

一类具有量化误差的多步长非线性采样系统的镇定

余宏旺¹, 王隔霞², 汪志鸣²

(1. 上海大学 数学系, 上海 200436; 2. 华东师范大学 数学系, 上海 200062)

摘要: 基于连续时间系统模型进行控制器设计, 离散化后执行采样控制的方法, 研究一类具有量化误差的多步长非线性采样系统的镇定问题. 由于非线性因素而无法使用提升技术以及系统状态仅在采样时刻可检测的事实, 控制器中不可检测的系统状态被以采样时刻的状态为初始状态的欧拉叠代近似所获得的近似状态所替换. 在采样系统的保持周期可调节的情况下, 运用此修正控制器来镇定整个多步长非线性采样系统, 可得系统近似误差和采样量化误差可分离的结果; 同时利用李雅普诺夫函数方法, 克服近似误差和量化误差的双重影响, 得到系统实用镇定的结果. 最后, 仿真例子验证了本文的结果有效.

关键词: 非线性; 多步长采样; 量化误差; 实用稳定; 欧拉近似; 一致最终有界

中图分类号: TP13, O231.2 **文献标识码:** A

Stabilization of multirate nonlinear sampled-data systems with quantization

YU Hong-wang¹, WANG Ge-xia², WANG Zhi-ming²

(1. Department of Mathematics, Shanghai University, Shanghai 200436, China;

2. Department of Mathematics, East China Normal University, Shanghai 200062, China)

Abstract: The stabilization of multirate nonlinear sampled-data systems with quantization is studied in this paper for designing a controller based on the continuous-time plant model and discret sampled-data implementation. Since the lifting technique is not applicable for the case of nonlinearity and the plant states are measured only at sampling times, the controller's state is replaced by the approximate state obtained by taking the sampling state as the initial state for the process of Euler iterative approximation. When this modified controller is applied to stabilize a closed-loop sampled-data control system with adjustable holder period, the approximate error and sampling quantization error can be separated. Moreover, the system is practical stabilizable by using the Laypunov function method to deal with the double affects of approximate error and sampling quantization error. Finally, the simulation example shows the desired result.

Key words: nonlinearity; multirate sampling; quantization error; practical stability; Euler approximation; uniformly ultimately bounded

1 引言(Introduction)

随着数字化控制在现代系统控制中的地位日益突出, 采样系统的理论研究和应用逐渐受到控制论界的广泛关注. 文献[1]系统地总结了过去几十年来单步长线性采样系统方面的工作^[2~5]. 单步长采样适用于一些不太复杂的被控对象. 当被控系统各个控制层次的被控量变化差异很大时, 多步长采样方法就成为必要. 它要求在控制系统中的采样器和保持器根据不同变化的速率信号采用不同的采样周期, 从而可在花费较小成本的前提下, 提高系统的控制品质.

多步长采样系统的理论研究由于其复杂性几乎都局限于线性采样系统方面的工作^[6~8]. 文献[9]利用线性化原理处理一类多步长非线性采样系统, 并研究了量化误差对系统镇定的影响, 其结果是局部的. 本文运用CTD(continuous-time discretization)方法对采样系统进行设计和分析. 众所周知, 当采样步长充分小时, CTD方法对单步长非线性采样系统的镇定问题有效, 但对于相应的多步长镇定问题的研究几乎空白, 因此值得深入研究. 由于受到状态分量采样的多重性影响, 使得在线性多步长采样系统中行之有效的提升技术在此实现就变得困难, 因此如

何实施CTD方法本身是个需要解决的问题。

另外,在信号传输过程中,系统的执行机构,例如控制器,采样器和保持器,都不可避免地会产生不同程度的量化误差。于是量化误差对系统品质的影响是采样系统设计与分析中另一个必须面对的问题。以往这方面的工作只局限于线性采样系统^[10~12]。由于线性采样系统不产生近似误差,故其研究相对简单。对于非线性采样系统,近似误差和量化误差一起是如何影响系统的品质至今未见文献研究。文献[13]只研究了近似误差的情况。本文在文献[13]的基础上采用CTD方法,进一步研究近似误差和量化误差在一起是如何对多步长非线性采样系统产生影响的。在一定条件下,本文获得了实用镇定的理论结果。

本文假定控制系统中采样器和保持器同时采样,即排除了时滞的情况。文章中出现的数学符号 $|\cdot|$ 表示向量模, $\|\cdot\|$ 表示与向量模相容的矩阵范数。 $\alpha \in K$ 表示函数 $\alpha(t)$ 是 K 函数,即函数 $\alpha(t)$ 连续,严格单调递增,而且 $\alpha(0) = 0$;进一步,如果函数 $\alpha(t)$ 还满足 $\lim_{t \rightarrow \infty} \alpha(t) = \infty$,则称 K_∞ 函数,记作 $\alpha \in K_\infty$ 。 $\beta(s, t) \in KL$ 表示 $\beta(s, t)$ 是 KL 函数,即对每一个固定的 t , $\beta(s, t)$ 是以 s 为自变量的 K 函数,对每一个固定的 s , $\beta(s, t)$ 关于变量 t 是连续单调递减,并且有 $\lim_{t \rightarrow \infty} \beta(s, t) = 0$ 。

2 问题描述(Problem description)

