

实际输入饱和的一类非完整运动学系统的镇定

刘毅^{1,2}, 王朝立¹, 李清松¹

(1. 上海理工大学 电气工程学院, 上海 200093; 2. 上海应用技术学院 机械与自动化工程学院, 上海 200235)

摘要: 对一类非完整移动机器人提出了实际输入饱和和镇定控制器的设计方案. 这种设计不是基于链式系统而是基于原始系统的. 控制器的设计使用了滑模控制和多步控制策略, 并用Lyapunov的思想证明了闭环系统的收敛性. 最后, 用设计的控制器对一类机器人进行了仿真, 验证了方法的有效性.

关键词: 非完整控制系统; 镇定; 移动机器人; 输入饱和

中图分类号: TP18, TP24 **文献标识码:** A

Stabilization of nonholonomic kinematic systems based on practical input saturation

LIU Yi^{1,2}, WANG Chao-li¹, LI Qing-song¹

(1. Electric Engineering College, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China;

2. School of Mechanical and Automation Engineering, Shanghai Institute of Technology, Shanghai 200235, China)

Abstract: Stabilizing control schemes are proposed for nonholonomic wheeled-mobile robots with saturated practical inputs. These schemes are given not based on chained forms, but based on original systems. The stabilizing controllers are then investigated by using sliding mode control and multiple step control schemes. The convergence of the closed loop system is also proved by using Lyapunov method. Finally, the simulations are implemented based on the nonholonomic robot with the proposed controller, and the validity of the design is verified.

Key words: nonholonomic control system; stabilization; robot; input saturation

1 引言(Introduction)

20多年来, 非完整控制系统的镇定问题受到极大关注. 非完整控制系统不满足Brockett关于纯状态光滑反馈镇定的必要条件^[1], 所以只能寻求其他的解决方案. 现有的镇定控制律有时变控制律, 不连续控制律, 以及混合控制律^[2~4].

上述控制器的一个共同特点是没有考虑输入的受限性. 在Luo和Tsotras^[5]中, 考虑了输入受限下反馈镇定控制器设计方法. 在文[6, 7]中, 讨论了输入受限下, 链式系统的镇定控制器设计, 然而这些受限的输入不是原始系统的输入, 而是经过状态和输入变换后得到的新输入, 故很难知道是否原始系统的输入超出了理想的界限. 本文讨论原始输入受限下非完整移动机器人的镇定问题.

2 问题的提出(Problem statement)

Campion^[8]认为4类有意义的非完整轮式移动机器人有(2, 0), (2, 1), (1, 1)和(1, 2). 为叙述简单, 这里仅考虑一类系统, 即(2, 1)型机器人, 见图1所示.

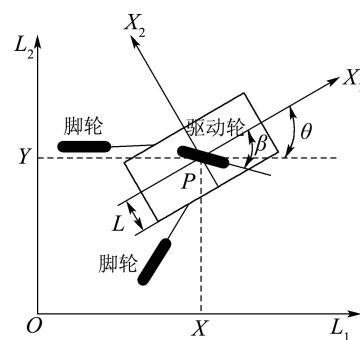


图1 (2,1)型机器人

Fig. 1 Type (2,1) Robot

这里导向轮是指: 轮子平面可以绕过轮子中心的垂直轴转动. 轮子平面与机器人系之间的角度为 $\beta(t)$ 是时变的. 脚轮是可以任意改变方向的轮子, 轮子平面的转动轴不是通过轮子平面中心的.

假设 X, Y 是机器人上一个参考点 P 在惯性系 $\{O, L_1, L_2\}$ 下的坐标表示, θ 表示任意机器人上固连坐标系 $\{X_1, X_2\}$ 与惯性系 $\{L_1, L_2\}$ 之间的夹角,

β 表示导向轮的方向角, L 是移动机器人宽度的一半.
(2,1)型这一类机器人可以用下面方程来表示^[8]:

$$\begin{cases} \dot{x} = -v_1 \sin(\theta + \beta), \\ \dot{y} = v_1 \cos(\theta + \beta), \\ \dot{\theta} = v_2, \\ \dot{\beta} = v_3. \end{cases} \quad (1)$$

输入 $v_i (i = 1, 2, 3)$ 的物理意义解释如下: v_1 表示机器人行进方向的速度, v_2 表示机器人转动的角速度, v_3 表示导向轮转动的角速度.

