文章编号：1000−8152(2007)04−0657−04

基于变量梯度法的磁悬浮控制系统的状态稳定性

余龙华，卢晓慧，施晓红

(国防科技大学 三院磁悬浮研究中心, 湖南 长沙 410073)

摘要: 磁悬浮系统是个典型的非线性系统, 将非线性系统进行线性化后设计磁悬浮控制器, 可以保证系统在平衡点附近稳定, 但是当存在较大的干扰时, 系统有可能失去稳定. 本文分析单支点悬浮系统的稳定性, 运用变量梯度法构造李雅普诺夫函数, 推导出系统相对于平衡点的状态稳定保守区间, 给出了系统的一个抗干扰程度, 当磁悬浮系统受到较大干扰而偏离这一区间时, 就应采取必要的自适应控制措施. 最后用试验验证了这种控制方案的可行性.

关键词: 悬浮控制; 状态稳定; 变量梯度法

中图分类号: TP13 **文献标识码**: A

State stability of maglev control system based on variable gradient method

SHE Long-hua, LU Xiao-hui, SHI Xiao-hong

(Maglev Research Center, National University of Defense Technology, Changsha Hunan 410073, China)

Abstract: Magnetic levitation system is a typical nonlinear system. A controller based on linear magnetic levitation system can guarantee the system's stability around the equilibrium point. In fact, under severe disturbance the system's stability may be destroyed. The stability of single point magnetic levitation system is analyzed. A Lyapunov function is built by the variable gradient method, and a conservative state stability region is then derived. When the magnetic levitation system moves away from the stability region by severe disturbance, an adaptive control action should be taken. Finally the feasibility of this method is testified by our experiments.

Key words: magnetic levitation control; state stability; variable gradient method

1 引言(Introduction)

磁悬浮列车系统是个结构非常复杂的非线性系统, 但人们在设计控制器时, 一般采用了在工作点线性化的设计方法[1~3]. 通过这种方法设计的控制器可以满足磁悬浮系统的一般运行要求. 但是当系统受到较大干扰而远离平衡点时, 基于非线性系统的稳定性理论可以知道, 系统有可能失去稳定. 对于常导磁悬浮列车而言, 悬浮间隙约8 mm, 这种失去稳定将可能导致悬浮电磁铁在高速运行情况下撞击轨道, 从而出现严重安全事故. 基于这样的考虑, 本文利用变量梯度法得到系统的一个状态稳定区间, 当系统的状态超越这一范围时, 将根据自适应的策略, 调整控制参数, 使系统还是处于稳定状态. 这种方法所得到的区间是保守的, 但是从工程安全的角度来考虑, 却是十分有价值的. 这一点已经被笔者的试验所证明.

收稿日期: 2005−05−17; 收修改稿日期: 2006−07−12.

基金项目: 国家863计划资助项目(2003AA505220).

2 磁悬浮系统模型(Magnetic levitation system model)

考虑包括空气弹簧在内的单支点磁悬浮系统基本结构如图1所示.

如果只考虑系统在铅锤方向的运动, 不考虑轨道、磁浮架和车厢的弹性, 同时忽略漏磁和铁芯磁阻, 可得到系统3个基本物理方程[4]:

电磁铁线圈的电感方程:

$$L(z)=\frac{\mu_0 N^2 A}{2z_1(t)}. \tag{1}$$

电磁铁产生的电磁力方程:

$$F(i,z_1)=\frac{\mu_0 N^2 A}{4}\left(\frac{i(t)}{z_1(t)}\right)^2. \tag{2}$$

电磁铁线圈的电压电流方程:

$$u(t)=$$

$$Ri(t)+\frac{\mu_0 N^2 A}{2z_1(t)}\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}-\frac{\mu_0 N^2 A i(t)}{2z_1(t)^2}\frac{\mathrm{d}z_1(t)}{\mathrm{d}t}. \quad (3)$$

根据两自由度系统振动规律可得到空气弹簧以下结构及其以上载荷的动力学方程:

$$\begin{cases} Mg+mg-F+ \\ K_A(z_2-z_1)+\xi_A(\dot{z}_2-\dot{z}_1)=m\ddot{z}_1, \\ -K_A(z_2-z_1)-\xi_A(\dot{z}_2-\dot{z}_1)=M\ddot{z}_2. \end{cases} \quad (4)$$

其中: M和m分别表示空气弹簧以上载荷的质量和空气弹簧以下结构的质量, z_1和z_2分别表示电磁铁的位移和车厢的位移, k_A和ξ_A分别表示空气弹簧的刚度和阻尼, N表示磁铁的线圈匝数, R表示磁铁的线圈电阻, A表示磁铁的有效极面积, i表示磁铁的电流, μ_0为空气磁导率.

