

蚁群协同模式搜索算法及其收敛性分析

冯远静¹, 俞立¹, 冯祖仁²

(1. 浙江工业大学 信息工程学院, 浙江 杭州 310032;

2. 西安交通大学 系统工程研究所 制造系统工程国家重点实验室, 陕西 西安 710049)

摘要: 提出了一种解决无约束连续空间优化问题的蚁群协同模式搜索算法. 该算法通过目标函数值启发式信息素引导群体进行区域搜索, 而每个个体的模式搜索为算法提供进一步的局部搜索, 其搜索结果以信息素融合的方式进行信息共享, 为下一次的区域搜索提供依据. 通过随机模式搜索算法理论得出了算法的收敛性定理. 详细的测试结果体现算法的涌现智能特征, 与其他算法的比较结果说明了算法的有效性及群体协同的优势.

关键词: 蚁群算法; 模式搜索算法; 协同搜索

中图分类号: TP278 **文献标识码:** A

Ant colony pattern search algorithms and their convergence

FENG Yuan-jing¹, YU Li¹, FENG Zu-ren²

(1. College of Information Engineering, Zhejiang University of Technology, Hangzhou Zhejiang 310032, China;

2. Systems Engineering Institute, SKLMS Laboratory, Xi'an Jiaotong University, Xi'an Shanxi 710049, China)

Abstract: A class of ant colony pattern search algorithms (ACPSAs) are designed for the optimization of multimodal functions in continuous space. ACPSAs guide the individuals to perform region searches by objective function heuristic pheromone. Further local searches are handled by pattern searches of individuals, then the search results are shared with pheromone fusion, providing the basis for the region searches in the next iteration. The probabilistic convergence theories of ACPSAs are also given by stochastic pattern search algorithm theory. ACPSAs present interesting emergent properties as shown by some analytical test functions. Finally, the comparison results with typical stochastic optimization algorithms show the effectiveness of the algorithms and the advantage in swarm cooperation.

Key words: ant colony optimization; pattern search algorithm; cooperative search

1 引言(Introduction)

尽管蚁群算法被用于解决诸多组合优化问题, 但是人们很少利用其群体协同优势解决连续空间优化问题. Bilchev等^[1]首次提出了一种连续空间蚁群算法(CACO), 将个体所在点的连续域离散化出确定的几个方向, 作为蚁群的搜索方向, 其缺点是计算复杂度较大. 随后, Mathur等^[2]提出了另一种连续空间蚁群算法, 利用蚁群优化框架进行局部搜索, 而全局搜索通过遗传算法完成. Dreco^[3]在Mathur工作的基础上为蚁群之间引入了两种通讯方式: 直接通讯和信息素间接通讯, 构建了一种称为“CIAC”的算法. 在国内, 陈峻等^[4]也对连续空间蚁群算法进行了研究. 这些算法大都只是从仿真角度进行分析, 没有对算法的收敛性进行分析. 本文利用蚁群协

同完成连续空间的搜索任务, 构建一种蚁群协同模式搜索算法(ACPSA: ant colony pattern search algorithm), 并在文献[5]对随机模式搜索算法分析的基础上对ACPSA的收敛性进行分析.

2 蚁群协同模式搜索算法(ACPSA)

2.1 算法的基本思想 (Thought of the algorithm)

连续空间蚁群算法与其在离散空间上的算法在信息素的分布、信息素更新策略以及迁移策略等方面存在很大的不同^[4]. 因此, 设计连续空间蚁群算法, 需要定义信息素分布函数、信息素更新策略以及蚁群迁移策略. 本文利用蚁群优化框架进行区域搜索, 并通过模式搜索算法实现进一步局部搜索, 从而构建一种蚁群协同模式搜索算法. 首先在解空间上随机分布蚁群, 这些蚂蚁在其寄居点周围以分布函数

的形式留存一定量的信息素. 蚁群根据这些区域上的信息素量确定该区域对其的吸引力, 从而确定其最终的迁移目的地. 当个体到达目的区域后, 进行单步模式搜索进一步改进解, 并根据改进解的目标函数值更新各个区间的信息素. 重复这些过程最终找到问题的最优解.