所要研究的问题是: 对上述一类非完整移动机器人如何设计控制器 $v_i (i = 1, 2, 3)$ 使得闭环系统可镇定到零平衡点的任意小领域中, 而系统输入又不出预先给定的界限.

3 预备知识(Preliminary knowledge)

为讨论方便, 引入下面引理:

引理 1 任给实数 γ, b_1, b_2 , 且 $b_2 \neq 0$, 则

$$\begin{cases} |b_1 \cos \gamma + b_2 \sin \gamma| = \Lambda |\sin(\gamma + \Phi)|, \\ -\frac{\pi}{2} < \Phi < \frac{\pi}{2}. \end{cases} \quad (2)$$

这里 $\Phi = \tan^{-1} \frac{b_1}{b_2}$, $\Lambda = \sqrt{b_1^2 + b_2^2}$.

一些特殊情形如下定义:

$$\Phi = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & \text{for } b_2 = 0, b_1 > 0, \\ -\frac{\pi}{2}, & \text{for } b_2 = 0, b_1 < 0. \end{cases}$$

用三角函数的知识容易证明, 这里省略.

4 控制器设计(Controller design)

在这一部分, 镇定控制器按3步来设计.

考虑式(1)所示的(2,1)型机器人运动学方程, 定义候选Lyapunov函数 $V(t)$ 如下:

$$V(t) = \frac{1}{2}(x^2(t) + y^2(t)). \quad (3)$$

假设系统(1)的初始时刻为 $t_0 = 0$. 任给正数 $\varepsilon (0 < \varepsilon < 1)$, $\sigma, m_i (i = 1, 2, 3)$, 定义吸引域 D :

$$D = \left\{ (x, y, \theta, \beta) \mid \sqrt{2V(t)} \leq \sigma; x, y, \theta, \beta \in \mathbb{R}^1 \right\}. \quad (4)$$

所要研究的问题是: 如何设计 $v_i (i = 1, 2, 3)$ 使得系统(1)对任意初始条件 $(x(0), y(0), \theta(0), \beta(0)) \in D$, 满足

$$\text{i) 存在有限时间 } T > 0, \text{ 当 } t \geq T \text{ 时, 有} \\ |x(t)| \leq \varepsilon, |y(t)| \leq \varepsilon, |\theta(t)| \leq \varepsilon, |\beta(t)| \leq \varepsilon; \quad (5)$$

$$\text{ii) } |v_i(t)| \leq m_i (i = 1, 2, 3), t \geq 0. \quad (6)$$

定理 1 由式(1), 任取正数 $\varepsilon (0 < \varepsilon < 1)$, $\sigma, m_i (i = 1, 2, 3)$, 选取正数 $\bar{k}_1, k_1, k_2, k, \alpha$ 满足

$$\begin{cases} \bar{k}_1 \leq m_3, k_1 \sigma^3 \leq m_1, \bar{k}_1 + k_1 \sigma^2 < m_2, \\ \bar{k}_1 + k < m_2, 0 < \alpha < \pi, k_2 \leq m_2. \end{cases} \quad (7)$$

3步控制器设计为:

第1步 如果 $\sqrt{2V(0)} \leq \varepsilon$, 那么转第3步. 否则, 取

$$v_1 = 0, v_3 = -\bar{k}_1 \operatorname{sgn} \beta, v_2 = -v_3 + k \operatorname{sgn} e. \quad (8)$$

其中 $e = -\beta - \theta - \alpha + \tan^{-1} \frac{y}{x}$, 那么存在有限时间 T_1 满足

$$-\beta - \theta + \tan^{-1} \frac{y}{x} \equiv \alpha, t \geq T_1.$$

当 $t \geq T_1$ 时, 转第2步.