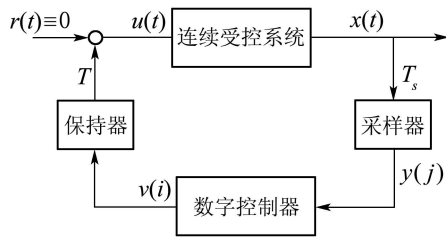


图1 多步长非线性采样系统

Fig. 1 Multirate nonlinear sampled-data systems

如图1所示,考虑一类多步长的非线性采样系统,其中 $u(t)$ 和 $x(t)$ 分别表示连续被控系统的 m 维输入向量和 n 维输出向量; $y(j)$ 和 $v(i)$ 分别表示数字控制器的 n 维输入向量和 m 维输出向量。若被控对象的输出 $x(t)$ 的各分量均以相同固定周期 $T_s > 0$ 进行采样,而其输入 $u(t)$ 是由 $v(k)$ 的各分量 $v_i(k)$ 通过不同的输入采样周期 $T_i > 0 (i = 1, 2, \dots, m)$ 的保持器而得到。通常成立 $T_i \leq T_s$,称其为输入多步长采样系统,本文简称为多步长采样系统。其采样特点是在时间 T_s 内只对 $x(t)$ 采样一次,但多次改变 $u(t)$ 各分量的值。通常假定 T_s 和 T_i 之间满足整数倍关系

$$N_i = \frac{T_s}{T_i}, i = 1, 2, \dots, m. \quad (1)$$

不妨取

$$N_h = LCM\{N_i | i = 1, 2, \dots, m\}. \quad (2)$$

其中 LCM 表示最小公倍数。那么图1所示的多步长采样系统的基本采样周期为

$$T_h = \frac{T_s}{N_h}. \quad (3)$$

当被控对象是线性的时候,可以调节输入采样周期 $T_h > 0$ 使其充分小,可达到镇定的目标。但是对于非线性被控对象而言,则难以做到这点。考虑到采样过程中量化误差的不可避免性,将图1中的多步长非线性采样系统的模型描述如下。

1) 连续被控系统的数学模型

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u). \quad (4)$$

其中: x 是定义在闭域 $\bar{D}_1 \subset \mathbb{R}^n$ 上的状态, $u \in \mathbb{R}^m$ 是定义在闭域 $\bar{D}_2 \subset \mathbb{R}^n$ 上的输入,且 f 满足:对于任意的 $x_1, x_2 \in \bar{D}_1 \subset \mathbb{R}^n$ 和 $u_1, u_2 \in \bar{D}_2 \subset \mathbb{R}^m$,存在一个 K 函数 φ_1 ,使

$$\begin{aligned} |f(x_1, \cdot) - f(x_2, \cdot)| &\leq \varphi_1(|x_1 - x_2|), \\ |f(\cdot, u_1) - f(\cdot, u_2)| &\leq \varphi_1(|u_1 - u_2|). \end{aligned}$$

2) 以 $T_s > 0$ 为固定周期进行采样的采样器

$$y(j) = x(jT_s) + q(x(jT_s)), j = 0, 1, \dots \quad (5)$$

其中: $q(x(jT_s))$ 表示采样器产生的量化误差,满足 $\|q(s)\| \leq J \cdot \varepsilon_0$, $\varepsilon_0 \in \mathbb{R}$ 是量化的精度要求, $J \in \mathbb{R}$ 是独立于 ε_0 的某个常数。

3) 数字控制器

$$u(i) = u(iT_h) = \gamma(y(iT_h)), i = 0, 1, \dots \quad (6)$$

4) 输入保持器以 $T_h > 0$ 的零阶方式保持:

$$v(i) = u(i), i = 0, 1, \dots, \quad (7)$$

$$u(t) = v(i), t \in [iT_h, (i+1)T_h). \quad (8)$$

注意到采样率 T_s 和 T_h 的不同,即已知 jT_s 时刻的状态,而其他时刻的状态未知,从而控制器输入 $y(iT_h)$ 是缺少的。在线性情况下,可以利用提升技术定义扩展输入向量将多步长问题转化为以 T_s 为周期的单步长的问题来克服上述困难。但对于非线性问题,上述方法失效,这是问题的困难所在。同时看到量化误差也会对系统品质有很大的影响。为此如何提出切实可行的方法来设计控制器(7)使得上述采样系统在某种意义下镇定下来是本文研究的主要目的。

3 基于连续时间模型上的控制策略(Control strategy based on the continuous-time model)

3.1 状态反馈控制器设计(Design for state feedback controller)

本节采用CTD方法设计控制器(7), 首先根据连续被控系统(4)设计出镇定控制器 $u = \gamma(x)$, 然后以 $T > 0$ 为周期离散化. 众所周知, 当 T 充分小时, 所得离散控制器是有效的. 但考虑到系统状态只是在 jT_s 时刻可检测, 其他时刻的状态未知, 因此连续控制器 $u = \gamma(x)$ 离散化后所获得的控制器不具有可操作性. 为此将连续控制器 $u = \gamma(x)$ 中的未知状态用以 T 为周期的欧拉近似状态替代, 得到如下修正的控制器, 其中 $T = \frac{T_s}{l}$, $l \in \mathbb{Z}^+$, $i = jl, \dots, jl + l - 2$, $x_c(i + 1)$ 表示在采样过程中采样器具有量化误差的情况下, 以 jT_s 时刻采样获得的系统状态经过 $i - jm$ 次欧拉近似复合所得到的第 $(i + 1)T$ 时刻的状态.

$$\begin{cases} u(i) = \gamma(x_c(i)), \\ x_c(i + 1) = f_T(x_c(i)) = \\ x_c(i) + T \cdot f(x_c(i), \gamma(x_c(i))), \end{cases} \quad (9)$$

$$\begin{cases} x_c(jl) = y(j), j = 0, 1, \dots, \\ x_c(i + 1) = \\ f_T(\dots(f_T(y(j), \gamma(y(j))), \dots, \gamma(y(j)))). \end{cases} \quad (10)$$

利用上述修正的控制器(9)~(10)来研究图1所示的非线性多步长采样系统(4)~(8)的镇定问题. 为此给出以下两个基本假设.

