

定理 1 考虑闭环模糊系统(6). 如果存在矩阵 $X > 0, Z \in \mathbb{R}^{n \times n}, L_j, W_j \in \mathbb{R}^{m \times n} (j = 1, \dots, r)$, 其中 Z 非奇异, 使得以下LMIs成立:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} X - Z - Z^T & * & * \\ (C_i Z + D_i(E_s L_i + E_s^- W_i)) & -I & * \\ (A_i Z + B_i(E_s L_i + E_s^- W_i)) & 0 & -X \end{bmatrix} < 0, \\ i = 1, \dots, r, s = 1, \dots, 2^m, \end{cases} \quad (10)$$

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} 2(X - Z - Z^T) & * & * \\ \Xi_1 & -2I & * \\ \Xi_2 & 0 & -2X \end{bmatrix} < 0, \\ j = 1, \dots, r, i = j + 1, \dots, r, s = 1, \dots, 2^m. \end{cases} \quad (11)$$

其中:

$$\begin{aligned} \Xi_1 &= (C_i Z + D_i(E_s L_j + E_s^- W_j)) + \\ &\quad (C_j Z + D_j(E_s L_i + E_s^- W_i)), \\ \Xi_2 &= (A_i Z + B_i(E_s L_j + E_s^- W_j)) + \\ &\quad (A_j Z + B_j(E_s L_i + E_s^- W_i)), \\ F_i &= L_i Z^{-1}, H_i = W_i Z^{-1} (i = 1, \dots, r), P = X^{-1}. \end{aligned}$$

且又有 $\Omega(P, 1) \subset \bigcap_{j=1}^r \Gamma(H_j)$, 则闭环模糊系统(6)在 $\Omega(P, 1)$ 内局部渐近稳定($\Omega(P, 1)$ 包含于吸引域), 闭环系统的LQ性能(3)有上界 $\bar{J} = x^T(0)Px(0)$. 模糊控制律(4)是模糊系统(2)的LQ模糊控制律.

证 对于任意 $x \in \Omega(P, 1) \subset \bigcap_{j=1}^r \Gamma(H_j)$, 闭环模糊系统(6)可写为(9)的形式, 则Lyapunov函数 $V(x) = x^T(k)Px(k)$ 沿闭环模糊系统(8)状态轨迹的前向差分为

$$\Delta V(x(k)) = V(x(k+1)) - V(x(k)) = x^T(k)[M^T P M - P]x(k).$$

若不等式(10)(11)成立, 又由 $F_i = L_i Z^{-1}, H_i = W_i Z^{-1} (i = 1, \dots, r)$, 则有

$$\begin{aligned} &\sum_{s=1}^{2^m} \sum_{i=1}^r d_{sii} \begin{bmatrix} X - Z - Z^T & * & * \\ (C_i + D_i(E_s F_i + E_s^- H_i))Z & -I & * \\ (A_i + B_i(E_s F_i + E_s^- H_i))Z & 0 & -X \end{bmatrix} + \\ &\sum_{s=1}^{2^m} \sum_{j=1}^r \sum_{i=j+1}^r d_{sij} \begin{bmatrix} 2(X - Z - Z^T) & * & * \\ \Xi_3 & -2I & * \\ \Xi_4 & 0 & -2X \end{bmatrix} < 0 \end{aligned} \quad (12)$$

成立. 其中:

$$\begin{aligned} \Xi_3 &= (C_i + D_i(E_s F_j + E_s^- H_j))Z + \\ &\quad (C_j + D_j(E_s F_i + E_s^- H_i))Z, \\ \Xi_4 &= (A_i + B_i(E_s F_j + E_s^- H_j))Z + \\ &\quad (A_j + B_j(E_s F_i + E_s^- H_i))Z, \\ d_{sij} &= \eta_s p_i p_j. \end{aligned}$$

式(12)等价于

$$\begin{bmatrix} X - Z - Z^T & * & * \\ NZ & -I & * \\ MZ & 0 & -X \end{bmatrix} < 0. \quad (13)$$

又由 $(Z^T - X)X^{-1}(Z - X) \geq 0$, 得 $X - Z - Z^T \geq -Z^T X^{-1}Z$. 若式(13)成立, 则下式成立:

$$\begin{bmatrix} -Z^T X^{-1}Z & * & * \\ NZ & -I & * \\ MZ & 0 & -X \end{bmatrix} < 0. \quad (14)$$