第2步 取

$$\begin{cases} v_1 = -k_1(x^2 + y^2)\psi_1, \\ v_3 = -\bar{k}_1 \operatorname{sgn} \beta, v_2 = -v_3 - k_1 \psi_1 \psi_2. \end{cases} \quad (9)$$

这里: $\psi_1 = y \cos(\theta + \beta) - x \sin(\theta + \beta), \psi_2 = x \cos(\theta + \beta) + y \sin(\theta + \beta)$, 那么存在有限时间 T_2 使

$$\sqrt{2V(t)} \leq \varepsilon, t \geq T_2.$$

当 $t \geq T_2$ 时, 转下一步.

第3步 取

$$v_1 = 0, v_3 = 0, v_2 = -k_2 \operatorname{sgn} \theta, \quad (10)$$

那么上述3步设计的控制器使得系统(1)的状态和控制输入, 对任何初始条件 $(x(0), y(0), \theta(0), \beta(0)) \in D$ 满足

i) 存在一个有限时间 $T > 0$ 使得

$$|x(t)| \leq \varepsilon, |y(t)| \leq \varepsilon, |\theta(t)| \leq \varepsilon, |\beta(t)| \leq \varepsilon, t \geq T;$$

ii) $|v_i(t)| \leq m_i (i = 1, 2, 3), t \geq 0$.

证 在每一步的证明中都要做的两件事: 1件是切换到下一步的条件会在有限时间内满足; 第2件是控制器 $v_i (i = 1, 2, 3)$ 满足受限要求, 即ii)成立.

假设 $(x(0), y(0), \theta(0), \beta(0))$ 是吸引域 D 中系统(1)的任意初始条件, 很明显, 由 D 定义可知

$$2V(0) = x^2(0) + y^2(0) \leq \sigma^2. \quad (11)$$

首先证明第1步.

假设 $2V(0) > \varepsilon^2$, 利用式(8), 沿式(1), 对第1步定义中 e 和 β 求导可得

$$\dot{e} = -v_2 - v_3 + \frac{\dot{y}x - y\dot{x}}{x^2 + y^2} = -v_2 - v_3 = -k \operatorname{sgn} e,$$

$$\dot{\beta} = -\bar{k}_1 \operatorname{sgn} \beta.$$

因此, 由滑模控制理论, 存在有限时间 $T_1 > 0$, 当 $t \geq T_1$ 时, $e(t) \equiv 0, \beta(t) \equiv 0$, 即

$$-\beta(t) - \theta(t) + \tan^{-1} \frac{y(t)}{x(t)} \equiv \alpha, \beta(t) \equiv 0. \quad (12)$$

这表明切换到下一步的条件成立. 由式(8)和(7)可知 $|v_1| \leq m_1, |v_3| \leq \bar{k}_1 \leq m_3, |v_2| \leq |v_3| + k \leq \bar{k}_1 + k \leq m_2$. 下面证明第2步.

沿系统(1)对式(3)中定义的 $V(t)$ 求导, 并利用式(9)可得

$$\dot{V} = (-x \sin(\theta + \beta) + y \cos(\theta + \beta))v_1 = -k_1 2V(t)(y \cos(\theta + \beta) - x \sin(\theta + \beta))^2. \quad (13)$$

这意味着 $V(t)$ 非增, 即 $V(t) \leq V(0)$. 故在 $V(t) \leq \varepsilon$ 之前 $V(t) > 0$ (即 $x^2 + y^2 > 0$). 这一特点将在下面证明中用到.