假设 1 对于连续被控系统(4), 存在一个状态反馈 $u = \gamma(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ 使其闭环系统 $\dot{x} = f(x, \gamma(x))$ 全局渐近稳定, 且对于任意 $x, y \in \bar{D}_1 \subset \mathbb{R}^n$, 存在 K 函数 φ_2 和状态反馈 $u = \gamma(x)$ 使得

$$|\gamma(x) - \gamma(y)| \leq \varphi_2(|x - y|). \quad (11)$$

在假设1的条件下, 闭环系统 $\dot{x} = f(x, \gamma(x))$ 是完全的, 即任给 $x_0 \in \mathbb{R}^n$, 解 $x(t)$ 在 $t \geq 0$ 整体存在.

假设 2 输入保持器的保持周期 $T_h > 0$ 可以任意调节. 由假设 2, 可取 $T = T_h$, 于是 $T_s = lT_h$, $l \in \mathbb{Z}^+$.

3.2 采样系统的镇定问题(Stabilization for sampled-data systems)

本节将讨论控制器(9)(10)对非线性多步长采样系统(4)~(8)的镇定问题. 为叙述方便, 此处用 $\bar{x}_c(\cdot)$ 表示采样器在采样过程中不产生量化误差的情况下被控对象以 T_h 为积分周期的欧拉近似状态, 根据欧拉近似原理, 可得在第 iT_h 时刻的系统状态 $x(iT_h)$ 和

近似状态 $\bar{x}_c(i)$ 之间的关系.

引理 1 设采样系统(4)~(8)满足假设1和假设2, 如果采样器在采样过程中不产生量化误差($q(x(jT_s)) = 0$), 则对于任给一对正数 (Δ_1, δ) , 存在 $T_1 > 0$, 使得对任意的 $t \geq 0$ 和 $i \in \{0, 1, \dots\}$, 当 $T_h \in (0, T_1]$ 时有 $iT_h \leq t$, 并且当 $|x(0)| \leq \Delta_1$, $|x(s)_{s \in [0, t]}| \leq \Delta_1$ 时, 都有

$$|x(iT_h) - \bar{x}_c(i)| \leq \delta. \quad (12)$$

在引理1的基础上, 将修正的控制器(9)(10)代替原控制器(7)所得的采样系统, 仍记为采样系统(4)~(8). 研究其状态 $x(iT_h)$ 和欧拉近似状态 $x_c(i)$ 之间的联系.

定理 1 设采样系统(4)~(8)满足假设1和假设2, 则对于任给一对正数 (Δ_2, δ) , 存在 $T_1 > 0$, 使得对任意的 $t \geq 0$ 和 $i \in \{0, 1, \dots\}$, 当 $T_h \in (0, T_1]$ 时, 有 $iT_h \leq t$; 且当 $|x(0)| \leq \Delta_2$, $|x(s)_{s \in [0, t]}| \leq \Delta_2$ 时, 都有

$$|x(iT_h) - x_c(i)| \leq \delta + \alpha^{l-1}(|q_1|). \quad (13)$$

其中: q_1 表示采样时产生的量化误差, $\alpha = Id + T_h(\varphi_1 + \varphi_1 \circ \varphi_2)$, Id 表示恒等映射.

证 由引理1知, 对于任给一对正数 (Δ_2, δ) , 存在 $T_1 > 0$, 使得对任意的 $t \geq 0$ 和 $i \in \{0, 1, \dots\}$, 当 $T_h \in (0, T_1]$ 时, $iT_h \leq t$; 而且当 $|x(0)| \leq \Delta_2$ 和 $|x(s)_{s \in [0, t]}| \leq \Delta_2$ 时, 有

$$|x(iT_h) - \bar{x}_c(i)| \leq \delta.$$

同时估计 $\bar{x}_c(i) - x_c(i)$. 因为

$$|x_c(jl) - \bar{x}_c(jl)| = |y(j) + q_1 - y(j)| = |q_1|,$$

$$|x_c(jl + 1) - \bar{x}_c(jl + 1)| \leq$$

$$|x_c(jl) - \bar{x}_c(jl)| +$$

$$T_h \cdot |f(x_c(jl), \gamma(x_c(jl))) - f(\bar{x}_c(jl), \gamma(x_c(jl)))| +$$

$$T_h \cdot |f(\bar{x}_c(jl), \gamma(x_c(jl))) - f(\bar{x}_c(jl), \gamma(\bar{x}_c(jl)))| \leq$$

$$[Id + T_h(\varphi_1 + \varphi_1 \circ \varphi_2)](|q_1|) := \alpha(|q_1|),$$

同样对于任意的 $i \in \{1, 2, \dots, l - 1\}$, 可得

$$|x_c(jl + i) - \bar{x}_c(jl + i)| \leq$$

$$\alpha(|x_c(jl + i - 1) - \bar{x}_c(jl + i - 1)|) \leq \alpha^i(|q_1|).$$

显然 $\{\alpha^i(|q_1|)\}$ 是一个递增函数列, 所以有

$$|x_c(jl + i) - \bar{x}_c(jl + i)| \leq \alpha^i(|q_1|) \leq \alpha^{l-1}(|q_1|),$$