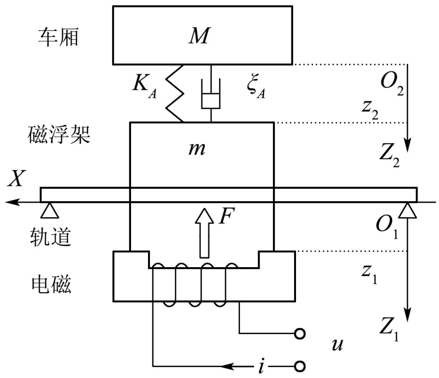

图 1 考虑空气弹簧的单支点磁悬浮系统

Fig. 1 Single point magnetic levitation system with air spring

采用以下反馈控制律可以使得磁悬浮系统在工作点附近稳定:

$$u=u_{ec}+k_P\Delta z_1+k_D\Delta\dot{z}_1+k_C\Delta i. \quad (5)$$

其中

$$u_{ec}=Rz_{1e}\sqrt{\frac{(M+m)g}{C}}. \quad (6)$$

其中: $C\equiv\dfrac{\mu_0 N^2 A}{4}$为系统结构常数, k_P为位置反馈系数, k_D为速度反馈系数, k_C为电流反馈系数.

这里要说明的是, 由于空气弹簧的固有频率一般为1Hz左右, 而磁悬浮闭环系统的系统频率往往为几十赫兹, 从而系统在进行动态调节时, 高频振动会被空气弹簧极大地衰减. 因此, 在考虑悬浮间隙稳定性能时, 一般不考虑空气弹簧对系统动态特性的影响, 但是空气弹簧以上部分的质量对系统的平衡点的影响则必须考虑[5]. 因此, 在悬浮间隙动态调节过程中, 方程(4)可简化为

$$Mg+mg-F=m\ddot{z}_1. \quad (7)$$

设定线圈电流为控制输入, 悬浮系统可以简化为二阶系统[1]:

$$u(t)=i(t). \quad (8)$$

方程(5)(6)可简化为

$$u=u'_{ec}+k_P\Delta z_1+k_D\Delta\dot{z}_1, \quad (9)$$

$$u'_{ec}=z_{1e}\sqrt{\frac{(M+m)g}{C}}. \quad (10)$$

于是可知简化的具有二次悬挂结构的磁悬浮系统模型如下:

$$\begin{cases} (M+m)g-C\left(\dfrac{i(t)}{z_1(t)}\right)^2=m\ddot{z}_1, \\ u(t)=i(t)=u'_{ec}+k_P\Delta z_1+k_D\Delta\dot{z}_1. \end{cases} \quad (11)$$

3 非线性状态空间模型平衡点与稳定性(Equilibrium point and stability of nonlinear state-space model)

取状态变量$X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$, 其中$x_1=z_1, x_2=\dot{z}_1$, 于是系统的状态空间描述方程为

$$\begin{cases} \dot{x}_1=x_2, \\ \dot{x}_2=\dfrac{(M+m)g}{m}-\dfrac{C}{m}\left(\dfrac{u}{x_1}\right)^2. \end{cases} \quad (12)$$

取$\dot{X}=f(X_e,u'_{ec})=0$得到系统的平衡点

$$X_e=\begin{pmatrix}x_{1e}\\x_{2e}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}z_{1e}\\0\end{pmatrix}. \quad (13)$$

将系统的平衡状态移到坐标原点, 得系统的状态方程为

$$\begin{cases} \dot{x}_1=x_2, \\ \dot{x}_2=\dfrac{(M+m)g}{m}-\dfrac{C}{m}\left(\dfrac{u'_{ec}+k_Px_1+k_Dx_2}{x_1+z_{1e}}\right)^2. \end{cases} \quad (14)$$

将系统进行线性化, 由劳斯稳定判据[6]可知, 为使系统局部渐近稳定, 控制参数需满足如下约束条件:

$$\begin{cases} k_D>0, \\ k_P>\sqrt{\dfrac{(M+m)g}{C}}. \end{cases} \quad (15)$$

然而当控制参数k_P,k_D取定以后, 更重要也是比较实际的问题是如何判定磁悬浮系统的抗干扰程度, 或者说, 当悬浮状态变量X与坐标原点的距离在多大的范围以内时, 系统还保持稳定.