由引理1可知

$$|y \cos(\theta + \beta) - x \sin(\theta + \beta)| = \sqrt{x^2 + y^2} \left| \sin \left(-\theta - \beta + \tan^{-1} \frac{y}{x} \right) \right|.$$

这意味着由式(13)和 V 的定义可得

$$\dot{V} = -4k_1 V^2 \sin^2 \left(-\theta - \beta + \tan^{-1} \frac{y}{x} \right).$$

沿式(1)对第2步中定义的 e 求导可知, 对于 $t \geq T_1$ 并利用式(9),

$$\dot{e} = -v_2 - v_3 + \frac{\dot{y}x - y\dot{x}}{x^2 + y^2} = -v_2 - v_3 - k_1 \psi_1 \psi_2.$$

由式(9)中的 v_2 和 v_3 可知

$$\dot{e} = 0, t \geq T_1.$$

因为在第1步中 $e(T_1) = 0$, 故当 $t \geq T_1$ 时, $e(t) \equiv 0$, 进而

$$-\beta(t) - \theta(t) + \tan^{-1} \frac{y(t)}{x(t)} \equiv \alpha, t \geq T_1.$$

代入式(13), 可得

$$\dot{V} = -4k_1 V^2 \sin^2 \alpha, t \geq T_1.$$

积分可知

$$V(t) = \frac{V(T_1)}{1 + k_1(t - T_1)V(T_1)\sin^2 \alpha}, t \geq T_1. \quad (14)$$

由 α 定义可知 $\sin^2 \alpha > 0$, 故 $V(t)$ 收敛到零, 从而存在有限时间 T_2 满足

$$2V(t) \leq \varepsilon^2, t \geq T_2.$$

这表明切换到第3步的条件成立. 所以

$$|x(t)| \leq \varepsilon, |y(t)| \leq \varepsilon, |\beta(t)| \leq \varepsilon, t \geq T_2. \quad (15)$$

下面证明 $|v_i| \leq m_i, i = 1, 2, 3$.

由式(14)和(11), 对 $t \geq T_1$ 有

$$2V(t) \leq 2V(T_1) = 2V(0) \leq \sigma^2. \quad (16)$$

其中由第1步中之 $v_1 = 0$, 可知 $V(T_1) = V(0)$.

应该注意的是, 由式(9)(7)和(16), 可知, 对于 $T_1 \leq t \leq T_2$ 有

$$|v_1(t)| = |k_1 2V(t)\psi_1| \leq k_1 \sigma^3 \leq m_1.$$

对 $T_1 \leq t \leq T_2$, 有

$$\begin{aligned} |v_3| &\leq \bar{k}_1 \leq m_3, \\ |v_2| &= |-v_3 + k_1 \psi_1 \psi_2| \leq \bar{k}_1 + k_1 \sigma^2 \leq m_2, \end{aligned}$$

这表明ii)成立.

下面证明第3步.

因为 $v_1 \equiv 0, v_3 \equiv 0$, 由系统(1)可知

$$x(t) \equiv x(T_2), y(t) \equiv y(T_2), \beta(t) \equiv \beta(T_2), t \geq T_2.$$

由式(15)可得

$$|x(t)| \leq \varepsilon, |y(t)| \leq \varepsilon, |\beta(t)| \leq \varepsilon, t \geq T_2.$$

另一方面, 很明显, 由式(1)知

$$\dot{\theta} = -k_2 \operatorname{sgn} \theta, t \geq T_2.$$

由滑模控制理论, 当 $t \geq T_3$ 时, 存在有限时间 $T_3 > 0$ 使得 $\theta(t) \equiv 0$. 而在第3步中, $|v_1| \leq m_1$ 且 $|v_3| \leq m_3$. 由式(7)中 k_2 之定义可知 $|v_2| \leq m_2$.

因此, 取 $T = T_3$, 当 $t \geq T$ 时, 满足 $|x(t)| \leq \varepsilon, |y(t)| \leq \varepsilon, |\theta(t)| \leq \varepsilon, |\beta(t)| \leq \varepsilon$. 且在整个控制过程中, $|v_i| \leq m_i (i = 1, 2, 3)$, 这就完成了定理1的证明.