从而得到

$$|x(iT_h) - x_c(i)| \leq \delta + \alpha^{l-1}(|q_1|).$$

注 1 对于任给的有界闭域 $\bar{D}$, 递增函数列 $\{\alpha^i(|q_1|)\}$,

$i \in \{1, 2, \dots, l-1\}$ 是个有界函数列, 这是因为对于任意 $q_1 \in \bar{D}$, 有

$$\begin{aligned} |x_c(jl+i) - \bar{x}_c(jl+i)| &\leq \alpha^i(|q_1|) \leq \alpha^{l-1}(|q_1|) = \\ [Id + T_h(\varphi_1 + \varphi_1 \circ \varphi_2)]^{\frac{T_s}{T_h}-1}(|q_1|) &\leq e^{T_s(\varphi_1 + \varphi_1 \circ \varphi_2)}(|q_1|). \end{aligned}$$

注 2 在上述的分析中, 如果取 K 函数 $\varphi_1(s) = a_1 s$, $\varphi_2(s) = a_2 s$, 则有如下推论:

推论 1 在定理1的条件下, 如果函数 $f(\cdot, \cdot)$ 和控制器 $u = \gamma(\cdot)$ 分别满足: 对于任意的 $x, y \in \bar{D}_1 \subset \mathbb{R}^n$, $u_1, u_2 \in \bar{D}_2 \subset \mathbb{R}^m$, 存在正常数 a_1, a_2 , 成立

$$\begin{aligned} |f(x_1, \cdot) - f(x_2, \cdot)| &\leq a_1 |x_1 - x_2|, \\ |f(\cdot, u_1) - f(\cdot, u_2)| &\leq a_1 |u_1 - u_2|, \\ |\gamma(x) - \gamma(y)| &\leq a_2 |x - y|, \end{aligned}$$

则有

$$|x(iT_h) - x_c(i)| \leq \delta + e^{T_s(a_1 + a_1 a_2)}(|q_1|). \quad (14)$$

其中 $|q_1|$ 表示采样时产生的量化误差.

注 3 从式(13)和(14)中显然可见系统状态受到近似误差和采样误差双重影响, 而且这种影响是可分离的. 为了后面叙述方便, 记

$$\varepsilon = \delta + e^{T_s(\varphi_1 + \varphi_1 \varphi_2)}(|q_1|). \quad (15)$$

引理 2^[14] 在假设1的条件下, 存在参考输入 $w \in \mathbb{R}^m$, 光滑函数 $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, 增益 $\Psi \in K_\infty$, 和光滑可逆矩阵函数 $G(x) \in \mathbb{R}^{m \times m}$, 使得

$$\text{i)} \quad \alpha_1(|x|) \leq V(x) \leq \alpha_2(|x|);$$

ii)

$$\begin{aligned} V(x) \geq \Psi(|w|) \Rightarrow \dot{V}(x) = \\ \frac{\partial V}{\partial x} \cdot f(x, \gamma(x) + G(x)w) \leq -\alpha_3(V(x)). \end{aligned}$$

其中: $\alpha_i \in K_\infty, i = 1, 2, 3$.

对于给定的正数 $\Delta_3 \geq \alpha_2^{-1} \circ \alpha_1(\varepsilon)$, 由定理1可知, 存在 $T_{21} > 0$, 使得对任意的 $t \geq 0$ 和 $i \in \{0, 1, 2, \dots\}$, 当 $T_h \in (0, T_{21}]$ 时, 有 $iT_h \leq t$; 且当 $|x(0)| \leq \Delta_3, |x(s)_{s \in [0, t]}| \leq \Delta_3$ 时, 有

$$|x(iT_h) - x_c(i)| \leq \delta + \alpha^{l-1}(|q_1|) := \varepsilon.$$

记 $T_{22} = \varepsilon / \max_{|x_1|, |x_2| \leq \Delta_2} |f(x_1, \gamma(x_2))|$, $\Delta_2 = 2\alpha_1^{-1} \circ \alpha_2(\Delta_3)$, 取 $T_2 = \min\{T_{21}, T_{22}\} > 0$, 则当 $T_h \in (0, T_2]$ 时可证欧拉近似状态 $x_c(i)$ 位于以 Δ_2 为半径的闭球域 $\bar{B}(\Delta_2) = \{x; |x| \leq \Delta_2\}$ 内, 这是因为

$$\begin{aligned} |x(0)| \leq \Delta_3, V(x) \leq \alpha_2(x(t)) \Rightarrow \\ V(x(0)) \leq \alpha_2(x(0)) \leq \alpha_2(\Delta_3). \end{aligned}$$

由函数连续性和解的延拓性可知: 存在 $t_0 > 0$ 使得

$$\begin{aligned} V(x(t)) \leq \alpha_2(\Delta_3) \Rightarrow \\ |x(t)| \leq \alpha_1^{-1} \circ \alpha_2(\Delta_3) = \frac{\Delta_2}{2}, t \in [0, t_0]. \end{aligned}$$

由定理1可得

$$\begin{aligned} |x_c(i)| \leq |x_c(i) - x(iT_h)| + |x(iT_h)| \leq \\ \varepsilon + \frac{\Delta_2}{2} \leq \Delta_2, i \in \{0, 1, 2, \dots\}, iT_h \leq t_0. \end{aligned}$$

