文章编号：1000−8152(2007)04−0651−06

基于模型参考和内模原理的线性系统鲁棒控制设计

潘　登, 郑应平

(同济大学 电子与信息工程学院, 上海 200092)

摘要: 不确定性因素会使系统性能恶化, 它包括系统不确定性参数和各种外部干扰等. 本文针对这种不确定性线性系统, 利用模型参考和内模原理, 建立鲁棒控制系统结构, 分析了其能控性条件, 通过选择参考模型和内模实现系统能控, 在此条件下, 将鲁棒控制设计转换为控制系统的 LQR 问题进行研究, 并运用最优控制理论, 计算其反馈控制律. 仿真结果表明该设计方法将“模型参考”与“内模原理”有机结合起来, 提高了系统的鲁棒稳定性, 有效抑制干扰, 并实现系统性能的改善.

关键词: 线性系统; 不确定性; 控制系统分析; 能控性条件; 最优控制; 鲁棒控制; 模型参考; 内模原理

中图分类号: TP13　　**文献标识码**: A

Robust control design of linear systems based on model reference and internal model principle

PAN Deng, ZHENG Ying-ping

(School of Electronic & Information Engineering, Tongji Universiy, Shanghai 200092, China)

Abstract: The uncertainties usually deteriorate the performance of the systems. It includes the uncertain parameters and the outside disturbances and so on. With model reference and internal model principle, a structure of robust control systems is built for this kind of linear uncertain systems, and its controllability condition is then analyzed. Its controllability condition can be satisfied by choice of reference model and internal model. On this condition, the robust control design can be converted into the linear quadratic regulator(LQR) problem, and the optimal control theory can also be utilized to compute its feedback control law. The simulation shows that model reference and internal model principle can be integrated into this approach, which can improve the robust stability of the systems, reduce disturbance efficiently and ameliorate its performance.

Key words: linear systems; uncertainties; control systems analysis; controllability condition; optimal control; robust control; model reference; internal model principle

1　引言(Introduction)

控制系统的分析与设计, 首先要建立数学模型. 由于普遍存在的不确定性, 这些数学模型所表现的行为总是和理论预估的结果有所差别. 通常不确定性有两个来源[1]: 1) 未知的或不可预计的输入, 如作用于被控过程中的各种干扰信号、量测噪声等; 2) 被控对象建模“误差”, 如非线性的线性化、高阶系统的降阶近似等. 在控制对象、控制系统的建模过程中, 干扰(噪声)与模型参数的不确定性是一个普遍存在的问题, 而干扰对系统的影响更为严重, 这些问题对控制理论的研究和应用都提出了挑战, 一直是自动控制研究的热点.

20世纪80年代以来, 针对不确定性的鲁棒控制理论研究方兴未艾, 在继承H_2控制方法的基础上, 涌现出H_∞控制方法、结构奇异值方法、线性矩阵不等式LMI方法等, 为解决控制对象模型不确定性和外界扰动不确定性问题提供了有效手段. 其中, Zames等人提出的H_∞优化控制理论是鲁棒控制理论发展的突出标志之一[1].

另一方面, 基于内模原理的控制方法作为鲁棒控制方法之一, 控制器设计可以由过程模型直接求取, 能够实现无静差跟踪, 设计思路清晰、步骤简单, 控制性能优越, 使其在控制理论界和应用领域得到普遍重视[2,3]. 而模型参考广泛应用于(自适应)跟踪控制. 通过设计合理的反馈控制律或最优控制律, 可以迫使控制对象输出与参考模型输出之间的误差快

收稿日期: 2005−10−08; 收修改稿日期: 2006−04−18.

速趋近于零, 以达到存在未知上界的外部干扰、参数摄动和未建模动态情形下的系统稳定鲁棒控制和性能鲁棒控制的目的[4]. 在文献[5]中, Lin Yan等人提出一种新的模型参考鲁棒控制(model reference robust control, MRRC)算法, 可以有效降低跟踪误差, 提高跟踪性能.

本文旨在结合内模原理和模型参考等方面的知识, 运用最优控制理论, 将具有外界干扰信号和参数不确定性的线性系统鲁棒控制问题转变为增广系统的LQR问题进行研究, 求解其反馈控制律, 以达到干扰有效抑制、性能有效改善和系统具有鲁棒稳定性的目的.