注1 所有参数的选取必须满足式(7). 由第1步中的式(8)可知, 如果 k 和 $\bar{k}_1$ 取得比较大, 那么 T_1 可以取得小些. 由第2步来说, 如果 k_1 取得较大, 那么 T_2 可以小些. 然而由式(7), 如果 k_1 较大, 那么 $\bar{k}_1$ 应该小些. 一般来说, k 和 $\bar{k}_1$ 取得小些, k_1 取得大些. 原因是第1步中使用了滑模控制, 大的 k 和 $\bar{k}_1$ 会引起较大抖动. 但在第2步中, v_1 和 v_2 是光滑控制, k_1 的增加会有助于提高 $x^2 + y^2$ 的收敛速度, 当然能量会消耗的多些. 由式(10), 在第3步中, 大的 k_2 有助于减少 $\theta(t)$ 收敛到零的时间. 但大的 k_2 也会引起抖动. 此外, 第3步控制器 v_2 可以取 $v_2 = -k_2 \theta$ 的形式, 这会消除抖动, 然而, 由于要满足输入受限的要求, k_2 必须满足

$$k_2 \leq \frac{m_2}{|\theta(T_2)|}.$$

在这种情况下, $|\theta(T_2)|$ 指数收敛到零.

注2 在第3步中, v_1 也可以取式(9)的形式. 由式(13)可知, $V(t)$ 是非增的. 因此, $|x|$ 和 $|y|$ 可能更小.

注3 本文使用了滑模控制器设计方法. 然而, 抖动是滑模控制器的主要缺点, 通常有几种方法可以用来消除抖动, 如饱和函数法、边界层法、指数饱和函数法等. 均可以用来改善控制器来消除抖动. 唯一不同的是收敛域 ε 的大小依赖于边界层的厚度.

5 仿真(Simulation)

考虑系统(1)的仿真, 选取 $m_1 = 60; m_2 = 20; m_3 = 10; \varepsilon = 0.02$; 再根据式(7)取 $k_1 = 64, \bar{k}_1 = 5, k = 12, k_2 = 1, \alpha = \pi/2$ 和 $\sigma = 1.5$. 初始条件为 $x(0) = [0.3, 0.5, 0.7, 0.8]$. 控制律由定理2给出. 机器人的状态、行进方向速度和角速度如图2~图5所示.

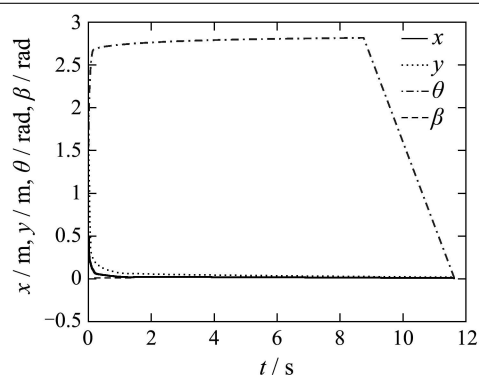
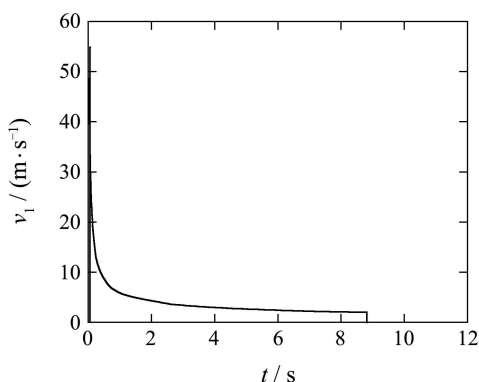
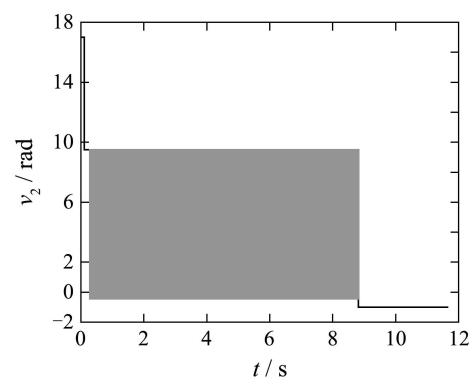
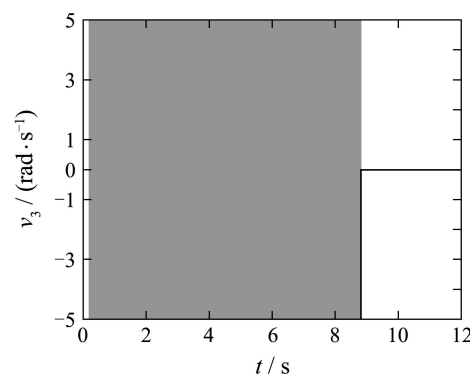
图2 状态 θ, x, y, β 随时间的响应Fig. 2 History of states θ, x, y and β versus time图3 控制输入 v_1 随时间的响应曲线Fig. 3 History of input v_1 versus time图4 控制输入 v_2 随时间的响应曲线Fig. 4 History of input v_2 versus time图5 控制输入 v_3 随时间的响应曲线Fig. 5 History of input v_3 versus time