根据引理2, 取参考输入 $w = G^{-1}(x)\Gamma(t)$, 其中 $\Gamma(t) = \gamma(x_c(i)) - \gamma(x(t))$, $t \in [iT_h, (i+1)T_h]$, 那么当 $t \in [0, t_0] \cap [iT_h, (i+1)T_h]$ 时, 成立

$$\begin{aligned} V(x) \geq \Psi(|G^{-1}(x(t)) \cdot \Gamma(t)|) \Rightarrow \\ \frac{\partial V}{\partial x} \cdot f(x(t), \gamma(x_c(i))) \leq -\alpha_3(V(x(t))). \end{aligned}$$

根据 T_2 的选择, 当 $T_h \in (0, T_2]$ 时, 成立

$$\begin{aligned} x(t) - x(iT_h) = \\ \int_{iT_h}^t f(x, u) ds \Rightarrow |x(t) - x(iT_h)| \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

又由于

$$\begin{aligned} |\Gamma(t)| = \\ |\gamma(x_c(i)) - \gamma(x(t))| \leq \varphi_2(|x_c(i) - x(t)|) \leq \\ \varphi_2(|x(t) - x(iT_h)| + |x(iT_h) - x_c(i)|), \end{aligned}$$

所以存在 $\mu \geq \Psi(G_0 \cdot \varphi_2(2\varepsilon)) > 0$, 满足

$$\begin{aligned} V(x(t)) \geq \mu \geq \Psi(|G^{-1}(x(t)) \cdot \Gamma(t)|) \Rightarrow \\ \dot{V}(x(t)) = \frac{\partial V}{\partial x} \cdot f(x(t), \gamma(x_c(i))) \leq \\ -\alpha_3(V(x(t))), t \in [0, t_0]. \end{aligned}$$

往证 $t_0 = \infty$. 根据上述推导过程不难发现, 只需证明对于一切的 $t \geq 0$, 都有 $V(x(t)) \leq \alpha_2(\Delta_3)$ 即可. 倘若不真, 即存在某一 $t_0 \geq 0, t_1 > t_0$, 使得 $V(x(t_0)) = \alpha_2(\Delta_3), V(x(t)) > \alpha_2(\Delta_3)$, 那么

$$\begin{aligned} \dot{V}(x(t_0)) \leq \\ -\alpha_3(V(x(t_0))) \leq -\alpha_3 \circ \alpha_2(\Delta_3) < 0 \Rightarrow \\ V(x(t)) \leq V(x(t_0)) = \alpha_2(\Delta_3), t > t_0. \end{aligned}$$

这与前面假设相矛盾. 即对一切的 $t \geq 0$ 都有 $V(x(t)) \leq \alpha_2(\Delta_3)$, 而且

$$V(x(t)) \geq \mu \Rightarrow \dot{V}(x(t)) =$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} \cdot f(x(t), \gamma(x_c(i))) \leq -\alpha_3(V(x(t))).$$

上述分析的过程和结果, 经整理即得如下定理.

定理 2 设采样系统(4)~(8)满足假设1和假设2, 则对于任给的正数 $\Delta_3 \geq \alpha_2^{-1} \circ \alpha_1(\varepsilon)$ 和 $\mu > 0$, 存在 $T_3 > 0$, 使得对任意 $t \geq 0$, 当 $T_h \in (0, T_3]$, $|x(0)| \leq \Delta_3$ 时, 成立

$$V(x(t)) \geq \mu \Rightarrow \dot{V}(x(t)) \leq -\alpha_3(V(x(t))). \quad (16)$$

其中: ε 由式(15)定义, $\Delta_2 = 2\alpha_1^{-1} \circ \alpha_2(\Delta_3)$, $G_0 = \max_{x \in \bar{B}(\Delta_2)} \|G^{-1}(x)\|$.

注 4 定理2中的常数 $\mu > 0$ 的选取依赖于误差 ε , 由前面的推导过程不难得知

$$\mu \geq \Psi(G_0 \varphi_2(2\varepsilon)). \quad (17)$$

注 5 定理2中对于给定的正数 Δ_3 要求

$$\varepsilon \leq \alpha_1^{-1} \circ \alpha_2(\Delta_3). \quad (18)$$

这表明采样系统的误差与系统解稳定性能的品质有关.

下面给出本文的主要定理.

定理 3 设采样系统(4)~(8)满足假设1和假设2, 则对于任给的一对正数 (Δ, δ) , 存在 $T^* > 0$ 和函数 $\beta \in KL$, 使得对任意 $t \geq 0$, 当 $|x(0)| \leq \Delta$, $T_h \in (0, T^*]$ 时, 成立

$$\begin{cases} |x(t)| \leq \beta(|x(0)|, t) + \alpha_1^{-1}(\Psi(G_0 \varphi_2(2\varepsilon))), \\ |x_c(i)| \leq \beta(|x(0)|, iT_h) + \alpha_1^{-1}(\Psi(G_0 \varphi_2(2\varepsilon))) + \varepsilon. \end{cases} \quad (19)$$

其中: $G_0 = \max_{x \in \bar{B}(\Delta_2)} \|G^{-1}(x)\|$, $\varphi_2 \in K$, $\alpha_1, \Psi \in K_\infty$, $\varepsilon = \delta + e^{T_s(\varphi_1 + \varphi_1 \varphi_2)(|q_1|)}$.