2　不确定性线性系统模型(Model of linear uncertain systems)

为了说明问题, 并不失一般性, 可以假设被控系统为(A_p,B_p,C_p), 模型参数的不确定性由$\Delta A,\Delta B,\Delta C$表征. 其中: $A_p = A+\Delta A$, $B_p = B+\Delta B$, $C_p = C+\Delta C$, 它们分别在A,B,C的邻域内变化, (A,B)能控, (A,C)能观测. 被控系统模型如图1所示.

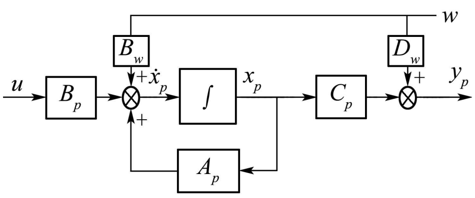


图 1　被控对象的系统模型

Fig. 1　Model of the controlled systems

被控对象的状态方程为

$$\dot{x}_p = A_p x_p + B_p u + B_w w, \tag{1}$$

$$y_p = C_p x_p + D_w w. \tag{2}$$

在上述模型中, $A,\Delta A$为$n\times n$矩阵, $B,\Delta B,B_w$为$n\times p$矩阵, $C,\Delta C,D_w$为$q\times n$矩阵, u 和 y_p 分别为 p 维和 q 维向量. w 为有界干扰.

3　基于模型参考和内模原理的鲁棒控制系统(Robust control systems based on model reference and internal model principle)

3.1　鲁棒控制系统结构及状态方程(Structure of robust control systems and its state functions)

基于模型参考和内模原理的鲁棒控制系统(以下简称鲁棒控制系统, 或该鲁棒系统, 或该系统)设计方法, 是利用被控对象的输出信号与期望的参考模型输出信号相比较, 由内模对干扰信号滤波, 然后通过增广矩阵在一定条件下求解状态反馈控制规律. 鲁棒控制系统的结构如图2所示.

为了说明问题, 假设被控对象的状态是可以检测的. 参考模型的状态方程为

$$\dot{x}_m = A_m x_m + B_m u, \tag{3}$$

$$y_m = C_m x_m. \tag{4}$$

其中: A_m为$n\times n$矩阵, B_m为$n\times n$矩阵, C_m为$q\times n$矩阵, u和y_m 分别为p维和q维向量.

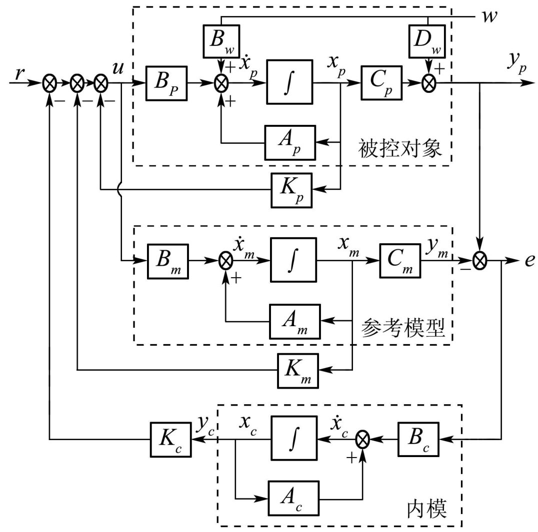


图 2　基于模型参考和内模原理的鲁棒控制系统

Fig. 2　Robust control systems based on model reference and internal model principle

为实现干扰抑制, 把干扰信号w的不稳定振型作为内模引入系统. 其中, 不稳定振型位于右半s平面上根因式的最小公倍式为

$$\phi(s) = s^k + \alpha_{k-1}s^{k-1} + \cdots + \alpha_1 s + \alpha_0, \tag{5}$$

$e = y_p - y_m$作为内模输入, 以此构建内模的状态方程

$$\dot{x}_c = A_c x_c + B_c e, \tag{6}$$

$$y_c = C_c x_c. \tag{7}$$

其中:

$$\underset{kq\times kq}{A_c} = \mathrm{diag}\{\varGamma,\varGamma,\cdots,\varGamma\},$$

$$\underset{kq\times q}{B_c} = \mathrm{diag}\{\beta,\beta,\cdots,\beta\},$$

$$C_c = I_{q\times q},$$

$$\varGamma = \left[\begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ \vdots & & \boldsymbol{I}_{k-1} & \\ 0 & & & \\ \hline -\alpha_0 & -\alpha_1 & \cdots & -\alpha_{k-1} \end{array}\right],$$

$$\beta = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}},$$

$$e = y_p - y_m = \begin{bmatrix} C_p & -C_m & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_p \\ x_m \\ x_c \end{bmatrix} + D_w w.$$