图3表明 β, x 和 y 首先收敛到零, 然后 θ 收敛到零, 这证明了定理1中的控制器设计中的第1步和第2步是正确的. 图3~图5表明输入 v_1, v_2 和 v_3 不会超过事先给定的 $m_1 = 4, m_2 = 7, m_3 = 10$.

6 结论(Conclusion)

这篇文章主要贡献有两个: 一是指出现实输入有界不是关于状态和输入变换下的不变量. 二是讨论一类非完整移动机器人实际受限下的镇定控制器设计. 当控制工程师们使用建议的控制律时, 可以不用作输入变换, 也不用担心输入是否饱和了. 对于另3类非完整移动机器人, 可以用类似的方法进行分析. 所不同的是状态变换较复杂些.

另外, 这里仅给出了输入受限下一类非完整移动机器人的运动学镇定控制律设计, 用同样的思想可以研究其他3类非完整机器人的镇定律设计以及它们的动力学镇定控制器的设计.

参考文献(References):

- [1] BROCKETT R W. Asymptotic stability and feedback stabilization[M]//*Differential Geometric Control Theory*. Boston: Birkhauser, 1983: 181 – 208.
- [2] KOLMANOVSKY H Y, MCCLAMROCH N H. Development in nonholonomic control problems[J]. *IEEE Control Systems*, 1995, 15(7): 20 – 36.
- [3] LEVINE W. *The Control Handbook*[M]. Press Boca Raton, FL: CRC Press; New York: IEEE Press, 1996: 891.
- [4] MURRY R M, SASTRY S S. Nonholonomic motion planning: steering using sinusoids[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1993, 38(5): 700 – 716.
- [5] LUO J, TSOTRAS P. Control design for systems in chained form with bounded inputs[C]//*Proc of American Control Conference*. Philadelphia, PA: IEEE Press, 1998: 473 – 477.
- [6] WANG C L, HUO W. ε -Stabilization of multiple chained form control systems with input constraints and its application in mobile robots[C]//*Proc of 2000 IEEE/RSJ Int Conf on Intelligent Robots and Systems*. Kagawa, Japan: IEEE Press, 2000: 1766 – 1771.
- [7] 王朝立, 霍伟, 谈大龙, 等. 控制受限的一类不确定非完整动力学系统的镇定[J]. *控制理论与应用*, 2000, 17(6): 831 – 835. (WANG Chaoli, HUO Wei, TAN Dalong, et al. Stabilization of uncertain nonholonomic dynamic systems with bounded inputs[J]. *Control Theory & Applications*, 2000, 17(6): 831 – 835.)
- [8] CAMPOIN G, d'ANDREA-NOVEL B, BASTIN G. Structure properties and classification of kinematic and dynamic models of wheeled mobile robots[J]. *IEEE Trans on Robotics and Automation*, 1996, 12(1): 47 – 62.

作者简介:

刘毅 (1975—), 女, 上海应用技术大学副教授, 上海理工大学在职研究生, 主要研究方向为机器人视觉伺服反馈控制, E-mail: liuyiyi1014@163.com;

王朝立 (1965—), 男, 上海理工大学教授, 博士生导师, 主要研究方向为非线性控制、鲁棒控制、机器人控制, E-mail: clclwang@126.com;

李清松 (1981—), 男, 上海理工大学研究生, 主要研究方向为机器人控制, E-mail: pine5@163.com.