4 状态稳定范围(State stability range)

对于线性定常系统, 可用劳斯-胡尔维茨稳定判据或乃奎斯特稳定判据对系统的稳定性进行判断. 但是由于磁悬浮系统是一个结构复杂的非线性系统, 一般来说上述稳定判据是难以胜任的, 因此在解

决悬浮系统的稳定性问题时, 常常采用李雅普诺夫第二法分析系统的稳定性[7]. 寻求非线性系统李雅普诺夫函数的常用方法有: 试凑法、变量梯度法、克拉索夫斯基法等. 实践证明, 采用试凑法构造李雅普若夫函数对于悬浮系统是不可取的, 因此本文采用变量梯度法来分析系统的稳定性.

运用变量梯度法构造李雅普诺夫函数采用基于反向思维的构造思路: 首先按照李雅普诺夫稳性定理条件构造李雅普诺夫函数的导数, 在此基础上确定候选的李雅普诺夫函数, 然后进一步判断候选李雅普诺夫函数的正定性. 若李雅普诺夫函数正定则构造成功, 否则, 则构造失败, 需要重新进行构造[8]. 下面详细介绍磁悬浮系统的李雅普诺夫函数具体构造过程.

第1步　设定能量函数的梯度函数

$$\nabla V=\begin{pmatrix}a_{11}x_1+a_{12}x_2\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2\end{pmatrix}. \tag{16}$$

其中为了分析问题的方便, 不妨取$a_{22}=2$.

第2步　通过∇V确定李雅普诺夫函数的导数$\dot V$:

$$\dot V=(\nabla V)^{\mathrm T}\dot X=\frac{1}{(x_1+z_{1e})^2}(Ax_1^2+Bx_1^2x_2^2+Dx_2^2+Ex_1x_2). \tag{17}$$

其中:

$$\begin{aligned}
&a=\frac{(M+m)g}{m},\ b=\frac{k_P^2C}{m},\ d=\frac{2k_Pk_DC}{m},\\
&e=\frac{k_D^2C}{m},\ f=\frac{2u_{ec}k_PC}{m},\ g=\frac{2u_{ec}k_DC}{m},\\
&h=\frac{Cu_{ec}^2}{m},\ B=a_{12},\\
&A=a_{11}x_1x_2+(2a_{11}z_{1e}+aa_{22}-ba_{22}-a_{21}d)x_2+(a_{21}a-a_{21}b)x_1+(2az_{1e}a_{21}-a_{21}f),\\
&C=(2z_{1e}a_{12}-a_{22}d-a_{21}e)x_1-a_{22}ex_2+(a_{12}z_{1e}^2-a_{22}g),\\
&D=a_{11}z_{1e}^2+2az_{1e}a_{22}-a_{22}f-a_{21}g.
\end{aligned}$$

第3步　令$\dot V$负定或半负定和∇V的2维旋度等于零, 确定梯度函数中的部分参数. 试探选取$a_{12}=a_{21}=0$, $a_{11}=\dfrac{4k_PC}{mz_{1e}}\sqrt{\dfrac{(M+m)g}{C}}-\dfrac{4(M+m)g}{mz_{1e}}$, 则

$$\dot V=\frac{1}{(x_1+z_{1e})^2}[a_{11}x_1x_2+(2a_{11}z_{1e}+2a-2b)x_2]x_1^2+\frac{1}{(x_1+z_{1e})^2}(-2dx_1-2g-2x_2e)x_2^2. \tag{18}$$

如果

$$\begin{cases}dx_1+g+ex_2>0,\\ a_{11}x_1x_2+(2a_{11}z_{1e}+2a-2b)x_2\leqslant 0.\end{cases} \tag{19}$$

则$\dot V$是半负定的, 因此式(19)是x_1,x_2的限定条件. 梯度函数

$$\nabla V=\begin{pmatrix}\nabla V_1\\ \nabla V_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}x_1\\ 2x_2\end{pmatrix}. \tag{20}$$

满足梯度方程的条件

$$\frac{\partial(\nabla V_2)}{\partial x_1}=\frac{\partial(\nabla V_1)}{\partial x_2}. \tag{21}$$

第4步　验证是否符合$\dot V$为负定, V为正定的条件:

$$V=\int_0^{x_1(x_2=0)}\nabla V_1\mathrm dx_1+\int_0^{x_2(x_1=x_1)}\nabla V_2\mathrm dx_2=\frac{a_{11}}{2}x_1^2+2x_2^2. \tag{22}$$

由式(15)可知$a_{11}>0$, 故李雅普诺夫函数正定.