显然, 有增广系统状态方程

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_p\\ \dot{x}_m\\ \dot{x}_c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A_p & 0 & 0\\ 0 & A_m & 0\\ B_cC_p & -B_cC_m & A_c\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_p\\ x_m\\ x_c\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}B_p\\ B_m\\ 0\end{bmatrix}u+\begin{bmatrix}B_w\\ 0\\ B_cD_w\end{bmatrix}w, \tag{8}$$

$$y_p=\begin{bmatrix}C_p & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_p\\ x_m\\ x_c\end{bmatrix}+D_ww. \tag{9}$$

3.2 系统能控性条件(Controllability condition of systems)

定理 1 增广系统满足能控性的充分必要条件为

i) $\dim u\geqslant \dim y_p$;

ii) $\mathrm{rank}\{\begin{bmatrix}sI-A_p & 0 & B_p\\ 0 & sI-A_m & B_m\\ -C_p & C_m & 0\end{bmatrix}\}=2n+q.$

其中s为$\phi(s)=0$的任一特征根.

证 令

$$M(s)=\begin{bmatrix}sI-A_p & 0 & 0 & B_p\\ 0 & sI-A_m & 0 & B_m\\ -B_cC_p & B_cC_m & sI-A_c & 0\end{bmatrix},$$

$$F(s)=\begin{bmatrix}I_n & 0 & 0 & 0\\ 0 & I_n & 0 & 0\\ 0 & 0 & B_c & sI-A_c\end{bmatrix},$$

$$N(s)=\begin{bmatrix}sI-A_p & 0 & 0 & B_p\\ 0 & sI-A_m & 0 & B_m\\ -C_p & C_m & 0 & 0\\ 0 & 0 & I_{kq} & 0\end{bmatrix}.$$

可知$M(s)=F(s)*N(s)$.

下面根据s是否是$\phi(s)=0$的特征根的情况分别进行证明.

1) 当s不是$\phi(s)=0$的特征根时:

$$\mathrm{rank}\{M(s)\}=\mathrm{rank}\{\begin{bmatrix}sI-A_p & B_p\end{bmatrix}\}+\mathrm{rank}\{\begin{bmatrix}sI-A_m & B_m\end{bmatrix}\}+\mathrm{rank}\{\begin{bmatrix}sI-A_c\end{bmatrix}\}=2n+kq, \tag{10}$$

增广系统是能控的;

2) 当s是$\phi(s)=0$的特征根时:

显然, $\mathrm{rank}\{F(s)\}=2n+kq$. 另一方面, 当且仅当条件i) $p\geqslant q$ (即$\dim u\geqslant \dim y_p$)成立, 条件ii)

$$\mathrm{rank}\{\begin{bmatrix}sI-A_p & 0 & B_p\\ 0 & sI-A_m & B_m\\ -C_p & C_m & 0\end{bmatrix}\}=2n+q$$

才成立. 进一步有$\mathrm{rank}\{N(s)\}=2n+q+kq$, 利用Sylverster不等式[6]:

$$\begin{aligned}&\mathrm{rank}\{F(s)\}+\mathrm{rank}\{N(s)\}-l\leqslant\\ &\mathrm{rank}\{F(s)\ \ N(s)\}\leqslant\\ &\min\{\mathrm{rank}\{F(s)\},\ \mathrm{rank}\{N(s)\}\}.\end{aligned}$$

其中l为$F(s)$的列数或$N(s)$的行数, 不难得到

$$\mathrm{rank}\{M(s)\}=\mathrm{rank}\{F(s)\ \ N(s)\}=2n+kq.$$

因此, 可以得出结论: $\phi(s)=0$ 时, 增广系统能控的充分必要条件成立.

参考模型的各参数矩阵的选择, 对增广系统是非常重要的. 一方面要满足稳定性要求和性能指标, 另一方面, 要使增广矩阵满足能控性. 可以看出, 结论与证明与无静差跟踪问题非常类似[7].

3.3 系统的鲁棒控制律(Robust control law of systems)

在系统能控条件下, 存在反馈控制律

$$u=\begin{bmatrix}-K_p & -K_m & -K_c\end{bmatrix}x, \tag{11}$$

使得被控系统在不确定性的作用下, 仍然能够实现扰动抑制和对参考模型输出信号的渐近跟踪, 即根据对象模型, 寻找一个控制器, 以保证反馈控制系统的稳定性, 使反馈控制系统达到期望的性能, 并具有鲁棒性.