2.2 算法的定义(Definition of the algorithm)

1) 信息素分布函数及其计算模型.

信息素分布函数定义如下:

$$T_i(x) = \frac{f(x_i) \exp(-k_i(x - x_i))}{[1 + \exp(-k_i(x - x_i))]^2}. \quad (1)$$

其中: x_i 表示个体 i 在解空间上的位置, $f(x_i)$ 是 x_i 的目标函数值, k_i 是分布函数形状压缩系数. 从而个体 i 留存在某区域的信息素量的计算公式如下:

$$p_i = \int_D T_i(x). \quad (2)$$

其中积分区域 D 的给定与 k_i 有关. 因此, 在迭代 t , 留存到某区域 j 的所有信息素量通过下式计算:

$$\tau_j(t) = \sum_{i=1}^N p_i. \quad (3)$$

其中 N 是个体的数量.

2) 群体和个体的迁移策略.

个体根据每个区域信息素强度确定自己的趋向. 个体对下一区域的选择按下式进行:

$$s = \begin{cases} \arg \max([\tau_j]^\alpha [\eta_j]^\beta), & q \leq q_0, \\ s', & q > q_0. \end{cases} \quad (4)$$

蚁群在区域 i 以概率 $q_0 \in [0, 1]$ 选择区域 j 使得 $\arg \max([\tau_j]^\alpha [\eta_j]^\beta)$ 成立, 以概率 $1 - q_0$ 据式(5)选择:

$$p_{ij} = \frac{[\tau_j]^\alpha [\eta_j]^\beta}{\sum_{k \in J_{ck}} [\tau_k]^\alpha [\eta_k]^\beta}. \quad (5)$$

其中 η_j 是启发式信息. 在本文中, 如果 $f(x_j) \neq f(x^*)$, 则 $\eta_j = \min(1/|f(x_j) - f(x^*)|, \psi)$, 否则, $\eta_j = \psi$, 表示该区域信息素峰值点与当前最优点 x^* 之间的差别, $\psi > 0$, α, β, q_0 是常数, J_{ck} 是可行搜索域.

个体完成区域迁移以后, 在新的区域周围进行探测搜索以发现新的区域替代信息素弱的区域. 在ACPSA中, 称之为“随机探测”和“信息素融合”. 通过“随机探测”过程, 个体趋向新的区域使“食物源”更加丰富.

探测搜索算法包括一个迭代循环, 迭代次数由 h 表示. 在每一迭代过程中, 算法从模式移动产生矩阵 C_i^k 中随机选取一个模式移动. 图1所示的一种简单探测搜索算法^[5]从 $s_i \in \{0, \pm 1, \pm h\}$ 中随机选择一个模式 s . 值得注意的是, 从模式移动产生矩阵中选择坐标向量 e_i 或 $-e_i$ 的概率大于或者等于一

个常数 $\gamma > 0$, 且与 h 无关, 所以向量 $\{\pm e_1, \dots, \pm e_n\}$ 表示模式移动的核心方向.

```

For  $h = 1, 2, \dots$ 
  随机选择  $s \in \{0, \pm 1, \pm h\}^n$ 
  If  $(f(x_t + \Delta_t) < f(x_t))$   $s_t = \Delta_t s$ 
    break
  Else If  $s \in \{0, \pm 1\}^n$ 
    If (所有向量  $\pm e_i$  已经产生)
       $s_t = \{0\}^n$ 
    break
Endfor
 $x_{t+1} = x_t + s_t$ 
Update  $\Delta_t$ 