当$x_1=0$, $x_2=0$时, $\dot V=0$; $x_1\neq 0$, $x_2=0$时, $\dot V=0$, 因此$\dot V$是半负定的. 下面判断当$x_1\neq 0$, $x_2=0$时, $\dot V$是否恒等于零. 如果$\dot V$恒等于零必须要求x_2在$t\geqslant t_0$时恒等于零, 而x_2恒等于零又要求$\dot x_2$恒等于零. 从式(14)来看, 要使x_2,$\dot x_2$都恒等于零, 必须满足$k_P=\sqrt{\dfrac{(M+m)g}{C}}$, 而这个条件又不符合式(15). 因此, 只可能在坐标原点处恒等于零, 所以当满足式(19)时, 在原点处的平衡状态是渐近稳定的.

综上所述, 系统在原点处的平衡状态在以下范围内是渐近稳定的:

$$\begin{cases}2k_Px_1+2z_{1e}\sqrt{\dfrac{(M+m)g}{C}}+k_Dx_2>0,\\ \left(\dfrac{2k_PC}{z_{1e}}\sqrt{\dfrac{(M+m)g}{C}}-\dfrac{2(M+m)g}{z_{1e}}\right)x_1x_2+\\ \left(\dfrac{4k_PC}{z_{1e}}\sqrt{\dfrac{(M+m)g}{C}}-\right.\\ \left.3(M+m)g-Ck_P^2\right)x_2\leqslant 0.\end{cases} \tag{23}$$

式(23)即为磁悬浮控制系统的状态稳定区间.

当状态变量超过上述不等式所界定的区间时, 系统将自动调整控制参数, 使上述不等式继续成立.

5　试验研究(Experiment research)

图2为国防科技大学的双转向架搭接结构悬浮试验系统[9]. 其中相邻两个搭接悬浮点与一个空气弹簧对应. 采用关闭一个悬浮点的方式来模拟对搭接结构产生的干扰. 图3表示当关闭一个搭接悬浮点而不改变控制参数时, 悬浮间隙的过调量

约3 mm. 图4表示当关闭一个搭接悬浮点而按照满足方程(23)的约束改变控制参数时, 悬浮间隙的过调量约1 mm. 前面已经提到, 常导磁浮列车的间隙一般只有约8 mm, 因此, 这种基于保守状态稳定区间的调节方式是十分有意义的.

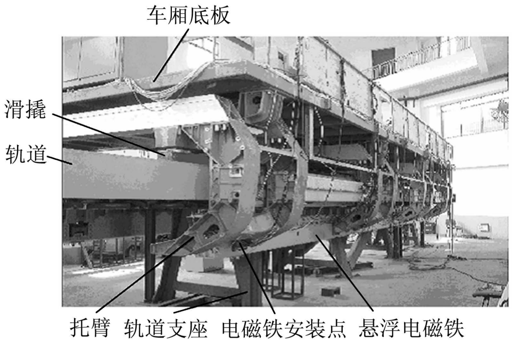

图 2　双磁浮架搭接试验系统

Fig. 2　Experiment system of two coupled magnetic levitation chassis

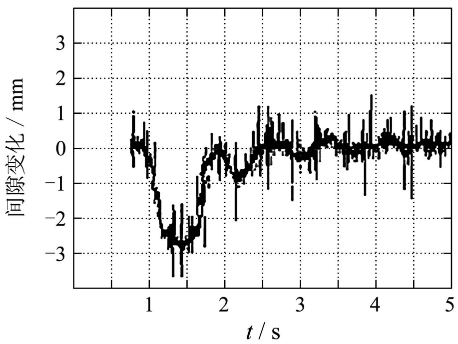

图 3　不校正控制参数时的间隙变化

Fig. 3　Gap variance while not changing control parameter

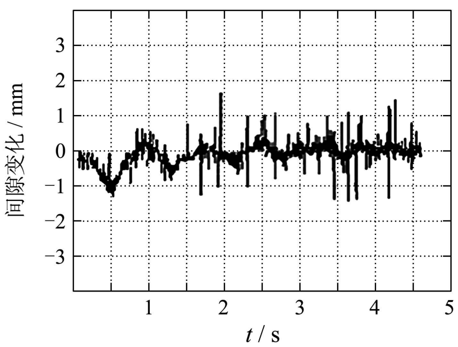

图 4　校正控制参数时的间隙变化

Fig. 4　Gap variance while changing control parameter

6　结论(Conclusion)