令

$$\widetilde{A}=\begin{bmatrix}A & 0 & 0\\ 0 & A_m & 0\\ B_cC & -B_cC_m & A_c\end{bmatrix},\ \Delta\widetilde{A}=\begin{bmatrix}\Delta A & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ B_c\Delta C & 0 & 0\end{bmatrix},$$

$$\widetilde{B}=\begin{bmatrix}B\\ B_m\\ 0\end{bmatrix},\ \Delta\widetilde{B}=\begin{bmatrix}\Delta B\\ 0\\ 0\end{bmatrix},\ \widetilde{C}=\begin{bmatrix}C & 0 & 0\end{bmatrix},$$

$$\Delta\widetilde{C}=\begin{bmatrix}\Delta C & 0 & 0\end{bmatrix},\ \widetilde{x}=\begin{bmatrix}x_p\\ x_m\\ x_c\end{bmatrix}.$$

不失一般性, 假设$\widetilde{B}$为列满秩, 变量$p\in(p_{\min},p_{\max})$, 不确定性参数均可表示为它的函数(或函数矩阵). 考虑到干扰可通过内模作用得到抑制, 可以将式(8)(9)两式作如下变换:

$$\dot{\widetilde{x}}=(\widetilde{A}+\Delta\widetilde{A}(p))\,\widetilde{x}+(I+\Delta\widetilde{B}(p)\widetilde{B}^{+})\widetilde{B}\,u, \tag{12}$$

$$y_p=(\widetilde{C}+\Delta\widetilde{C}(p))\,\widetilde{x}. \tag{13}$$

其中$\widetilde{B}^{+}=(\widetilde{B}^{\mathrm{T}}\widetilde{B})^{-1}\widetilde{B}^{\mathrm{T}}$ 为 $\widetilde{B}$ 的广义逆.

根据文献[8], 构造与式(12)等价的辅助方程

$$\dot{\widetilde{x}}=\widetilde{A}\widetilde{x}+\widetilde{B}u+v. \tag{14}$$

其中变量v为方便求解而设立的辅助输入.

定义 1 定义增广系统辅助方程的最优性能指标:

$$V(\widetilde{x}_0)=\min_{u,v}\Big(\int_0^{\infty}(\widetilde{y}_p^{\mathrm{T}}\widetilde{y}_p+\widetilde{x}^{\mathrm{T}}Q\widetilde{x}+u^{\mathrm{T}}u+v^{\mathrm{T}}v)\,\mathrm{d}t\Big) \tag{15}$$

是在初始状态$\widetilde{x}_0$条件下系统最优控制的最小代价(式中$Q\geqslant 0$). 则有以下定理成立:

定理 2 如果

$$\varPhi(p)^{\mathrm{T}}\varPhi(p)+Q+K^{\mathrm{T}}K-L^{\mathrm{T}}L+2K^{\mathrm{T}}\widetilde{B}^{+}\Delta\widetilde{A}(p)+2K^{\mathrm{T}}\widetilde{B}^{+}\Delta\widetilde{B}(p)K>0\ (\forall p\in(p_{\min},\ p_{\max})),$$

则$u=-K\widetilde{x}$为增广系统鲁棒问题的解. 其中, $\varPhi(p)=[C_p\ \ 0\ \ 0]$, $u=-K\widetilde{x}$, $v=-L\widetilde{x}$为辅助方程的反馈控制律, $K=[K_p\ \ K_m\ \ K_c]$.

证 由式(14)(15), 可得相应的Hamilton-Jacobi-Bellman方程为

$$\min_{u,v}(\widetilde{y}_p^{\mathrm{T}}\widetilde{y}_p+\widetilde{x}^{\mathrm{T}}Q\widetilde{x}+u^{\mathrm{T}}u+v^{\mathrm{T}}v+V_{\widetilde{x}}^{\mathrm{T}}(\widetilde{A}\widetilde{x}+\widetilde{B}u+v))=0. \tag{16}$$