```

图1 探测搜索算法

Fig. 1 Exploratory move algorithm

用 $R, Q, Z, \tilde{N}$ 分别表示实数、有理数、整数和自然数. 设 $\phi \in Q$, 且 $\phi > 1$. 令 $\phi = \phi_n / \phi_d$, 其中 $\phi_n, \phi_d \in \tilde{N}$ 且 ϕ_n, ϕ_d 为相对素数. 令 $\theta = \phi^{\varpi_0}$ 且 $\lambda_t \in \{\phi^{\varpi_1}, \dots, \phi^{\varpi_L}\}$, 其中: $\{\varpi_0, \dots, \varpi_L\} \subset Z$, $L < \infty, \varpi_0 < 0, \varpi_i \geq 0, i = 1, \dots, L$. 则步长 Δ_t 更新算法如图2所示.

```

If  $(f(x_t) \leq f(x_t + s_t))$ 
   $\Delta_{t+1} = \theta \Delta_t$ 
If  $(f(x_t) > f(x_t + s_t))$  且  $s_t$  是模式的核心方向
   $\Delta_{t+1} = \lambda_t \Delta_t$ 

```

图2 探测搜索步长 Δ_t 更新算法

Fig. 2 Updating algorithm of trail step Δ_t .

从探测搜索步长 Δ_t 更新算法中可以看出, 经过 t 次迭代, 探测搜索步长 Δ_t 可以表示为

$$\Delta_t = \Delta_0 \theta^{\alpha_0} \lambda_1^{\alpha_1} \dots \lambda_L^{\alpha_L} = \Delta_0 \phi^{r_t}. \quad (6)$$

其中 $\alpha_i \in Z$ 且 $r_t \in Z$. 令 $r_t^{\max} = \max_{i=1, \dots, t} r_t$, $r_t^{\min} = \min_{i=1, \dots, t} r_t$. 定义 $\bar{\phi}_t = \phi_n^{-r_t^{\min}} \phi_d^{-r_t^{\max}}$.

3) 信息素更新策略.

G 个全局个体通过随机模式搜索探索新的领域. 一旦新的区域被创建, 就需要给这些区域设置信息素值, 同时旧区域的信息素进行挥发. 信息素的更新过程如图3所示, 其中 $0 < \rho < 1$ 是信息素挥发系数, $\tau_{\min} > 0$ 是常数, $h(x) < \infty$ 是 x 的函数满足 $f(x) < f(x') \Rightarrow h(x) \geq h(x')$.

```

 $\forall k, \tau_k(t+1) \leftarrow (1 - \rho) \tau_k(t)$ 
If  $f(x_t) < f(x^*)$ , then  $x^* \leftarrow x_t$ 
 $\forall k \in x^*: \tau_k(t+1) \leftarrow \tau_k(t+1) + \rho \cdot h(x_i)$ 
 $\forall k: \tau_k \leftarrow \max\{\tau_{\min}, \tau_k\}$ 

```

图3 信息素更新算法

Fig. 3 Updating algorithm of pheromone.

4) 算法描述.

蚁群协同搜索算法概括为如图4所示. 图中的符号描述见表1.

