

基于状态观测的量化系统稳定性分析

谢林柏, 纪志成, 赵维一

(江南大学 电气自动化研究所, 江苏 无锡 214122)

摘要: 针对基于状态观测和信号量化的线性系统, 进行了稳定性分析与研究. 首先对状态观测误差系统在量化作用下的渐近稳定性进行了分析, 接着研究了对象系统本身在量化效应下的渐近稳定性, 得到了相应的稳定性条件, 同时针对对数型量化器, 给出了两个系统稳定性之间的关联. 最后, 给出了在时变量化作用下基于状态观测的控制策略和仿真例子.

关键词: 状态观测器; 信号量化; 渐近稳定; 不变域

中图分类号: TP273 **文献标识码:** A

Stability analysis of systems with signal quantization and state observation

XIE Lin-bo, JI Zhi-cheng, ZHAO Wei-yi

(Institute of Electrical Automation, Southern Yangtze University, Wuxi Jiangsu 214122, China)

Abstract: This paper is concerned with the asymptotic stability analysis of linear systems with signal quantization and state observation. First, the asymptotic stability analysis on error system under output feedback is given. Then, the same work is carried out to the plant system. The corresponding stability conditions are achieved and the relation of stability between plant system and error system is also presented explicitly under logarithmic type quantization. Finally, a hybrid quantized control strategy based on state observation is proposed, and a numerical example is given to illustrate the analysis approach.

Key words: state observer; signal quantization; asymptotic stability; invariant region

1 引言(Introduction)

信号的量化在信号处理和自动控制领域中使用非常普遍, 特别是现代控制系统越来越依赖计算机等数字设备的情形下, 例如网络控制系统(networked control systems)^[1]、远程控制系统等. 在量化作用下, 信号中会引入量化误差, 从而对控制系统的稳定性和性能带来不利的影响. 从本质上来看, 信号的量化过程是一个非线性过程, 但人们通常将量化误差归纳为理想的白噪声信号(量化噪声), 得到了广泛的应用^[2]. 为了简单起见, 将这样的系统称为量化系统. 对系统中的信号进行量化, 无论是连续系统还是离散系统, 主要目的是减少信道信息量的大小, 节约系统资源, 便于系统扩展和监控.

控制系统中的信号量化主要是针对系统的输入输出信号, 按控制策略的不同也有所区别, 主要有针对状态信号的量化、输入信号的量化和基于输出反

馈的量化等3种^[3,4]. 量化器按所采用的方法分主要有两大类^[5,6]: 均匀量化器(uniform quantizers)和对数量化器(logarithmic quantizers). 通常对数量化器的效果优于均匀量化器^[7]. 在量化过程中最常见的问题是信号量化的饱和问题和平衡点附近的性能下降问题. 前者是由于量化过程的非线性本质决定的, 而后者是由于信号在平衡点(通常是零点)附近量化的结果通常为零而造成系统的性能下降.

本文主要针对采用时变的对数量化器和状态观测器的控制系统进行稳定性分析, 特别是对误差系统和对象系统的稳定性及其两个系统稳定性之间的关联做了详细的分析研究, 得到了一种量化上的结果, 这是本文的主要创新工作.

2 问题的提出(Problem formulation)

本文考虑的量化器定义为函数^[3] $q: \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{D}$, $\mathbb{D}$ 是空间 $\mathbb{R}^l$ 的有限子集. 由此量化函数 q 将 $\mathbb{R}^l$ 空间分

为可数(有限)的量化区域 $\{z \in \mathbb{R}^l : q(z) = i\}, i \in \mathbb{D}$. 同时函数 q 还满足下列条件:

- 1) 如果 $|z| \leq M$, 则 $|q(z) - z| \leq \Delta$;
- 2) 如果 $|z| \geq M$, 则 $|q(z)| \geq M - \Delta$.

M 和 Δ 分别称为量化器 q 的范围和量化误差, $|\cdot|$ 表示向量的欧拉范数. 通常设定: 如果在平衡点附近的时候, 量化器输出为零. 在控制系统研究中为便于分析, 量化器具有如下的形式:

$$q_u = \mu q\left(\frac{z}{\mu}\right). \quad (1)$$

其中: $\mu > 0$, 因此量化器的范围和量化误差变为 $M\mu$ 和 $\Delta\mu$; 参数 μ 可视为放大系数: 增大 μ 则增大了量化器的范围和量化误差, 减小 μ 则减小了量化器的范围和量化误差. 带放大系数的量化器具有时变的特性^[3,4,7], 可以作为重要的设计参数进行调节来实现控制系统的分析与综合. 例如, 常用的一种对数型标量量化划分区域为

$$\Omega_0 = (-a_0, a_0), \Omega_{\pm j} = \pm[a_0\delta^j, a_0\delta^{j+1}).$$

其中: $a_0 > 0, \delta > 1, j$ 为正整数. 当 $z \in \Omega_0$ 时, 则 $q(z) = 0$, 当 $z \in \Omega_{\pm j}$ 时, $q(z)$ 为区间的中点值.

本文研究如下形式的离散时间线性系统 G :

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k), \\ y(k) &= Cx(k). \end{aligned} \quad (2)$$

其中: A, B, C 分别为系统矩阵、输入矩阵和输出矩阵, $x(k) \in \mathbb{R}^n, u(k) \in \mathbb{R}^m$ 和 $y(k) \in \mathbb{R}^p$ 分别为状态向量、控制输入向量和输出向量. 假设系统状态无法直接得到, (A, B) 可控、 (A, C) 可观测, 采用状态观测器的方法对系统进行镇定. 系统结构如图1所示. 其中: K 为控制器. q_1, q_2 为量化器, 量化范围和量化误差分别为 $M_1\mu_1, \Delta_1\mu_1$ 和 $M_2\mu_2, \Delta_2\mu_2$.