其中$V_{\widetilde{x}}^{\mathrm{T}}=(\dfrac{\partial V(\widetilde{x})}{\partial\widetilde{x}})^{\mathrm{T}}$. 可以得出

$$\widetilde{y}_p^{\mathrm{T}}\widetilde{y}_p+\widetilde{x}^{\mathrm{T}}Q\widetilde{x}+\widetilde{x}^{\mathrm{T}}K^{\mathrm{T}}K\widetilde{x}+\widetilde{x}L^{\mathrm{T}}L\widetilde{x}+V_{\widetilde{x}}^{\mathrm{T}}(\widetilde{A}\widetilde{x}+\widetilde{B}K\widetilde{x}+L\widetilde{x})=0, \tag{17}$$

$$2\widetilde{x}^{\mathrm{T}}K^{\mathrm{T}}+V_{\widetilde{x}}^{\mathrm{T}}\widetilde{B}=0, \tag{18}$$

$$2\widetilde{x}^{\mathrm{T}}L^{\mathrm{T}}+V_{\widetilde{x}}^{\mathrm{T}}=0. \tag{19}$$

显然, $\widetilde{x}\neq 0$时, $V(\widetilde{x})>0$; $\widetilde{x}=0$时, $V(\widetilde{x})=0$. 由式(12)至式(19)可以进行以下推导:

$$\begin{aligned}&\dot{V}(\widetilde{x})=\\&V_{\widetilde{x}}^{\mathrm{T}}(\widetilde{A}+\Delta\widetilde{A}(p))\widetilde{x}+(I+\Delta\widetilde{B}(p)\widetilde{B}^{+})\widetilde{B}K\widetilde{x})=\\&V_{\widetilde{x}}^{\mathrm{T}}(\widetilde{A}\widetilde{x}+\widetilde{B}K\widetilde{x}+L\widetilde{x})+V_{\widetilde{x}}^{\mathrm{T}}\Delta\widetilde{A}(p)\widetilde{x}-\\&V_{\widetilde{x}}^{\mathrm{T}}L\widetilde{x}+V_{\widetilde{x}}^{\mathrm{T}}\Delta\widetilde{B}(p)K\widetilde{x}=\\&-\widetilde{y}_p^{\mathrm{T}}\widetilde{y}_p-\widetilde{x}^{\mathrm{T}}Q\widetilde{x}-\widetilde{x}^{\mathrm{T}}K^{\mathrm{T}}K\widetilde{x}-\widetilde{x}^{\mathrm{T}}L^{\mathrm{T}}L\widetilde{x}-\\&2\widetilde{x}^{\mathrm{T}}K^{\mathrm{T}}\widetilde{B}^{+}\Delta\widetilde{A}(p)\widetilde{x}+2\widetilde{x}^{\mathrm{T}}L^{\mathrm{T}}L\widetilde{x}-\\&2\widetilde{x}^{\mathrm{T}}K^{\mathrm{T}}\widetilde{B}^{+}\Delta\widetilde{B}(p)K\widetilde{x}=\\&-\widetilde{y}_p^{\mathrm{T}}\widetilde{y}_p-\widetilde{x}^{\mathrm{T}}Q\widetilde{x}-\widetilde{x}^{\mathrm{T}}K^{\mathrm{T}}K\widetilde{x}+\widetilde{x}^{\mathrm{T}}L^{\mathrm{T}}L\widetilde{x}-\\&2\widetilde{x}^{\mathrm{T}}K^{\mathrm{T}}\widetilde{B}^{+}\Delta\widetilde{A}(p)\widetilde{x}-2\widetilde{x}^{\mathrm{T}}K^{\mathrm{T}}\widetilde{B}^{+}\Delta\widetilde{B}(p)K\widetilde{x}.\end{aligned}$$

又由增广系统状态方程可知

$$\widetilde{y}_p^{\mathrm{T}}\widetilde{y}_p=\widetilde{x}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}C_p & 0 & 0\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}C_p & 0 & 0\end{bmatrix}\widetilde{x}=\widetilde{x}^{\mathrm{T}}\varPhi(p)^{\mathrm{T}}\varPhi(p)\widetilde{x}, \tag{20}$$

所以

$$\begin{aligned}&\dot{V}(\widetilde{x})=\\&-\widetilde{x}^{\mathrm{T}}(\varPhi(p)^{\mathrm{T}}\varPhi(p)+Q+K^{\mathrm{T}}K-L^{\mathrm{T}}L+\\&2K^{\mathrm{T}}\widetilde{B}^{+}\Delta\widetilde{A}(p)+2K^{\mathrm{T}}\widetilde{B}^{+}\Delta\widetilde{B}(p)K)\widetilde{x}.\end{aligned} \tag{21}$$

当$\widetilde{x}\neq 0$时, $\forall p\in(p_{\min},p_{\max})$, 只要

$$\begin{aligned}&\varPhi(p)^{\mathrm{T}}\varPhi(p)+Q+K^{\mathrm{T}}K-L^{\mathrm{T}}L+\\&2K^{\mathrm{T}}\widetilde{B}^{+}\Delta\widetilde{A}(p)+2K^{\mathrm{T}}\widetilde{B}^{+}\Delta\widetilde{B}(p)K>0,\end{aligned} \tag{22}$$

就有$\dot{V}(\widetilde{x})<0$成立, 那么$V(\widetilde{x})$是增广系统的一个Lyapunov函数, $u=-K\widetilde{x}$是系统鲁棒问题的解.