证 任给 $\Delta > 0$, 取 $\Delta_2 = \alpha_1^{-1} \circ \alpha_2(\Delta)$, 由定理1知: 存在 $T_1 > 0$, 使得对任意的 $t \geq 0$ 和 $i \in \{0, 1, \dots\}$, 当 $T_h \in (0, T_1]$ 时, 有 $iT_h \leq t$; 且当 $|x(0)| \leq \Delta_2$, $|x(s)_{s \in [0, t]}| \leq \Delta_2$ 时, 成立

$$|x(iT_h) - x_c(i)| \leq \varepsilon,$$

同样取 $\Delta_3 = \Delta$, 常数 $\mu = \Psi(G_0 \varphi_2(2\varepsilon))$, 则由定理2知: 存在 $T_2 > 0$, 使得对任意的 $t \geq 0$ 和 $i \in \{0, 1, \dots\}$, 当 $T_h \in (0, T_2]$ 时, 有 $iT_h \leq t$; 且当 $|x(0)| \leq \Delta_3$, $|x(s)_{s \in [0, t]}| \leq \Delta_3$ 时, 成立

$$V(x(t)) \geq \mu \Rightarrow \dot{V}(x(t)) \leq -\alpha_3(V(x(t))).$$

取 $T^* = \min\{T_1, T_2\}$, 则当 $T_h \in (0, T^*]$ 时, 存在函数 $\beta_0 \in KL^{[15]}$, 使得当 $V(x(t)) \geq \mu$ 时, 有

$$V(x(t)) \leq \beta_0(V(x_0), t),$$

所以

$$\begin{aligned} V(x(t)) &\leq \max\{\beta_0(V(x_0), t), \mu\} \Rightarrow \\ |x(t)| &\leq \alpha_1^{-1}(\max\{\beta_0(V(x_0), t), \mu\}) \leq \\ &\alpha_1^{-1}(\beta_0(V(x_0), t)) + \alpha_1^{-1}(\mu) \leq \\ &\beta(|x_0|, t) + \alpha_1^{-1}(\mu). \end{aligned}$$

其中 $\beta(|x_0|, t) = \alpha_1^{-1}(\beta_0(\alpha_2(|x_0|), t)) \in KL$. 注意 μ 的取值, 则有

$$\begin{aligned} |x(t)| &\leq \beta(|x(0)|, t) + \alpha_1^{-1}(\Psi(G_0 \varphi_2(2\varepsilon))), \\ |x_c(i)| &= |x(iT_h)| + |x(iT_h) - x_c(i)| \leq \\ &\beta(|x(0)|, iT_h) + \alpha_1^{-1}(\Psi(G_0 \varphi_2(2\varepsilon))) + \varepsilon. \end{aligned}$$

证毕.

定理3有如下的等价形式.

定理 4 设采样系统(4)~(8)满足假设1和假设2, 对于任给的一对正常数 (Δ, d) , 当误差 ε 满足

$$\alpha_1^{-1}(\Psi(G_0 \varphi_2(2\varepsilon))) + \varepsilon \leq d, \quad (20)$$

则存在 $T^* > 0$ 和函数 $\beta \in KL$, 使得对任意的 $t \geq 0$, 当 $|x(0)| \leq \Delta$, $T_h \in (0, T^*]$ 时, 对采样系统(4)~(8)的状态, 成立

$$\begin{aligned} |x(t)| &\leq \beta(|x(0)|, t) + d, \\ |x_c(i)| &\leq \beta(|x(0)|, iT_h) + d. \end{aligned} \quad (21)$$

其中: $\alpha_1, \Psi \in K_\infty$, $\varepsilon = \delta + e^{T_s(\varphi_1 + \varphi_1 \varphi_2)(|q_1|)}$, $\varphi_2 \in K$, $G_0 = \max_{x \in \bar{B}(\Delta_2)} \|G^{-1}(x)\|$, $\Delta_2 = 2\alpha_1^{-1} \circ \alpha_2(\Delta)$.

注 6 条件(20)刻画了允许误差 d 与采样系统误差 ε 之间的关系. 注意到任意调节 T_h 可使得近似误差 δ 充分小, 因此要使条件(20)成立, 允许误差 d 至少满足 $d > e^{T_s(\varphi_1 + \varphi_1 \varphi_2)(|q_1|)}$, 这说明量化误差是系统的固有特性, 它与允许误差是对矛盾体.

4 仿真例子(Simulation example)

本节考虑一个具体非线性采样系统, 并给出其相应的仿真图.

1) 连续被控系统为

$$\dot{x} = f(x, u) = x^3 + u. \quad (22)$$

其中: 系统状态 $x \in \bar{B}(\Delta_1)$, 控制输入 $u \in \bar{B}(\Delta_2)$, $\bar{B}(\Delta_j) = \{x; |x| \leq \Delta_j\}$, $j = 1, 2$. 对于任意的 $x, y \in \bar{B}(\Delta_1)$, 则有

$$|f(x_1, u) - f(y, u)| \leq 3\Delta_1^2 |x - y|.$$

同样对于任意的 $u_1, u_2 \in \bar{B}(\Delta_2)$, 也有

$$|f(x, u_1) - f(x, u_2)| = |u_1 - u_2|.$$

取 $a_1 = \max\{1, 3\Delta_1^2\}$, 则 $f(\cdot, \cdot)$ 关于两个变量都满足局部Lipschitz条件.

2) 采样器以固定周期 $T_s > 0$ 进行采样

$$y(j) = x(jT_s) + q(x(jT_s)), \quad j = 0, 1, \dots \quad (23)$$

其中 $q(x(jT_s))$ 表示采样过程中产生的量化误差.