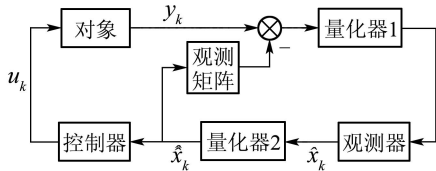


图1 基于状态观测的量化系统

Fig. 1 Quantized system with state observer

采用的系统观测器方程为

$$\begin{aligned} \hat{x}(k+1) &= \\ &A\hat{x}(k) + Bu(k) + L\mu_1 q_1\left(\frac{y(k) - C\hat{x}(k)}{\mu_1}\right) - \\ &LC(\hat{x}(k) - \hat{\hat{x}}(k)). \end{aligned} \quad (3)$$

由于系统采用了两个量化器, 为了抵消量化信号 $\hat{\hat{x}}(k)$ 的影响, 在标准的状态观测器方程中添加了一个抵消项 $LC(\hat{x}(k) - \hat{\hat{x}}(k))$, 便于实现. 这种

基于量化信号的观测器设计思想源于文献[5], 但该文只考虑了时不变的信号量化情形, 从扩展系统的角度来研究系统的稳定性; 而本文采用上述模型, 从两个系统稳定性之间的关联入手, 利用Lyapunov稳定性理论得到了误差系统与对象系统稳定性之间的量化关系. 在方程(3)中, L 为观测器的增益, 使得 $A - LC$ 为稳定矩阵. 状态观测误差定义为 $e(k) = x(k) - \hat{x}(k)$, 令 $e_2(k) = \hat{x}(k) - \hat{\hat{x}}(k)$ 表示量化器 q_2 的量化误差, 控制律取为 $u(k) = K\hat{\hat{x}}(k)$, 使得 $A + BK$ 为稳定矩阵. 为简化起见, 将 $x(k)$ 等简写为 x_k . 结合式(2)(3)及控制律表示式可得到

$$\hat{x}_{k+1} = A\hat{x}_k + Bu_k + LCe_k - Ld_k, \quad (4)$$

$$x_{k+1} = (A + BK)x_k - BK(e_k + e_{2k}), \quad (5)$$

$$e_{k+1} = (A - LC)e_k + Ld_k. \quad (6)$$

其中 $d_k = C(e_k + e_{2k}) - \mu_1 q_1\left(\frac{C(e_k + e_{2k})}{\mu_1}\right)$, d_k 为量化器 q_1 的量化误差.

对控制系统(2), 需要解决的问题是如何选择合适的控制策略(包括观测器的设计和量化器参数的选择等), 使得整个系统, 包括观测误差系统和对象系统本身达到渐近稳定.

3 稳定性条件(Stability conditions)

为了便于说明, 引入引理1.

引理1 如果 (A, B) 可控, 则存在正定矩阵 $P > 0, Q > 0$ 及矩阵 K , 使得 $A + BK$ 稳定, 并且满足 $(A + BK)^T P(A + BK) - P = -Q$ 成立.

在引理1的基础上, 对观测误差系统(6)的稳定性有如下的结论:

定理1 对 $\epsilon \in (0, 1), P > 0, Q > 0$ 且 $(A - LC)^T P(A - LC) - P = -Q$, 当满足

$$\sqrt{\frac{\lambda_m(P)}{\lambda_M(P)}} \geq \frac{1}{1 - \epsilon} \frac{R\mu_1\Delta_1\|C\|}{M_1\mu_1 - \mu_2\Delta_2\|C\|} \quad (7)$$

时, 则椭圆

$$\begin{aligned} R_1(\mu_1, \mu_2) &= \\ &\left\{ e_k : e_k^T P e_k \leq \lambda_m(P) \left(\frac{M_1\mu_1}{\|C\|} - \mu_2\Delta_2 \right)^2 \right\}, \\ R_2(\mu_1, \mu_2) &= \\ &\left\{ e_k : e_k^T P e_k \leq \lambda_M(P) \frac{R^2\mu_1^2\Delta_1^2}{(1 - \epsilon)^2} \right\} \end{aligned}$$

均为误差系统的不变域, 且当系统状态观测误差落入 $R_1(\mu_1, \mu_2)$ 内时, 经过有限步 S 可到达 $R_2(\mu_1, \mu_2)$. 其中:

$$\begin{aligned} R &= \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + (1 - \epsilon)\beta\lambda_m(Q)}}{\lambda_m(Q)}, \\ \alpha &= \|(A - LC)^T PL\|, \beta = \|L^T PL\|, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H &= M_1\mu_1 - \mu_2\Delta_2\|C\|, \\
S &= \lceil \min(S_1, S_2) \rceil, \quad S_1 = \frac{E_1 - E_2}{F}, \\
E_1 &= \log(\lambda_M(P)R^2\mu_1^2\Delta_1^2\|C\|^2), \\
E_2 &= \log(\lambda_m(P)(M_1\mu_1 - \mu_2\Delta_2\|C\|)^2(1-\epsilon)^2), \\
F &= \log(1 - \epsilon\lambda_m(Q)/\lambda_M(P)), \\
S_2 &= \frac{1}{\epsilon\lambda_m(Q)} \left[\frac{\lambda_m(P)H^2(1-\epsilon)^2}{R^2\mu_1^2\Delta_1^2\|C\|^2} - \lambda_M(P) \right].
\end{aligned}$$

$\lceil x \rceil$ 表示大于 x 的最小整数, $\lambda_m(\cdot)$ 和 $\lambda_M(\cdot)$ 分别表示最小和最大特征根, $\|\cdot\|$ 表示矩阵范数.