定义 2 定义

$$\widetilde{Q}=\inf\{\widetilde{\varPhi}:(\forall p\in(p_{\min},p_{\max}))|\widetilde{\varPhi}\leqslant\varPhi(p)^{\mathrm{T}}\varPhi(p)+Q\}, \tag{23}$$

以此作为系统LQR问题的"Q", $\widetilde{Q}>0$. 由式(14)(15)不难得到增广系统LQR问题的$\widetilde{A}$,$\widetilde{B}$,$\widetilde{R}$(注: $u^{\mathrm{T}}u+v^{\mathrm{T}}v$可以表示为$\begin{bmatrix}u\\v\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\widetilde{R}\begin{bmatrix}u\\v\end{bmatrix}$, 可以得出$\widetilde{R}$为单位矩阵, 阶数可以根据辅助方程(12)确定, 本文仿真实例$\widetilde{R}=1$), 从而可以通过Riccati方程求解反馈控制律$\begin{bmatrix}K\\L\end{bmatrix}$.

4 仿真(Simulation)

4.1 仿真步骤(Steps of simulation)

基于模型参考和内模原理的线性系统鲁棒控制设计方法的步骤如下:

Step 1 选择参考模型, 确定信号不稳定振型的内模, 建立相应的鲁棒控制系统结构(如图2所示)及其状态空间方程(8)(9)两式.

Step 2 检查系统是否满足能控性条件i) ii). 满足, 则转Step 3; 否则, 转Step 1.

Step 3 将状态方程式(8)(9)变换成式(12)(13).

Step 4 按式(15)选择Q使被控系统、参考模型反馈后能满足性能指标, 再结合式(14)和式(23), 得到增广系统LQR问题的$\widetilde{A}$,$\widetilde{B}$,$\widetilde{Q}$,$\widetilde{R}$.

Step 5 求解相应的Riccati方程, 得最优反馈控制律$u=-K\widetilde{x}$, $v=-L\widetilde{x}$. 此步骤即LQR问题求解.

Step 6 将反馈控制律K, L代入式(22)进行验证. 满足条件, 则结束; 否则, 转Step 4.

4.2 仿真实例(Simulation example)

被控系统

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & -2\end{bmatrix},\ \Delta A=\begin{bmatrix}0 & p\\p & p\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix},\ \Delta B=\begin{bmatrix}p\\p\end{bmatrix},$$

$$C=\begin{bmatrix}1 & 2\end{bmatrix},\ \Delta C=\begin{bmatrix}p & p\end{bmatrix},\ B_w=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix},\ D_w=1,$$

其中$p\in[0\ \ 3]$. 要求最优性能指标$\int_0^{\infty}(x^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}10 & 0\\0 & 10\end{bmatrix}x+u^{\mathrm{T}}u)\mathrm{d}t$最小. 参考模型$A_m=\begin{bmatrix}-6.1697 & -1.7029\\-2.5849 & -2.8515\end{bmatrix}$,

$B_m = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, C_m = [1\ \ 2]$. 干扰信号$w$位于右半闭$s$平面上的根因式为$\Phi(s) = s$, 相应的内模状态方程为

$$\begin{cases} \dot{x}_c = e, \\ y_c = x_c. \end{cases}$$

取

$$\widetilde{Q} = \inf\{\widetilde{\Phi} : (\forall p \in (p_{\min},\ p_{\max}))|\widetilde{\Phi} \leqslant \Phi(p)^{\mathrm{T}}\Phi(p) + Q\} = \begin{bmatrix} 10.2500 & -0.2500 & 0 & 0 & 0 \\ -0.2500 & 10.2500 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10.0000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10.0000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10.0000 \end{bmatrix},$$