3) 保持器是以 $T_h > 0$ 为周期的零阶保持

$$u(t) = u(i), \quad t \in [iT_h, (i+1)T_h), \quad i = 0, 1, \dots \quad (24)$$

假设存在 $l \in \mathbb{Z}^+$ 满足 $T_s = lT_h$, 且 T_h 可以任意调节, 后面将给出系统在不同的保持周期 T_h 作用下系统解的仿真图. 根据被控系统, 设计全局镇定的控制器

$$u(t) = \gamma(x) = -x - 3x^3. \quad (25)$$

显然对于任意的 $x, y \in \bar{B}(\Delta_1)$, 该控制器满足

$$\begin{aligned} |\gamma(x) - \gamma(y)| &= \\ |-x - 3x^3 + y + 3y^3| &\leq a_2 \cdot |x - y|. \end{aligned}$$

其中 $a_2 = 1 + 9\Delta_1^2$. 以 $T = T_h$ 为周期将控制器离散化, 由于系统状态仅在 jT_s 时刻可检测, 为此修正控制器为

$$\begin{aligned} u(i) &= \gamma(x_c(i)) = -x_c(i) - 3x_c^3(i), \\ x_c(i+1) &= x_c(i) + T_h \cdot f(x_c(i), \gamma(x_c(i))). \end{aligned} \quad (26)$$

其中

$$\begin{aligned} x_c(jl) &= y(j), \quad j = 0, 1, \dots, l \in \mathbb{Z}^+, \\ x_c(i+1) &= \\ f_T(\dots(f_T(y(j), \gamma(y(j))), \dots, \gamma(y(j))))), \\ i &= jl, jl+1, \dots, jl+l-2. \end{aligned}$$

进一步可得系统误差为

$$\varepsilon := \delta + e^{T_s a_1(1+a_2)(|q_1|)}. \quad (27)$$

对于闭环系统

$$\dot{x} = -x - 2x^3,$$

令 $V(x) = x^2$, 则可取 $\alpha_1(s) = \alpha_2(s) = s^2$, $G(x) = x^2 + 1$, $\Psi(|w|) = w^2$, $\alpha_3(s) = 2s^2$.

当 $|x| \geq |w|$ 时可得

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x} \cdot f(x, \gamma(x) + G(x)w) &= \\ -4x^4 - 2x^2 + 2x(x+1)w &\leq -2x^4, \end{aligned}$$

即当 $V(x(t)) \geq \Psi(|w|)$ 时, 成立

$$\dot{V}(x) = \frac{\partial V}{\partial x} \cdot f(x, \gamma(x) + G(x)w) \leq -\alpha_3(V(x)).$$

显然 $G_0 = 1 + \Delta_1^2$, 所以采样系统的解满足

$$\begin{cases} |x(t)| \leq \beta(|x(0)|, t) + 4(1 + 9\Delta_1^2)^2 \cdot \\ \quad (1 + \Delta_1^2)^2 \cdot \varepsilon^2, \\ |x_c(i)| \leq \beta(|x(0)|, iT_h) + 4(1 + \\ \quad 9\Delta_1^2)^2(1 + \Delta_1^2)^2 \varepsilon^2 + \varepsilon. \end{cases} \quad (28)$$

下面的图2~图6是整个采样系统的一组状态仿真图, 图中分别给出连续时间的被控系统状态, 有量化误差和没有量化误差的情况下近似状态反馈闭环系统的状态, 相应每个图形分别标出了采样器和保持器的运行周期以及量化误差大小. 其中欧拉积分周期与相应的保持周期一致.

比较图2和3, 不难看出在采样周期 T_s 固定的情况下, 必须通过调节保持周期 T_h 的值来减少量化误差对系统状态的影响. 而图3和4显示, 如果采样周期 T_s 和保持周期 T_h 保持不变, 量化误差对系统状态的影响是很明显的. 同样通过图2, 5和6之间的比较, 可以看出随着采样器采样周期 T_s 的增加, 保持周期 T_h 相应要减小才能保证良好的系统稳定性, 而且系统承受量化误差的能力也在减弱.

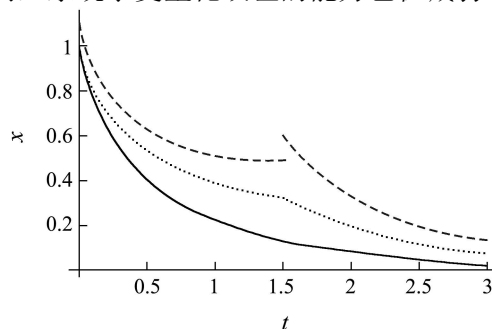


图2 状态仿真($T_s = 1.5, T_h = 0.03, |q| = 0.1$)

Fig. 2 States simulation ($T_s = 1.5, T_h = 0.03, |q| = 0.1$)

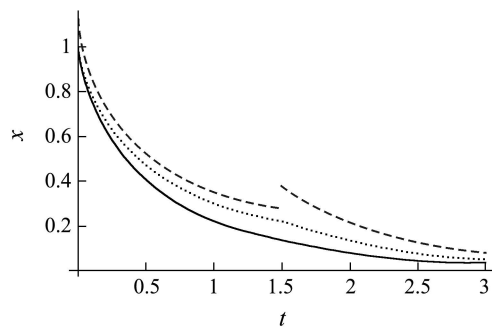
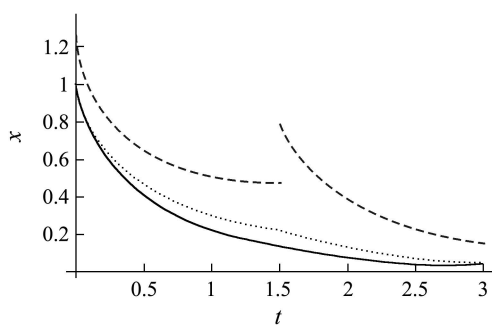
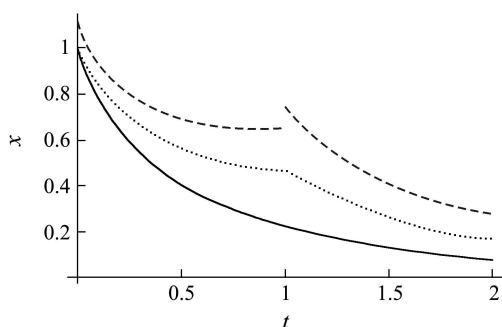
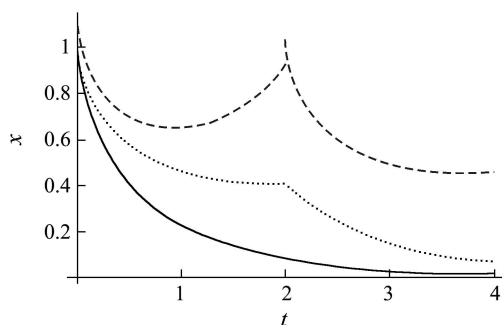