证 对观测误差系统(6), 设Lyapunov函数为 $V(k) = e_k^T P e_k$, 则

$$\begin{aligned}
V(k+1) - V(k) &= \\
e_{k+1}^T P e_{k+1} - e_k^T P e_k &= \\
e_k^T [(A-LC)^T P (A-LC) - P] e_k &+ \\
d_k^T L^T P L d_k + 2e_k^T (A-LC)^T P L d_k &\leq \\
-e_k^T Q e_k + 2e_k^T (A-LC)^T P L d_k &+ \\
d_k^T L^T P L d_k &\leq \\
-\lambda_m(Q)|e_k|^2 + 2|e_k|\alpha\Delta_1\mu_1 + \beta\Delta_1^2\mu_1^2 &< \\
-\epsilon\lambda_m(Q)|e_k|^2. &
\end{aligned}$$

上式成立首先要满足 $|d_k| \leq \Delta_1\mu_1$, 即 $|C(e_k + e_{2k})/\mu_1| \leq M_1$. 然后

$$(1-\epsilon)\lambda_m(Q)|e_k|^2 - 2\mu_1\Delta_1\alpha|e_k| - \beta\mu_1^2\Delta_1^2 > 0, \quad (8)$$

求得

$$|e_k| > \frac{R\mu_1\Delta_1}{1-\epsilon}, \quad 0 < \epsilon < 1. \quad (9)$$

由此可以构造两个有界球:

$$\begin{aligned}
B_1(\mu_1, \mu_2) &= \left\{ e_k : |e_k| \leq \frac{M_1\mu_1}{\|C\|} - \mu_2\Delta_2 \right\}, \\
B_2(\mu_1, \mu_2) &= \left\{ e_k : |e_k| \leq \frac{R\mu_1\Delta_1}{1-\epsilon} \right\}.
\end{aligned}$$

在球 $B_1(\mu_1, \mu_2)$ 和 $B_2(\mu_1, \mu_2)$ 的基础上分别得到相应的水平集

$$\begin{cases} \mathfrak{R}_1(\mu_1, \mu_2) = \\ \left\{ e_k : e_k^T P e_k \leq \lambda_m(P) \left(\frac{M_1\mu_1}{\|C\|} - \mu_2\Delta_2 \right)^2 \right\}, \\ \mathfrak{R}_2(\mu_1, \mu_2) = \\ \left\{ e_k : e_k^T P e_k \leq \lambda_M(P) \frac{R^2\mu_1^2\Delta_1^2}{(1-\epsilon)^2} \right\}. \end{cases} \quad (10)$$

若式(7)成立, 则有 $B_2(\mu_1, \mu_2) \subset \mathfrak{R}_2(\mu_1, \mu_2) \subset \mathfrak{R}_1(\mu_1, \mu_2) \subset B_1(\mu_1, \mu_2)$. 由Lyapunov函数下降的特性可知 $\mathfrak{R}_1(\mu_1, \mu_2)$ 和 $\mathfrak{R}_2(\mu_1, \mu_2)$ 均为误差系统的

不变域, 且误差信号从不变域 $\mathfrak{R}_1(\mu_1, \mu_2)$ 经过有限步可到达不变域 $\mathfrak{R}_2(\mu_1, \mu_2)$. 当误差向量落入不变域 $\mathfrak{R}_1(\mu_1, \mu_2)$ 内后, 由Lyapunov函数的差分得

$$\begin{aligned}
V_{k+1} &\leq \left(1 - \epsilon \frac{\lambda_m(Q)}{\lambda_M(P)} \right) V_k \Rightarrow V_{k+s} \leq \\
&\left(1 - \epsilon \frac{\lambda_m(Q)}{\lambda_M(P)} \right)^s V_k \leq \\
&\left(1 - \epsilon \frac{\lambda_m(Q)}{\lambda_M(P)} \right)^s \frac{\lambda_m(P)}{\|C\|^2} (M_1\mu_1 - \mu_2\Delta_2\|C\|)^2.
\end{aligned}$$

假设经过 S 步后希望误差向量开始进入不变域 $\mathfrak{R}_2(\mu_1, \mu_2)$, 则有

$$\begin{aligned}
V_{k+s} &\leq \\
&\left(1 - \epsilon \frac{\lambda_m(Q)}{\lambda_M(P)} \right)^s \frac{\lambda_m(P)}{\|C\|^2} (M_1\mu_1 - \mu_2\Delta_2\|C\|)^2 \leq \\
&\lambda_M(P) \frac{R^2\mu_1^2\Delta_1^2}{(1-\epsilon)^2}.
\end{aligned} \quad (11)$$

求解不等式(11)可得 $S \geq \frac{E_1 - E_2}{F}$. 同理根据式(9)有

$$V_{k+1} - V_k \leq -\epsilon\lambda_m(Q)|e_k|^2 \leq -\epsilon\lambda_m(Q) \frac{R^2\mu_1^2\Delta_1^2}{(1-\epsilon)^2}.$$