- 1) 给定 $\Delta_0 \in R, S = \{s_1, \dots, s_m\}, \xi = \{0\}^m$.
- 2) 初始化群体 $X_0 = \{x_1^0, \dots, x_N^0\}, x_i^0 \in Q^n$.
- 3) $x_0^* = \arg \min\{f(x_1^0), \dots, f(x_N^0)\}$, 计算 τ_i^0 .
- 4) Repeat $t = 1, 2, \dots$
- 5) For $i = 1 : N$
- 6) If ($\text{unif}(\cdot) \leq q_0$)
- 7) $\hat{x}_i = \arg \max([\tau_j^t]^\alpha [\eta_j^t]^\beta)$.
- 8) Else 根据式(5)选择 $\hat{x}_i$.
- 9) For $i = 1 : N$
- 10) If($\text{unif}(\cdot) \leq \gamma$)
- 11) $j = \text{unit}(m)$
- 12) If ($\hat{x}_i + \Delta_t s_j$ 不可行) $\xi_j = 1$
- 13) Else If ($\hat{x}_i == x_t^*$) $\xi_j = 1$
- 14) $\hat{x}_i = \hat{x}_i + \Delta_t s_j$
- 15) $x_i^{t+1} = \hat{x}_i$
- 16) $x_{t+1}^* = \arg \min\{f(x_1^{t+1}), \dots, f(x_N^{t+1})\}$
- 17) $\tau_i^{t+1} \leftarrow (1 - \rho)\tau_i^t$
- 18) If ($f(x_{t+1}^*) < f(x_t^*)$)
- 19) $\tau_i^{t+1} \leftarrow \tau_i^{t+1} + \rho \cdot h(x_i^{t+1})$
- 20) $\tau_i^{t+1} \leftarrow \max\{\tau_{\min}, \tau_i^{t+1}\}$
- 21) If ($\exists s \in S$ s.t. $x_{t+1}^* = x_t^* + s$) $\Delta_{t+1} = \lambda_t \Delta_t$.
- 22) $\xi = \{0\}^m$
- 23) Else If ($|\xi| == m$)
- 24) $\xi = \{0\}^m$
- 25) $\Delta_{t+1} = \theta \Delta_t$
- 26) Else $\Delta_{t+1} = \Delta_t$
- 27) 直到终止准则满足.

图4 蚁群协同模式搜索算法

Fig. 4 ACPSA algorithm.

表1 ACPSA算法描述中的符号

Table 1 Symbols used to describe ACPSAs

符号	符号描述
$\hat{x}_i$	个体迁移后的位置
$\text{unif}(\cdot)$	产生[0.0,1.0]区间内服从均匀分布随机数
$\text{unit}(m)$	产生1, m 之间服从均匀分布的随机整数
x_t^*	迭代 t 的最优目标函数
ξ	记录已经采用的探测
τ_i^t	迭代 t 第 i 个区域信息素值
$\tau_{\min}$	最小信息素值

3 算法收敛性分析 (Convergence analysis of ACPSA)

3.1 算法分析 (Analysis of ACPSA)

本文将ACPSA作为一种随机模式搜索算法纳入Torczon^[6]提出的模式搜索算法框架中. Torczon将模式搜索算法定义为3个模块: 模式移动产生矩

阵、探测搜索、步长更新. 对于ACPSA, 每一代产生的个体可以看作是最优个体的不同模式.

在收敛性分析以前, 先给出ACPSA的几个性质.

性质1 在ASPA中, 任意的信息素满足

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tau_k(t) \leq \tau_{\max} = h(x^*). \quad (7)$$

证 由 $h(x)$ 的定义可知, 经过一定的迭代次数以后, 最大可能的信息素增加值为 $h(x^*)$. 根据信息素更新规则, 显然,

$$\tau_k(t) \leq (1 - \rho)^t \tau_0 + \rho \sum_{i=1}^t (1 - \rho)^{t-i} h(x^*),$$

则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tau_k(t) =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \rho)^t \tau_0 + \lim_{n \rightarrow \infty} [\sum_{i=1}^t (1 - \rho)^{t-i}] h(x^*). \quad (8)$$

在式(8)中, 由于 $0 < \rho < 1$, 存在如下关系:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \rho)^t \tau_0 = 0,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [\sum_{i=1}^t (1 - \rho)^{t-i}] h(x^*) = h(x^*).$$

所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tau_k(t) \leq \tau_{\max} = h(x^*).$$

证毕.

性质2 对于解空间上各个区域的信息素总和, 存在如下关系:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum \tau_k(t) \leq |\nu| h(x^*), \quad (9)$$

其中 $|\nu|$ 是信息素域的个数.

证 由性质1显然. 证毕.

3.2 收敛性分析 (Convergence analysis)

本节参考Hart^[5]的理论分析算法的收敛性, 得到一系列收敛性结论. 首先, 引理1和引理2给出了ACPSA算法与目标函数无关的一些代数性质. 引理3保证每一次模式移动以概率1结束. 引理4说明了搜索步长控制参数 Δ_k 对于无约束、边界约束问题以概率1逼近0. 主要结论定理1给出了无约束问题的收敛性定理.