图3 状态仿真($T_s = 1.5, T_h = 0.015, |q| = 0.1$)

Fig. 3 States simulation ($T_s = 1.5, T_h = 0.015, |q| = 0.1$)

图4 状态仿真 $T_s = 1.5, T_h = 0.015, |q| = 0.31$ Fig. 4 States simulation $T_s = 1.5, T_h = 0.015, |q| = 0.31$ 图5 状态仿真 ($T_s = 1.0, T_h = 0.04, |q| = 0.09$)Fig. 5 States simulation ($T_s = 1.0, T_h = 0.04, |q| = 0.09$)图6 状态仿真 ($T_s = 2.0, T_h = 0.04, |q| = 0.09$)Fig. 6 States simulation ($T_s = 2.0, T_h = 0.04, |q| = 0.09$)

同时,从这些仿真图可知,当 T_h 取值很小,即欧拉近似精度很高的时候,系统品质的好坏主要取决于量化误差的影响.而这些都与本文的理论分析相一致.

5 结论(Conclusion)

本文考虑系统的采样周期固定情况下的一类多步长非线性采样系统,运用CTD方法设计采样控制器,并考虑到系统状态的可检测性以及量化误差的影响,对所设计的控制器进行了必要的修正,在假设1和假设2条件下,从理论上证明了在此修正的控制器作用下,只要近似误差和量化误差

达到允许范围内,那么采样系统(4)~(8)就可以达到实用镇定.

参考文献(References):

- [1] ACKERMAN J. *Sampled-Data Control Systems: Analysis and Synthesis, Robust Design*[M]. New York, Spinger, 1985.
- [2] RUI C, KOLMANOVSKY I, MCCLAMROCH N H. Hybrid control for stabilization of a class cascade nonlinear systems[C]//*Proc of 1997 American Control Conference*. Albuquerque, NM: IEEE Press, 1997, (5): 2800 – 2804.
- [3] NESIC D, TEEL A R, SONTAG E D. Formulas relating KL stability estimates of discrete-time and sampled-data nonlinear systems[J]. *Systems & Control Letters*, 1999, 38(1): 49 – 60.
- [4] HOU Ling, MICHEL A N, YE Hui. Some qualitative properties of sampled-data control systems[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1997, 42(12): 1721 – 1725.
- [5] NESIC D, LAILA D S. A note on input-to-state stabilization for nonlinear sampled-data systems[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2001, 47(7): 1153 – 1158.
- [6] DAVID M G. A parametrization of stabilizing controllers for multirate sampled-data systems[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1990, 35(2): 233 – 236.
- [7] COLANER P, SCATTOLIN R, SCHIAVONI N. Stabilization of multirate sampled-data linear systems[J]. *Automatica*, 1990, 26(2): 377 – 380.
- [8] 肖建. 多采样率数字控制系统[M]. 北京: 科学出版社, 2003. (XIAO Jian. *Multirate Digital Control Systems*[M]. Beijing: Science Press, 2003.)
- [9] HU Bo, ANTHONY M N. Some qualitative properties of multi-digital control systems[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1999, 44(4): 765 – 770.
- [10] SLAUGHTER J B. Quantization errors in digital control systems[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1994, 39(9): 70 – 74.
- [11] MILLER R K, MOUSA M S, MICHEL A N. Quantization and overflow effects in digital implementations of linear dynamic controllers[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1988, 33(4): 698 – 704.
- [12] HIDEAKI I, BRUCE F A. Quadratic stabilization of sampled-data systems with quantization [J]. *Automatic*, 2003, 39(10): 1793 – 1800.
- [13] ILIA P G, HORACIO M J. Multirate versions of sampled-data stabilization of nonlinear systems[J]. *Automatica*, 2004, 40(5): 839 – 846.
- [14] ISIDORI A. *Nonlinear Control Systems*[M]. Second Edition. London: Springer, 1999.
- [15] HASSAN K K. *Nonlinear Systems*[M]. Second Edition. Prentice Hall: Upper Saddle River, 1996.

作者简介:

余宏旺 (1977—), 男, 博士, 研究兴趣为非线性控制理论, E-mail: yhw05820107@graduate.shu.edu.cn;

王隔霞 (1981—), 女, 博士研究生, 研究方向为非线性控制与网络化控制, E-mail: gxwang_2004@163.com;

汪志鸣 (1953—), 男, 博士, 副教授, 硕士生导师, 研究方向为非线性控制与鲁棒控制, E-mail: zmwang@math.ecnu.edu.cn.