令 $E = \epsilon\lambda_m(Q)R^2\mu_1^2\Delta_1^2/(1-\epsilon)^2$, 则有 $V_{k+s} - V_k \leq -SE$, 当 $e_k \in \mathfrak{R}_1(\mu_1, \mu_2)$ 时, 则希望 S 步后误差向量达到不变域 $\mathfrak{R}_2(\mu_1, \mu_2)$. 即

$$\begin{aligned}
V_{k+s} &\leq V_k - SE \leq \\
&\frac{\lambda_m(P)(M_1\mu_1 - \mu_2\Delta_2\|C\|)^2}{\|C\|^2} - SE \leq \\
&\lambda_M(P) \frac{R^2\mu_1^2\Delta_1^2}{(1-\epsilon)^2}.
\end{aligned} \quad (12)$$

求解不等式(12)得 $S \geq \frac{1}{\epsilon\lambda_m(Q)} \left[\frac{\lambda_m(P)H^2(1-\epsilon)^2}{R^2\mu_1^2\Delta_1^2\|C\|^2} - \lambda_M(P) \right]$, 综合考虑上述两种情况, 取 $S = \lceil \min\{S_1, S_2\} \rceil$.

类似地, 针对对象系统也有如下的结论.

推论 1 对 $\xi \in (0, 1)$, $\tilde{P} > 0$, $\tilde{Q} > 0$ 且满足Lyapunov方程 $(A+BK)^T \tilde{P} (A+BK) - \tilde{P} = -\tilde{Q}$,

则球域 $\left\{ x_k : |x_k| \leq \frac{\tilde{R}M_1\mu_1}{(1-\xi)\|C\|} \right\}$ 对系统(5)是二次吸引的. 其中 $\tilde{R} = \frac{\tilde{\alpha} + \sqrt{\tilde{\alpha}^2 + (1-\xi)\tilde{\beta}\lambda_m(\tilde{Q})}}{\lambda_m(\tilde{Q})}$, $\tilde{\alpha} = \|K^T B^T \tilde{P} (A+BK)\|$, $\tilde{\beta} = \|K^T B^T \tilde{P} B K\|$.

证 令Lyapunov函数为 $\tilde{V}(k) = x_k^T \tilde{P} x_k$, 只需要证明满足条件 $\Delta\tilde{V}(k) < -\xi\lambda_m(\tilde{Q})|x_k|^2$ 即可, 余下的部分类似于定理1, 证毕.

基于状态观测的控制策略首先要保证误差系统的稳定性, 同时也要设计控制参数和信号量化方式

保持对象系统本身的稳定性,为了在分析误差系统稳定性的同时研究对象系统的稳定过程并分析两个稳定性之间的关联,本文构造如下状态向量的椭圆域集合

$$\begin{aligned} \tilde{R}_0(\mu_1, \mu_2) = \\ \left\{ x_k : x_k^T P x_k \leq \left[\frac{M_1 \tilde{R}(1-\epsilon)}{\Delta_1 R(1-\xi) \|C\|} \right]^2 \cdot \right. \\ \left. \lambda_m(P) \left(\frac{M_1 \mu_1}{\|C\|} - \mu_2 \Delta_2 \right)^2 \right\}. \end{aligned} \quad (13)$$

为简单起见,令常数 $\Gamma = \frac{M_1 \tilde{R}(1-\epsilon)}{\Delta_1 R(1-\xi) \|C\|}$.

4 控制策略及系统稳定性之间的关联(Control strategy and relationships)

由前面的讨论可知,只要误差向量落入不变域后,就可以保证平衡点附近区域对系统状态的二次吸引,要想进一步达到渐近稳定,则可以通过调节量化器的参数 μ_1 和 μ_2 , 一步步缩小不变域的大小来实现,这是基于信号量化所采用的控制策略.

由于系统的状态不能直接得到,因此状态观测误差也无法直接测出.为了判断误差向量何时进入不变域,引入如下的引理,不失一般性,假设系统(5)(6)只含有实数极点.

引理 2^[5] 设系统(5)和(6)的约当变换为 $J_1 = H_1(A+BK)H_1^{-1}$, $J_2 = H_2(A-LC)H_2^{-1}$, 其中 H_1 和 H_2 分别为变换矩阵且令 $z_1(k) = H_1 x(k)$, $z_2(k) = H_2 x(k)$. 定义绝对值算子 $\bar{H} : \mathbb{R}^{n_1 \times n_2} \rightarrow \mathbb{R}^{n_1 \times n_2}$, 若 $H = [h_{ij}]$, 则 $\bar{H} = [\bar{h}_{ij}]$. 对数型量化器 q_1, q_2 , 构造如下的系统:

$$\begin{bmatrix} r_1(k+1) \\ r_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{r11} & A_{r12} \\ A_{r21} & A_{r22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1(k) \\ r_2(k) \end{bmatrix}. \quad (14)$$

其中:

$$\begin{aligned} A_{r11} &= \bar{J}_1 + \frac{\Delta_2 - 1}{2} \overline{H_1 B K H_1^{-1}}, \\ A_{r12} &= \overline{H_1 B K H_2^{-1}} + \frac{\Delta_2 - 1}{2} \overline{H_1 B K H_2^{-1}}, \\ A_{r21} &= \frac{\Delta_1 - 1}{2} \frac{\Delta_2 - 1}{2} \overline{H_2 L C H_1^{-1}}, \\ A_{r22} &= \bar{J}_2 + \frac{\Delta_1 - 1}{2} \overline{H_2 L C H_2^{-1}} + \\ &\quad \frac{\Delta_1 - 1}{2} \frac{\Delta_2 - 1}{2} \overline{H_2 L C H_2^{-1}}, \end{aligned}$$

系统初始值取为 $r_{1j}(0) = \|H_1\| \|x(0)\|_\infty$, $r_{2j}(0) = \|H_2\| \|x(0)\|_\infty$, $j = 1, \dots, n$, 则有 $|z_{ij}(k)| \leq [r_i(k)]_j$ 成立, $i = 1, 2; j = 1, \dots, n$. $z_{ij}(k)$ 表示向量 $z_i(k)$ 的第 j 个元素, $[r_i(k)]_j$ 表示向量 $r_i(k)$ 的第 j 个元素.