将式(14)左乘 $\text{diag}\{Z^{-T}, I, I\}$ 右乘 $\text{diag}\{Z^{-1}, I, I\}$ 得

$$\begin{bmatrix} -X^{-1} & * & * \\ N & -I & * \\ M & 0 & -X \end{bmatrix} < 0, \text{ 即 } \begin{bmatrix} -P & * & * \\ N & -I & * \\ M & 0 & -P^{-1} \end{bmatrix} < 0,$$

再由矩阵Schur补性质, 有 $M^T P M - P + N^T N < 0$. 则有

$$\begin{aligned} \Delta V(x(k)) &= x^T(k)(M^T P M - P)x(k) < \\ &\quad -x^T(k)(N^T N)x(k). \end{aligned}$$

显然, 对 $\forall x(k) \in \Omega(P, 1) \setminus \{0\}$, 有 $\Delta V(x(k)) < 0$. 因此, 闭环模糊系统(6)在区域 $\Omega(P, 1)$ 内局部渐近稳定. 当 $x(0) \in \Omega(P, 1)$ 时, 有 $V(x(\infty)) = 0$.

$$V(x(\infty)) - V(x(0)) = -V(x(0)) =$$

$$-x^T(0)Px(0) < -\sum_{k=0}^{\infty} x^T(k)(N^T N)x(k) = -J.$$

即 $J < x^T(0)Px(0)$. 闭环模糊系统(6)的LQ性能(3)有上界: $\bar{J} = x^T(0)Px(0)$. 证毕.

根据模糊系统的保守性较小的稳定性判据^[9], 可以进一步降低定理1的保守性.

推论 1 考虑闭环模糊系统(6), 如果存在矩阵 $X > 0, X_{ij}, Z \in \mathbb{R}^{n \times n}, L_j, W_j \in \mathbb{R}^{m \times n} (j = 1, \dots, r)$, 其中 Z 非奇异, 使得以下LMIs成立:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} X - Z - Z^T + X_{ii} & * & * \\ (C_i + D_i(E_s F_i + E_s^- H_i))Z & -I & * \\ (A_i + B_i(E_s F_i + E_s^- H_i))Z & 0 & -X \end{bmatrix} < 0, \\ i = 1, \dots, r, s = 1, \dots, 2^m, \end{cases} \quad (15)$$

$$\left\{ \begin{bmatrix} 2X - 2Z - 2Z^T + X_{ij} + X_{ij}^T & * & * \\ \Xi_1 & -2I & * \\ \Xi_2 & 0 & -2X \end{bmatrix} < 0, \right. \\ \left. j = 1, \dots, r, i = j + 1, \dots, r, s = 1, \dots, 2^m, \right. \quad (16)$$

$$\begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} & \cdots & X_{1r} \\ * & X_{22} & \cdots & X_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & \cdots & X_{rr} \end{bmatrix} > 0, \quad (17)$$

且 $\Omega(P, 1) \subset \bigcap_{j=1}^r \Gamma(H_j)$. 其中: $F_i = L_i Z^{-1}$, $H_i = W_i Z^{-1}$ ($i = 1, \dots, r$), $P = X^{-1}$. 则闭环模糊系统(6)在 $\Omega(P, 1)$ 内局部渐近稳定 ($\Omega(P, 1)$ 包含于吸引域), 闭环系统的LQ性能(3)有上界 $\bar{J} = x^T(0)Px(0)$. 模糊控制律(4)是模糊系统(2)的LQ模糊控制律.

证 由定理1的证明过程以及文献[9], 易证.

注 为了避免性能上界 $\bar{J} = x^T(0)Px(0)$ 对初始状态 $x(0)$ 的依赖性, 假设 $x(0)$ 为随机向量并满足: $E\{x(0)\} = 0$ 和 $E\{x(0)x^T(0)\} = I$ (见文献[11,12]). 此时, 闭环系统(6)的LQ性能(3)的性能上界的数学期望为: $J^* \triangleq E\{\bar{J}\} = E\{x^T(0)Px(0)\} = \text{tr}\{P\} = \text{tr}\{X^{-1}\}$.