经MATLAB数值仿真, 得

$$K = [\,2.9217\ \ 2.1447\ \ 0.4046\ \ 1.8345\ \ 3.1623\,]$$

和

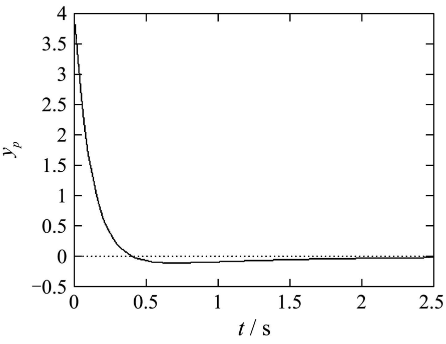
$$L = \begin{bmatrix} 10.2567 & -11.7816 & 1.4828 & -8.7758 & -11.1137 \\ -11.7816 & 18.3744 & -2.7673 & 12.8681 & 16.9618 \\ 1.4828 & -2.7673 & 1.6614 & -3.1146 & -2.7180 \\ -8.7758 & 12.8681 & -3.1146 & 12.7472 & 13.8638 \\ -11.1137 & 16.9618 & -2.7180 & 13.8638 & 20.3528 \end{bmatrix}.$$

验算$\Phi(p)^{\mathrm{T}}\Phi(p) + Q + K^{\mathrm{T}}K - L^{\mathrm{T}}L + 2K^{\mathrm{T}}\widetilde{B}^{+}\Delta\widetilde{A}(p) + 2K^{\mathrm{T}}\widetilde{B}^{+}\Delta\widetilde{B}(p)K > 0$ $(\forall p \in (p_{\min},\ p_{\max}))$ 成立, 故u=$-K\widetilde{x}$是所求鲁棒问题的反馈控制律. 反馈前, 不确定因素p在区间[0　3]上单调递增时, 系统极点大多位于s右半平面, 而且系统存在干扰信号; 反馈后, 系统在不确定因素p的作用下是稳定的, 抗干扰能力明显增强. 从表1可以看出增广系统反馈后的鲁棒稳定性; 从图3(a)(b)(c)(d)的y_p在不确定因素p 作用下的脉冲响应曲线可以看出: 当$t \to \infty$时, $y_p \to 0$; 而且具有较好的鲁棒性能(限于篇幅, 表1和图3只给出$p = 0, 1, 2, 3$时的系统特征根和脉冲响应情况).

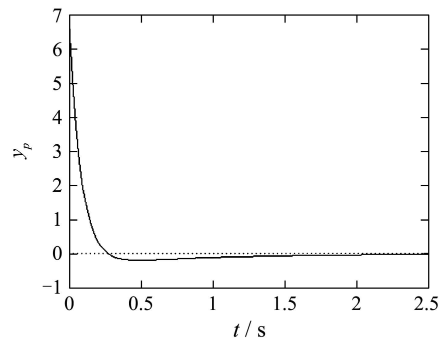
表 1　增广系统反馈后闭环系统的特征根

Table 1　Characteristic roots of closed-loop systems after the feedback of the augmented systems

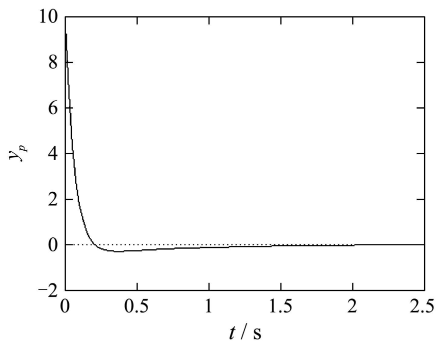
不确定因素p	特征根S_1	特征根S_2	特征根S_3	特征根S_4	特征根S_5
0	–11.2801	–4.7939	–0.1791	–2.5902	–1.8134
1	–13.1658	–4.3577+1.4244i	–4.3577–1.4244i	–0.9777	–1.8640
2	–14.7130	–5.3057+2.4991i	–5.3057–2.4991i	–1.5937	–1.8713
3	–15.8353	–6.4919+3.0906i	–6.4919–3.0906i	–2.1904	–1.8462



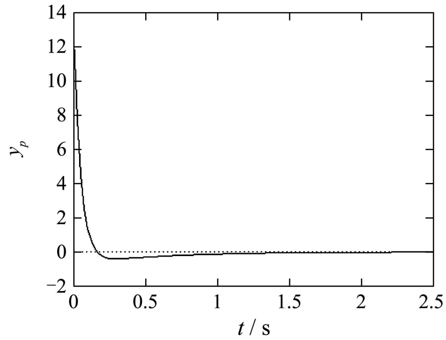
(a) p=0



(b) p=1



(c) p=2



(d) p=3

图 3　p取不同值时y_p的脉冲响应

Fig. 3　Impulse response of y_p for different p

5 结束语(Conclusion)