定理 2 如果 M_1 相对于 Δ_1 足够大, 满足

$$\sqrt{\frac{\lambda_m(P)}{\lambda_M(P)}} \geq \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta \lambda_m(Q)}}{\lambda_m(Q)} \frac{\Delta_1 \|C\|}{M_1 - \Delta_2 \|C\|}, \quad (15)$$

则存在基于状态观测的量化反馈控制律, 使得系统(5)(6)渐近稳定.

证 为了简化设计过程, 选择量化参数 $\mu_1 = \mu_2$ 并且随步长 k 的变化而变化, 同时设定足够大的量化范围 M_1 保证 $\frac{\Delta_2}{M_1} \|C\| \leq \frac{\mu_1}{\mu_2} = 1$ 成立.

“zooming-out”阶段

在这一阶段里将控制律设定为 $K = 0$, 即系统处于开环状态但观测器仍在工作. 取 $\mu_1(0) = \mu_2(0) = 1$, 然后随着步长 k 的增大而增大. $\mu_1(k), \mu_2(k)$ 增大的方式可以采取如下的方式: 取一个正整数 τ , 每隔 τ 步, 令 $\mu_1(k) = \mu_2(k) = n\tau \|A\|^\tau$, $n = 1, 2, \dots$. 这样使得观测信号 $\hat{x}_k$ 很快进入量化器 q_2 的工作范围, 即存在一个整数 $\hat{k}$, 满足 $|\hat{x}(\hat{k})/\mu_2(\hat{k})| \leq M_2$.

由引理2可得 $|z_1(k)|^2 \leq |r_1(k)|^2$, $|z_2(k)|^2 \leq |r_2(k)|^2$. 因此有

$$\begin{aligned} e_k^T P e_k &= z_2^T(k) H_2^{-T} P H_2^{-1} z_2(k) \leq \\ &\lambda_M(H_2^{-T} P H_2^{-1}) |z_2(k)|^2 \leq \\ &\lambda_M(H_2^{-T} P H_2^{-1}) |r_2(k)|^2 \end{aligned} \quad (16)$$

成立. 找到正整数 $\hat{k}$ 后继续增大 $\mu_1(k)$ 和 $\mu_2(k)$, 直到

$$|r_2(k)| \leq \sqrt{\frac{\lambda_m(P)}{\lambda_M(H_2^{-T} P H_2^{-1})}} \left(\frac{M_1 \mu_1}{\|C\|} - \mu_2 \Delta_2 \right) \quad (17)$$

成立, 由式(16)可知观测误差向量 e_k 已经进入了不变域 $\mathcal{R}_1(\mu_1, \mu_2)$.

为了同步分析对象系统的稳定性, 同时要考虑状态向量 x_k 的状况. 由

$$\begin{aligned} x_k^T P x_k &= z_1^T(K) H_1^{-T} P H_1^{-1} z_1(k) \leq \\ &\lambda_M(H_1^{-T} P H_1^{-1}) |z_1(k)|^2 \leq \\ &\lambda_M(H_1^{-T} P H_1^{-1}) |r_1(k)|^2 \end{aligned}$$

可知, 当

$$|r_1(k)| \leq \sqrt{\frac{\lambda_m(P) \Gamma^2}{\lambda_M(H_1^{-T} P H_1^{-1})}} \left(\frac{M_1 \mu_1}{\|C\|} - \mu_2 \Delta_2 \right) \quad (18)$$

时, 则 x_k 一定进入了区域 $\tilde{R}_0(\mu_1, \mu_2)$. 若条件(18)不满足, 则可继续增大 μ_1 和 μ_2 , 直到 x_k 进入区域 $\tilde{R}_0(\mu_1, \mu_2)$ 为止. 当条件(17)(18)均满足时, 固定此时刻的 μ_1 和 μ_2 并标记为 k_0 , “zooming-out”阶段完成.

“zooming-in”阶段

当 $k > k_0$ 时, 控制律开始工作. 对于式(15), 总可

以找到合适的 $\epsilon \in (0, 1)$, 使得

$$\sqrt{\frac{\lambda_m(P)}{\lambda_M(P)}} \geq \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + (1-\epsilon)\beta\lambda_m(Q)}}{\lambda_m(Q)} \frac{\Delta_1 \|C\|}{M_1 - \Delta_2 \|C\|} \frac{1}{1-\epsilon} \quad (19)$$

成立, 即式(7). 此时可以应用定理1来讨论观测误差向量及误差系统的渐近稳定性了. 在 $k \in [k_0, k_0 + S)$ 时, 取 $\mu_1(k) = \mu_2(k) = \mu_1(k_0) = \mu_2(k_0)$, 经过 S 步 e_k 从 $\mathfrak{R}_1(\mu_1(k), \mu_2(k))$ 到达 $\mathfrak{R}_2(\mu_1(k), \mu_2(k))$.