4 两类优化问题(Two kinds of optimal problems)

在此, 给出一个参考集 $\chi_R \subset \mathbb{R}^n$ 用以估计吸引域, 其为一个包含原点的凸区域. 对一个包含原点的给定区域 $\varphi \in \mathbb{R}^n$, 定义: $\alpha_R(\varphi) := \sup\{\alpha > 0 : \alpha\chi_R \subset \varphi\}$. 本文只考虑 $\chi_R = \text{co}\{x_1, x_2, \dots, x_t\}$, 其中 $x_i \in \mathbb{R}^n$ ($i = 1, \dots, t$).

4.1 LQ 性能最小化 (Minimization of LQ performance)

对于T-S离散模糊系统(2), 给定期望的参考凸区域 χ_R , 设计LQ 模糊控制律(4), 使得闭环模糊系统(6)局部渐近稳定, 闭环系统的吸引域包含 χ_R , 在此前提下, 使系统的LQ 性能(3) 的上界 J^* 最小化. 对此, 可以建立如下的优化问题:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{X, X_{ij}, Z, H_j, L_j, W_j, V} : f = \text{tr}\{V\}, \\ \text{s.t. a) } \Omega(P, 1) \subset \bigcap_{j=1}^r \Gamma(H_j), \\ \quad \text{b) 式(15)(16) and (17),} \\ \quad \text{c) } \chi_R \subset \Omega(P, 1), \\ \quad \text{d) } \begin{bmatrix} V & I \\ I & X \end{bmatrix} > 0. \end{array} \right. \quad (18)$$

其中: 约束条件a)和b)保证了所设计的模糊控

制律(4) 使得闭环模糊系统(6)局部渐近稳定, 并且 $\Omega(P, 1)$ 在吸引域中, 约束条件c)保证了初始条件在吸引域中, 约束条件d)保证了 $X^{-1} < V$.

下面, 将上述优化问题转化为可行的带有LMIs约束的优化问题.

根据文献[10], 约束条件a)等价于

$$h_{jd} P^{-1} h_{jd} \leq 1 \iff \begin{bmatrix} -1 & h_{jd} \\ h_{jd}^T & -X^{-1} \end{bmatrix} \leq 0, \\ d = 1, \dots, m, j = 1, \dots, r.$$

其中 h_{jd} 为 H_j 的第 d 行. 上式左乘 $\text{diag}\{-1, Z^T\}$ 右乘 $\text{diag}\{-1, Z\}$ 可得

$$\begin{bmatrix} -1 & w_{jd} \\ * & -Z^T X^{-1} Z \end{bmatrix} \leq 0, \quad d = 1, \dots, m, \\ j = 1, \dots, r. \quad (19)$$

其中 w_{jd} 为 W_j 的第 d 行, 又由 $-Z^T X^{-1} Z \leq X - Z - Z^T$, 若有

$$\begin{bmatrix} -1 & w_{jd} \\ * & X - Z - Z^T \end{bmatrix} \leq 0, \quad d = 1, \dots, m, \\ j = 1, \dots, r, \quad (20)$$

则有式(19)成立.

约束条件c)等价于

$$x_c^T P x_c < 1 \iff \begin{bmatrix} -1 & * \\ x_c & -P^{-1} \end{bmatrix} \leq 0 \iff \begin{bmatrix} -1 & * \\ x_c & -X \end{bmatrix} \leq 0.$$

综上, 优化问题(18)可转化为带有LMIs约束的优化问题

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{X, X_{ij}, Z, W_j, L_j, V} : f = \text{tr}\{V\}, \\ \text{s.t. a) 式(20),} \\ \quad \text{b) 式(15)(16) and (17),} \\ \quad \text{c) } \begin{bmatrix} -1 & * \\ x_c & -X \end{bmatrix} \leq 0, \quad c = 1, \dots, t, \\ \quad \text{d) } \begin{bmatrix} V & I \\ I & X \end{bmatrix} > 0. \end{array} \right. \quad (21)$$

该优化问题可通过MATLAB软件中LMI工具箱有效求解. 如果上述优化问题(21)有可行解 X, V, Z, L_i ($i = 1, \dots, r$), 则可得LQ 模糊控制律的局部增益矩阵为 $F_i = L_i Z^{-1}$ ($i = 1, \dots, r$), 模糊系统(2)的吸引域估计为 $\Omega(P, 1)$, 其中 $P = X^{-1}$, LQ 性能函数最小值为 $J^* = \text{tr}\{V\}$.