本文针对磁悬浮系统, 运用变量梯度法构造李雅普诺夫函数, 从而推导出磁悬浮系统相对于平衡点的状态稳定区间, 得到了悬浮系统的一个抗干扰程度, 如果系统受到较大干扰而偏离以上状态稳定区间时, 系统必须采取相应的控制措施, 使系统继续保持稳定且能逐步将系统调整到平衡点. 需要指出, 本文所得到的状态稳定区间是保守的, 如何得到充分的状态稳定范围值得进一步的理论研究. 但这种方法从控制理论的工程应用角度来讲, 确有它的实用价值, 并已被本文的试验所验证.

参考文献(References):

[1] RUMPER D L, OLSON S M, SUBRAHANYAN P K. Linearizing control of magnetic suspesion systems[J]. *IEEE Trans on Control Systems Technology*, 1997, 5(4): 427 – 438.

[2] 李云钢, 常文森. 磁悬浮列车悬浮系统的串级控制[J]. 自动化学报, 1999, 25(2): 32 – 38.
(LI Yungang, CHANG Wensen. Serial control of levitation system of magnetic vechicle[J]. *Acta Automatica Sinica*, 1999, 25(2): 32 – 38.)

[3] 龙志强, 郝阿明, 曹承倔. 降低参数灵敏度的磁浮列车鲁棒悬浮控制器设计[J]. 控制理论与应用, 2004, 21(5): 804 – 808.
(LONG Zhiqiang, HAO Aming, CAO Chengkan. Sensitivity constrained robust controller design of suspension controller for maglev train[J]. *Control Theory & Application*, 2004, 21(5): 804 – 808.)

[4] SINHA P K. *Electromagnetic Suspension Dynamic & Control*[M]. London, UK: Peter Peregrinus Ltd, 1987.

[5] 施晓红. 常导高速磁浮列车车轨耦合非线性动力学问题研究[D]. 长沙: 国防科学技术大学, 2005.
(SHI Xiaohong. *Research on the guideway-vehicle coupling nonlinear dynamic problems of the EMS high-speed maglev*[D]. Changsha: National University of Defense Technology, 2005.)

[6] 胡寿松. 自动控制原理[M]. 第3版. 北京: 国防工业出版社, 1994.
(HU Shousong. *Principle of Automatic Control*[M]. 3rd Edition. Beijing: National Defence Industry Press, 1994.)

[7] 于长官. 现代控制理论[M]. 第2版. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学出版社, 1997. (YU Changguan. *Modern Control Theory*[M]. 2nd Edition. Harbin: Harbin Institute of Technology Press, 1997.)

[8] 郑大钟. 线性系统理论[M]. 第2版. 北京: 清华大学出版社, 2002.
(ZHENG Dazhong. *Linear System Theory*[M]. 2nd Edition. Beijing: Tsinghua University Press, 2002.)

[9] 刘恒坤. 常导高速磁浮列车双转向架搭接结构的悬浮控制问题研究[D]. 长沙: 国防科学技术大学, 2005.
(LIU Hengkun. *Research on the suspension control problems of EMS high-speed maglev train double bogies join-structure*[D]. Changsha: National University of Defense Technology, 2005.)

作者简介:

佘龙华　(1970—), 男, 副教授, 国防科技大学磁悬浮技术工程研究中心副总设计师, 研究领域为磁悬浮控制技术, E-mail: shelonghua@yahoo.com.cn;

卢晓慧　(1981—), 女, 国防科技大学三院硕士研究生, 研究领域为磁悬浮控制, E-mail: xinyangluxiaohui@sina.com;

施晓红　(1976—), 女, 国防科技大学三院博士研究生, 研究领域为磁悬浮列车动力学特性, E-mail: redsxh@hotmail.com.