在 $k \in [k_0 + S, k_0 + 2S)$ 时, 取 $\mu_1(k) = \Sigma\mu_1(k_0) = \mu_2(k)$, 其中 Σ 由定理1得到

$$\Sigma = \frac{R\Delta_1\|C\|}{(M_1 - \Delta_2\|C\|)(1-\epsilon)} \sqrt{\frac{\lambda_M(P)}{\lambda_m(P)}} < 1.$$

因此 $\mu_1(k_0 + S) = \mu_2(k_0 + S) < \mu_1(k_0)$. 在这种交替下, 不变域 $\mathfrak{R}_2(\mu_1(k), \mu_2(k))$ 在面对老的 μ_1 和 μ_2 时就是 $\mathfrak{R}_1(\mu_1(k), \mu_2(k))$ 取新的 μ_1 和 μ_2 值的情形. 重复这样的交替:

当 $k \in [k_0 + 2S, k_0 + 3S)$ 时, 取 $\mu_1(k) = \mu_2(k) = \Sigma\mu_1(k_0 + S) = \Sigma^2\mu_1(k_0), \dots$,

当 $k \in [k_0 + jS, k_0 + (j+1)S)$ 时, 取 $\mu_1(k) = \mu_2(k) = \Sigma^j\mu_1(k_0), \dots$.

当 $j \rightarrow \infty$ 时, $\mu_1(k) = \mu_2(k) \rightarrow 0$, 即有 $e(k) \rightarrow 0$, $x(k) \rightarrow 0$, 系统渐近稳定. 证毕.

对对象系统(5), 在同步分析误差系统的稳定性时, 有如下的结论.

定理3 针对误差系统(6)及定理2的镇定策略, 如果参数 $\xi, \epsilon, P, Q, \tilde{P}$ 及 $\tilde{Q}$ 满足条件

$$\frac{\xi}{\epsilon} \geq \frac{\lambda_M(\tilde{P})}{\lambda_M(P)} \frac{\lambda_m(\tilde{Q})}{\lambda_m(Q)}, \quad (20)$$

则对象系统从区域 $\tilde{R}_0(\mu_1, \mu_2)$ 出发, 沿着不变域序列 $\{\tilde{R}_t(\mu_1(k), \mu_2(k))\}$, $t \in N$, 趋于平衡点. 其中:

$$\begin{aligned} \tilde{R}_t(\mu_1(k), \mu_2(k)) = \\ \left\{ x(k) : x_k^T \tilde{P} x_k \leq \right. \\ \left. \left(\Gamma^2 \frac{\lambda_M(\tilde{P})}{\lambda_m(P)} \right) \eta^{tS} \lambda_M(P) \frac{R^2 \mu_1^2(k) \Delta_1^2}{(1-\epsilon)^2} \right\}, \\ \eta = \frac{1 - \xi \lambda_m(\tilde{Q}) / \lambda_M(\tilde{P})}{1 - \epsilon \lambda_m(Q) / \lambda_M(P)}, \end{aligned}$$

且从 $\tilde{R}_t(\mu_1, \mu_2)$ 经有限步 S 到达 $\tilde{R}_{t+1}(\mu_1, \mu_2)$.

证 由推论1可知, $\tilde{V}_{k+1} - \tilde{V}_k < -\xi \lambda_m(\tilde{Q}) |x_k|^2$, 得到

$$\tilde{V}_{k+1} - \tilde{V}_k < -\xi \frac{\lambda_m(\tilde{Q})}{\lambda_M(\tilde{P})} \tilde{V}_k \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \tilde{V}_{k+S} &< \left(1 - \xi \frac{\lambda_m(\tilde{Q})}{\lambda_M(\tilde{P})} \right)^S \tilde{V}_k \Rightarrow \\ \tilde{V}_{k+S} &< \left(1 - \xi \frac{\lambda_m(\tilde{Q})}{\lambda_M(\tilde{P})} \right)^S \frac{\lambda_M(\tilde{P})}{\lambda_m(P)} (x_k^T P x_k). \end{aligned}$$

由于状态向量从 $\tilde{R}_0(\mu_1(k_0), \mu_2(k_0))$ 出发, 带入上式得

$$\begin{aligned} \tilde{V}_{k+S} &< \\ &\left(\frac{1 - \xi \lambda_m(\tilde{Q}) / \lambda_M(\tilde{P})}{1 - \epsilon \lambda_m(Q) / \lambda_M(P)} \right)^S \frac{\lambda_M(\tilde{P})}{\lambda_m(P)} \Gamma^2 \left(1 - \epsilon \frac{\lambda_m(Q)}{\lambda_M(P)} \right)^S \\ &\frac{\lambda_m(P)}{\|C\|^2} (M_1 \mu_1(k_0) - \mu_2(k_0) \Delta_2 \|C\|)^2. \end{aligned}$$

因经过 S 步后 e_k 从 $\mathfrak{R}_1(\mu_1(k), \mu_2(k))$ 到达 $\mathfrak{R}_2(\mu_1(k), \mu_2(k))$, 则 x_k 满足

$$\begin{aligned} \tilde{V}_{k+S} &< \left(\frac{1 - \xi \lambda_m(\tilde{Q}) / \lambda_M(\tilde{P})}{1 - \epsilon \lambda_m(Q) / \lambda_M(P)} \right)^S \frac{\lambda_M(\tilde{P})}{\lambda_m(P)} \Gamma^2 \\ &\lambda_M(P) \frac{R^2 \mu_1^2(k_0) \Delta_1^2}{(1-\epsilon)^2}, \end{aligned} \quad (21)$$