4.2 吸引域最大化(Maximization of domain of attraction)

对于T-S离散模糊系统(2)及性能函数(3)的一个容许性能上界 α , 设计LQ模糊控制律(4), 使得闭环模糊系统(6)局部渐近稳定, 性能函数(3) 满足容许上界的前提下, 闭环系统吸引域的估计 $\Omega(P, 1)$ 最大化. 对于此类问题, 应用类似于4.1部分中的方法, 可以建立如下可行的带有LMIs 约束的优化问题(22), 其中, 约束条件a)和b) 保证了所设计的模糊控制律(4)使得闭环模糊系统(6)局部渐近稳定, 约束条件d)和e)保证了LQ性能函数满足容许性能上界, 条件c)中 γ 用以度量吸引域的大小, γ 的最小化可保证吸引域的最大化.

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{\gamma, X>0, Z, W_j, L_j, X_{ij}, V} : f = \gamma, \\ \text{s.t. a) 式(20),} \\ \quad \text{b) 式(15)(16) and (17),} \\ \quad \text{c) } \begin{bmatrix} -\gamma & * \\ x_c & -X \end{bmatrix} \leq 0, \quad c = 1, \dots, t, \\ \quad \text{d) } \begin{bmatrix} V & I \\ I & X \end{bmatrix} > 0, \\ \quad \text{e) } \text{tr } V < \alpha. \end{array} \right. \quad (22)$$

该优化问题(22)可通过MATLAB软件中LMI工具箱有效求解. 如果上述优化问题(22)有可行解 $X, Z, L_i (i = 1, \dots, r)$, 则可得LQ模糊控制律的局部增益矩阵为 $F_i = L_i Z^{-1} (i = 1, \dots, r)$, 由 $P = X^{-1}$, 得到闭环模糊系统(6)的吸引域的较大估计为 $\Omega(P, 1)$.

5 仿真例子(Numerical example)

考虑如下带有饱和执行器的非线性离散系统:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(k) - 0.5x_2(k) + \sigma_0(u_1(k)) \\ x_2(k) - 2\sin(x_1(k)) + 0.5\sigma_0(u_1(k)) + \sigma_0(u_2(k)) \end{bmatrix}. \quad (23)$$

该系统是文献[12] 中例子的执行器饱和情形. 进一步地, 考虑系统被调输出为 $z_1(k) = x_1(k) + \sigma_0(u(k))$ 的LQ模糊控制问题. 为了将该系统化为T-S模糊模型, 假设 $x_1(k) \in [-a, a]$, 其中 $a > 0$. 此时, 非线性系统(23)可表示为如下T-S模糊系统:

$$\left\{ \begin{array}{l} R_1 : \text{If } x_1(k) \text{ is } K_1, \text{ then} \\ \quad \begin{cases} x(k+1) = A_1 x(k) + B_1 \sigma_0(u(k)), \\ z(k) = C_1 x(k) + D_1 \sigma_0(u(k)), \end{cases} \\ R_2 : \text{If } x_1(k) \text{ is } K_2, \text{ then} \\ \quad \begin{cases} x(k+1) = A_2 x(k) + B_2 \sigma_0(u(k)), \\ z(k) = C_2 x(k) + D_2 \sigma_0(u(k)). \end{cases} \end{array} \right. \quad (24)$$

其中: $x(k) = [x_1(k), x_2(k)]^T$, $z(k) = [z_1(k), z_2(k)]^T$, $u(k) = [u_1(k), u_2(k)]^T$, 模糊集的隶属度函数 $K_1(x_1(k)), K_2(x_1(k))$ 及相应的矩阵分别为

$$\begin{aligned} K_1(x_1(k)) &= \begin{cases} \frac{a \sin x_1(k) - \sin a \cdot x_1(k)}{x_1(k) \cdot (a - \sin a)}, & x_1(k) \neq 0, \\ 1, & x_1(k) = 0, \end{cases} \\ K_2(x_1(k)) &= \begin{cases} \frac{a(x_1(k) - \sin x_1(k))}{x_1(k) \cdot (a - \sin a)}, & x_1(k) \neq 0, \\ 0, & x_1(k) = 0, \end{cases} \\ A_1 &= \begin{bmatrix} 1 & -0.5 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0.5 & 1 \end{bmatrix}, \quad C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ A_2 &= \begin{bmatrix} 1 & -0.5 \\ -2 \sin a & 1 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0.5 & 1 \end{bmatrix}, \\ C_2 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