该鲁棒控制系统设计方法, 利用参考模型和内模原理构造增广系统, 以最优控制理论进行反馈控制律的求解. 仿真结果表明, 该系统不仅有较好的鲁棒稳定性、满足最优性能指标, 而且达到了抑制干扰的目的. 由于被控对象的状态可能是不可检测的, 可以利用计算机强大数据处理能力, 根据在线检测的数据对系统进行辨识, 实时选择最优的反馈控制律, 实现系统的(自适应)鲁棒控制[9]. 但是利用增广系统进行求解, 系统阶次较高, 鲁棒控制问题的解是否存在的判据:

$$\varPhi(p)^{\mathrm{T}}\varPhi(p)+Q+K^{\mathrm{T}}K-L^{\mathrm{T}}L+2K^{\mathrm{T}}\widetilde{B}^{+}\Delta\widetilde{A}(p)+ 2K^{\mathrm{T}}\widetilde{B}^{+}\Delta\widetilde{B}(p)K>0\ (\forall p\in(p_{\min},p_{\max})).$$

一般必须借助于MATLAB等计算机软件工具进行计算, 虽然可以取$\varPhi(p)^{\mathrm{T}}\varPhi(p)$,$K^{\mathrm{T}}\widetilde{B}^{+}\Delta\widetilde{A}(p)$, $K^{\mathrm{T}}\widetilde{B}^{+}\Delta\widetilde{B}(p)K$的下确界来简化计算, 但过于保守; 另一方面, 随着计算机技术的快速发展, 计算复杂等不利因素正在弱化.

参考文献(References):

[1] 王德进. H_2和H_∞优化控制理论[M]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学出版社, 2001: 2 – 3, 5.
(WANG Dejin. H_2 *and* H_∞ *Optimal Control Theory*[M]. Harbin: Harbin Institute of Technology Press, 2001: 2 – 3, 5.)

[2] 梅华, 孙建平, 李鹏. 内模控制系统的鲁棒机理分析[J]. 电力情报, 2001, (3): 46 – 51.
(MEI Hua, SUN Janping, LI Pen. Mechanism analysis of IMC system robustness[J]. *Information on Electric Power*, 2001, (3): 46 – 51.)

[3] 师黎, 孔金生. 反馈控制系统导论[M]. 北京: 科学出版社, 2005: 122 – 126.
(SHI Li, KONG Jinsheng. *Introduction to Feedback Control Systems*[M]. Beijing: Science Press, 2005: 122 – 126.)

[4] 季钦南, 翁正新. 一种模型状态反馈鲁棒控制方法[J]. 应用科学学报, 2000, 18(4): 340 – 344.
(JI Qinnan, WENG Zhengxin. A Robust control approach using model state feedback[J]. *J of Applied Sciences*, 2000, 18(4): 340 – 344.)

[5] LIN Yan, JIANG Xu, CHENG Pen. New result on model reference robust control: Tracking performance improvement[J]. *Acta Automatica Sinica*, 2005, 31(2): 327 – 334.

[6] 吴雄华, 陈承东, 钱仲范. 矩阵论[M]. 上海: 同济大学出版社, 1993: 10 – 13.
(WU Xionghua, CHEN Chengdong, QIAN Zhongfan. *Matrix Theory*[M]. Shanghai: Tongji University Press, 1993: 10 – 13.)

[7] 郑大钟. 线性系统理论[M]. 北京: 清华大学出版社, 2002: 173 – 180
(ZHENG Dazhong. *Linear Control Theory*[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2002: 173 – 180.)

[8] LIN F. An optimal control approach to robust control design[J]. *Int J Control*, 2000, 73(3): 177 – 186.

[9] 谢新民, 丁峰. 自适应控制系统[M]. 北京: 清华大学出版社, 2002.
(XIE Xinmin, DING Feng. *Adaptive Control Systems*[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2002.)

作者简介:

潘 登 (1969—), 男, 博士研究生, 主要研究方向为智能控制、控制与决策等, E-mail: pandengreal@hotmail.com;

郑应平 (1941—), 男, 教授, 博士生导师, 主要研究方向为智能控制、复杂系统、控制与决策等, E-mail: Zheng_ying_ping@hotmail.com.