即 $\tilde{V}_{k+S} < \frac{\lambda_M(\tilde{P})}{\lambda_m(P)} \Gamma^2 \eta^S \lambda_M(P) \frac{R^2 \mu_1^2(k_0) \Delta_1^2}{(1-\epsilon)^2}$. 在面对老的 μ_1 和 μ_2 时, 式(21)即为

$$\begin{aligned} \tilde{V}_{k+S} &< \frac{\lambda_M(\tilde{P})}{\lambda_m(P)} \Gamma^2 \eta^S \frac{\lambda_m(P)}{\|C\|^2} (M_1 \mu_1(k_0 + S) - \\ &\mu_2(k_0 + S) \Delta_2 \|C\|)^2. \end{aligned} \quad (22)$$

重复上述步骤并依次类推得

$$\begin{aligned} \tilde{V}_{k+2S} &< \frac{\lambda_M(\tilde{P})}{\lambda_m(P)} \Gamma^2 \eta^{2S} \lambda_M(P) \frac{R^2 \mu_1^2(k_0 + S) \Delta_1^2}{(1-\epsilon)^2}, \\ &\vdots \\ \tilde{V}_{k+tS} &< \frac{\lambda_M(\tilde{P})}{\lambda_m(P)} \Gamma^2 \eta^{tS} \lambda_M(P) \frac{R^2 \mu_1^2(k_0 + (t-1)S) \Delta_1^2}{(1-\epsilon)^2}. \end{aligned}$$

当 $t \in N$ 时, 上述式子组成了系统的不变域序列 $\{\tilde{R}_t(\mu_1(k), \mu_2(k))\}$. 为了保证在 $t \rightarrow \infty$ 时 $\tilde{V}_{k+tS} \rightarrow 0$, 令 $\eta \leq 1$, 即得(20)式. 证毕.

5 仿真研究(Simulations)

考虑如下的系统模型

$$\begin{cases} x(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1.6 & 1 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \end{bmatrix} u(k), \\ y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0.2 \end{bmatrix} x(k). \end{cases} \quad (23)$$

取正定矩阵 $Q = \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$, $\tilde{Q} = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$, 由于本文主要对系统的稳定性进行分析, 不涉及控制系统的设计, 因此采用极点配置的方法得到观测器增益和控

制律参数为

$$L = \begin{bmatrix} 0.7694 & 1.9032 \end{bmatrix}^T,$$

$$K = \begin{bmatrix} -0.5986 & -1.1027 \end{bmatrix}.$$

相应的Lyapunov矩阵为

$$P = \begin{bmatrix} 16.8306 & -8.4630 \\ -8.4630 & 19.7592 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{P} = \begin{bmatrix} 19.2091 & 3.8875 \\ 3.8875 & 7.3172 \end{bmatrix}.$$

为了适应状态观测信号的振荡过程,对数量化参数分别取为 $M_1 = 7.0880$, $M_2 = 10.2067$, $\Delta_1 = 0.5907$, $\Delta_2 = 0.8506$. 由定理1和定理3,选择 $\epsilon = 0.07$, $\xi = 0.1795$. 按照定理2设置控制策略,得到仿真结果如图2~图5所示. 图中: e_k 为误差信号, x_k 为状态信号, x_{bk} 为状态观测信号, $V(e_k)$, $V(x_k)$ 为系统的Lyapunov函数值.

从仿真结果可以看到,为了使系统状态落入初始椭圆集合,在zooming-out阶段系统有发散的趋势,这是由于系统此时处于开环状态并且对象本身是不稳定系统所致. 在进入zooming-in阶段后(第5步左右),对象系统和误差系统都开始进入收敛椭圆集合,随着步长的增大,两个系统都趋于原点了.