为了方便, 考虑 $a = 1.5$ 的情形. 给定期望参考区域为 $\chi_R = \text{co}\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, 其中 $x_1 = [1, 0]^T$, $x_2 = [0, 1]^T$, $x_3 = [-1, 0]^T$, $x_4 = [0, -1]^T$. 对于T-S离散模糊系统(24) 以及给定期望参考凸区域 χ_R , 设计LQ模糊控制律(4), 保证系统(24) 的吸引域包含 χ_R 前提下, 使系统的LQ性能函数(3)的上界 J^* 最小化. 当执行器饱和参数为1时, 应用优化方法(21), 得到可行解:

$$\begin{aligned} L_1 &= \begin{bmatrix} -2.1926 & -1.8808 \\ 2.0431 & -1.1142 \end{bmatrix}, \quad L_2 = \begin{bmatrix} -2.0534 & -1.7371 \\ 0.1871 & -3.7457 \end{bmatrix}, \\ Z &= \begin{bmatrix} 2.5085 & 3.1182 \\ 3.1172 & 6.6621 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} 2.4604 & 3.0413 \\ 3.0413 & 6.5351 \end{bmatrix}, \\ V &= \begin{bmatrix} 0.9572 & -0.4453 \\ -0.4453 & 0.3605 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 0.9569 & -0.4453 \\ -0.4453 & 0.3603 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

由此可得: LQ性能函数的优化性能上界为 $J^* = \text{tr}\{V\} = 1.3177$, LQ 模糊控制律的增益矩阵为

$$F_1 = \begin{bmatrix} -1.2507 & 0.3031 \\ 2.4433 & -1.3109 \end{bmatrix}, \quad F_2 = \begin{bmatrix} -1.1821 & 0.2925 \\ 1.8481 & -1.4273 \end{bmatrix}.$$

图1~3分别给出了当初始状态为 $(x_1(0), x_2(0)) = (1.1, 2.55)$ 和饱和参数为1时闭环系统对应的状态响应曲线,饱和执行器的控制曲线及吸引域的估计.由图1可看出,在给定初始状态 $(x_1(0), x_2(0)) = (1.1, 2.55)$ 下,闭环系统的状态响应可以很快达到稳态,其中初始状态 $(x_1(0), x_2(0)) = (1.1, 2.55)$ 在吸引域中.图2给出了对应图1的饱和执行器的控制曲线,其中 $[v_1(k), v_2(k)] = [\sigma_0(u_1(k)), \sigma_0(u_2(k))]$,容易看到饱和执行器在控制初始阶段出现饱和现象.图3中椭圆区域是闭环系统的吸引域的估计.

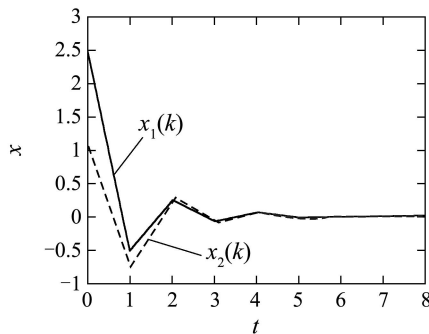


图1 闭环系统的状态轨迹

Fig. 1 State trajectory of closed-loop system

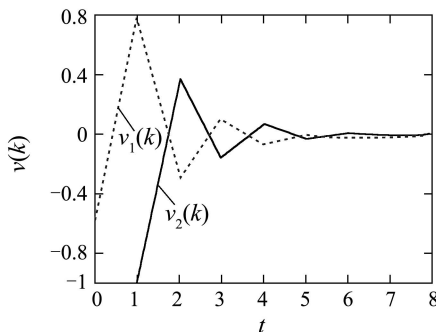


图2 饱和执行器的输出轨迹

Fig. 2 Output trajectory of saturating actuator

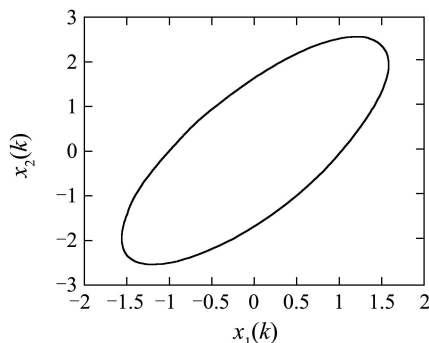


图3 吸引域的估计

Fig. 3 Estimate for the domain of attraction

6 结束语(Conclusion)

本文以T-S模糊方法研究了带有饱和执行器的T-S离散模糊系统的LQ模糊控制问题,运

用PDC技术、Lyapunov稳定理论,得到了T-S离散模糊系统存在LQ模糊控制律的判别条件,给出了LQ模糊控制律的设计方法及一个LQ性能上界.针对不同的设计目标提出了两类优化问题,并将这些优化问题转化为带有LMIs约束的可行性问题.最后,通过一个数值例子说明了所给方法的有效性.

参考文献(References):

- [1] TAKAGI T, SUGENO M. Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control[J]. *IEEE Trans on Systems, Man and Cybernetics*, 1985, 15(1): 116 – 132.
- [2] TANAKA K, SYGENO M. Stability analysis and design of fuzzy control systems[J]. *Fuzzy Sets Systems*, 1992, 45(2): 135 – 136.
- [3] TANAKA K, IKEDA T, WANG H O. Robust stabilization of a class of uncertain nonlinear systems via fuzzy control: quadratic stabilizability, H_∞ control theory, and linear matrix inequalities[J]. *IEEE Trans on Fuzzy Systems*, 1996, 4(1): 1 – 13.
- [4] TANAKA K, IKEDA T, WANG H O. Fuzzy regulators and fuzzy observers: relaxed stability conditions and LMI-based designs[J]. *IEEE Trans on Fuzzy Systems*, 1998, 6(2): 250 – 265.
- [5] WANG H O, TANAKA K, GRIFFIN M F. An approach to fuzzy control of nonlinear systems: stability and design issues[J]. *IEEE Trans on Fuzzy Systems*, 1996, 4(1): 14 – 23.
- [6] CAO Y Y, LIN Z L. Robust stability analysis and fuzzy-scheduling control for nonlinear systems subject to actuator saturation[J]. *IEEE Trans on Fuzzy Systems*, 2003, 11(1): 57 – 67.
- [7] HU T S, LIN Z L, CHEN B M. Analysis and design for discrete-time linear systems subject to actuator saturation[J]. *Systems & Control letters*, 2002, 45(2): 97 – 112.
- [8] CAO Y Y, LIN Z L. Stability analysis of discrete-time systems with actuator saturation by a saturation-dependent Lyapunov function[J]. *Automatica*, 2003, 39(7): 1235 – 1241.
- [9] KIM E, LEE H. New approaches to relaxed quadratic stability condition of fuzzy control systems[J]. *IEEE Trans on Fuzzy Systems*, 2000, 8(5): 523 – 534.
- [10] HU T S, LIN Z L. *Control Systems with Actuator Saturation: Analysis and Design*[M]. Boston: Birkhauser, 2001.
- [11] WU H N. Reliable LQ fuzzy control for continuous-time nonlinear systems with actuator faults[J]. *IEEE Trans on Systems, Man and Cybernetics*, 2004, 34(4): 1743 – 1752.
- [12] WU H N. Reliable LQ fuzzy control for nonlinear discrete-time systems via LMIs[J]. *IEEE Trans on Systems, Man and Cybernetics*, 2004, 34(2): 1270 – 1275.
- [13] BOYD S, GHAOUI L E, FERON E, et al. *Linear Matrix Inequalities in Systems and Control Theory*[M]. Philadelphia: SIAM, 1994.

作者简介:

刘 博 (1982—), 男, 助教, 研究方向为鲁棒控制、模糊控制, E-mail: molour@yahoo.com.cn;

贾新春 (1964—), 男, 教授, 现任山西大学数学科学学院副院长, 2003年获西安交通大学博士学位, 主要研究领域为鲁棒控制、模糊控制和智能信息处理等, E-mail: xchjia@sxu.edu.cn;

高一博 (1981—), 男, 硕士研究生, 研究方向为鲁棒控制、模糊控制, E-mail: gybkobe2005@163.com.