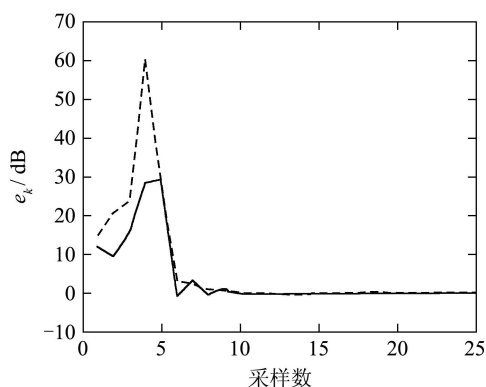


图2 观测误差动态过程

Fig. 2 Dynamics of observation error

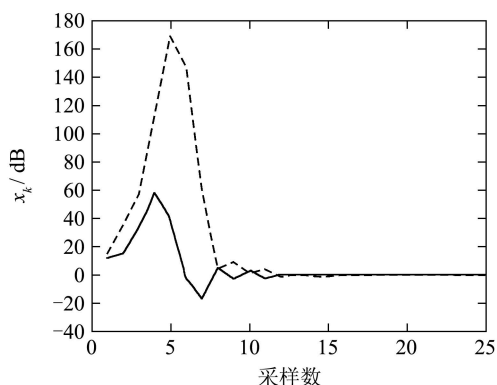


图3 状态响应过程

Fig. 3 State responses

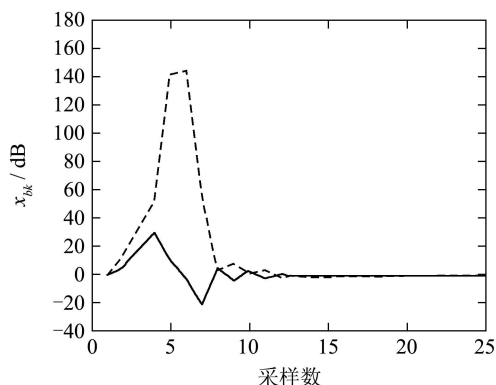


图4 状态观测值仿真

Fig. 4 State observation values

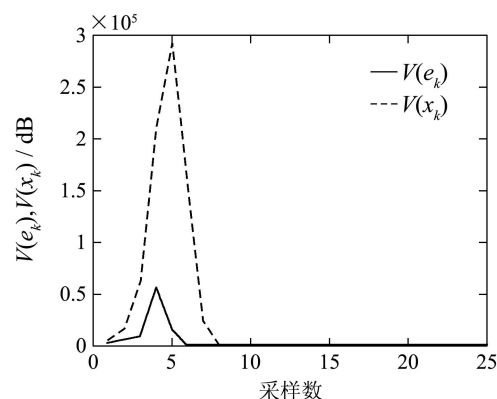


图5 Lyapunov函数值大小

Fig. 5 Lyapunov function values

6 结论(Conclusion)

本文针对基于状态观测和信号量化的线性系统稳定性进行了分析与研究. 在数字化的控制系统中,信号的量化会给系统带来量化误差并对系统的性能产生影响. 首先对误差系统和对象系统的稳定性条件进行了研究,得到了系统对平衡点附近区域二次吸引的充分条件;接着分析了在时变对数量化器作用下基于状态观测的控制策略,将量化器放大参数的选择和改变作为调节系统渐近稳定的主要方式;最后详细地分析了误差系统和对象系统稳定性之间的量化关系,得到了系统渐近稳定间的内在联系.

参考文献(References):

- [1] BUSHNELL L G. Special section on network & control[J]. *IEEE Control Systems Magazine*, 2001, 21(1): 22 – 99.
- [2] MILLER R K, MICHEL A N, FARRELL J A. Quantizer effects on steady-state error specification of digital feedback control systems[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1989, 34(6): 651 – 654.
- [3] LIBERZON D. Hybrid feedback stabilization of systems with quantized signals[J]. *Automatica*, 2003, 39(9): 1543 – 1554.
- [4] BROCKETT R W, LIBERZON D. Quantized feedback stabilization of linear systems[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2000, 45(7): 1279 – 1289.

- variations[C]//*Proc of American Control Conference*. Philadelphia, PA: IEEE Press, 1998: 2837 – 2841.
- [4] DORATO P. Non-fragile controllers design: an overview[C]// *Proc of American Control Conference*. Philadelphia, PA: IEEE Press, 1998: 2829 – 2831.
- [5] GUAN X, ZHANG Q. Design of resilient guaranteed cost controllers for a class of generalized systems[C]//*Proc of the 4th World Congress on Intelligent Control and Automation*. Shanghai: IEEE Press, 2002: 160 – 164.
- [6] MAHMOUD M S. Resilient linear filtering of uncertain systems[J]. *Automatica*, 2004, 40(10): 1797 – 1802.
- [7] ZHU S, CHENG Z, FENG J. Delay-dependent robust stability criterion and robust stabilization for uncertain singular time-delay systems[C]//*Proc of American Control Conference*. Portland, Oregon: IEEE Press, 2005: 2839 – 2844.
- [8] PETERSON I R. A stabilization algorithm for a class uncertain linear systems[J]. *Systems & Control Letters*, 1987, 8(4): 351 – 357.

作者简介:

朱淑倩 (1979—), 女, 山东大学数学与系统科学学院讲师, 研究方向为奇异系统、时滞系统、切换系统等, Email: sqzhu@sdu.edu.cn;

张承慧 (1963—), 山东大学控制科学与工程学院教授, 博士生导师, 研究方向包括工程优化控制、自适应控制、电气传动自动化及电力电子技术等, E-mail: zchui@sdu.edu.cn;

李振波 (1977—), 男, 山东经济学院统计与数学学院讲师, 研究方向为人工智能算法与经济数学方法, E-mail: lizhenbo@126.com;

程兆林 (1939—), 山东大学数学与系统科学学院教授, 研究方向包括多变量控制系统的理论与应用、奇异系统、时滞系统、非线性系统等, E-mail: chengzha@jn-public.sd.cninfo.net.

(上接第586页)

参考文献(References):

- [5] ISHII H, BASAR T. Remote control of LTI systems over networks with state quantization[J]. *Systems & Control Letters*, 2005, 54(1): 15 – 31.
- [6] ELIA N, MITTER S K. Stabilization of linear systems with limited information[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2001, 46(9): 1384 – 1400.
- [7] ISHII H, FRANCIS B A. Limited Data Rate in Control Systems with Networks[M] *Lecture Notes in Control and Information Sciences*. Berlin: Springer, 2002.
- [8] 刘强, 于达仁. 考虑量化效应的观测器分析与设计[J]. 哈尔滨工业大学学报, 2004, 36(9): 1144 – 1146.
(LIU Qiang, YU Daren. Analysis and design of observers with quantization effects[J]. *J of Harbin Institute of Technology*, 2004, 36(9): 1144 – 1146.)

作者简介:

谢林柏 (1973—), 男, 副教授, 2004年于华中科技大学获控制理论与控制工程博士学位, 目前研究方向为网络化控制、控制系统的故障检测与诊断等, E-mail: xlbzyf@126.com;

纪志成 (1959—), 男, 博士, 现为江南大学通信与控制工程学院教授, 博士生导师, 主要从事电力电子、智能控制等方向的研究, E-mail: zcji@sytu.edu.cn;

赵惟一 (1981—), 男, 江南大学控制理论与控制工程专业在读硕士研究生, 主要研究课题为数据丢包下网络控制系统的最优控制、预测控制等.