引理1 存在与 k 无关的常数 $\delta > 0$, 对于任意由ACPSA产生的核心移动 $s_k^i \neq 0$, 满足如下关系:

$$\|s_k^i\| \geq \delta \Delta_k. \quad (10)$$

证 $\|s_k^i\| = \|B c_k^i\| \Delta_k \geq \sigma_{B \min} \|c_k^i\| \Delta_k \geq \sigma_{B \min} \Delta_k$. 其中: $\sigma_{B \min}$ 是矩阵 B 的最小特征值, c_k^i 是非零整数, 所以 $\|c_k^i\| \geq 1$.

证毕.

引理2 ACPSA算法迭代序列中的最好个体 x_t^* 可以表示为下式:

$$x_t^* = x_0^* + \phi_n^{r_{\min}^k} \phi_d^{-r_{\max}^k} \Delta_0 B \sum_{k=0}^{t-1} z_k. \quad (11)$$

其中: $z_k \in Z^n, k = 0, 1, \dots, t-1$.

$$r_{\max}^k = \max_{i=1, \dots, k} r_k \text{ and } r_{\min}^k = \min_{i=1, \dots, k} r_k. \quad (12)$$

证 根据蚁群协同模式搜索算法定义, 迭代序列中的最好个体 x_t^* 具有如下的形式:

$$x_t^* = x_0^* + \sum_{k=0}^{t-1} s_k = x_0^* + \sum_{k=0}^{t-1} \Delta_k B c_k. \quad (13)$$

考虑步长控制参数 Δ_k 的更新根据式(6)所示, 故

$$x_t^* = x_0^* + \Delta_0 B \sum_{k=0}^{t-1} \phi^{r_k} c_k. \quad (14)$$

前面已经令 $\bar{\phi}_t = \phi_n^{-r_{\min}^t} \phi_d^{-r_{\max}^t}$, 其中 ϕ_n, ϕ_d 是相对素数, 所以对于 $z_k \in Z^n$ 如下公式存在:

$$x_t^* = x_0^* + \phi_n^{r_{\min}^k} \phi_d^{-r_{\max}^k} \Delta_0 B \sum_{k=0}^{t-1} z_k. \quad (15)$$

证毕.

引理3 设 A 是每一次模式移动停止的迭代序列集合, 则每一次模式移动停止的概率 $P(A) = 1$.

证 在迭代 t , 根据式(5), 假设启发式信息 $0 < \eta_{\min} \leq \eta_j \leq \psi$, 由于信息素最大值 $\tau_{\max}$ 和最小值 $\tau_{\min}$ 的限制, 可以保证个体在区域 i 选择可行区域 j 的概率满足

$$p_{ij}(t) = \frac{\tau_j^\alpha \eta_j^\beta}{\sum_{l \in J_{ck}} \tau_l^\alpha \eta_l^\beta} \geq \frac{\tau_{\min}^\alpha \eta_{\min}^\beta}{(|\nu| - 1) \tau_{\max}^\alpha \eta_{\max}^\beta + \tau_{\min}^\alpha \eta_{\min}^\beta} > \frac{\tau_{\min}^\alpha \eta_{\min}^\beta}{|\nu| [h(s^*)]^\alpha \psi^\beta}. \quad (16)$$

其中 J_{ck} 是可行搜索域. 假设在每个区域, 个体选择核心移动的概率大于或等于常数 $\varphi > 0$. 对于 ACPSA, 据式(4)(5), 一个个体选择核心移动的概率有两种情况: 当核心移动属于 $\arg \max([\tau_j]^\alpha [\eta_j]^\beta)$ 的区域时, 选择概率为 $\hat{p}(t) = q_0 \cdot \varphi > 0$, 选择其他区域的核心移动的概率为

$$\hat{p}(t) = (1 - q_0) \varphi p_{ij}(t) > (1 - q_0) \varphi \frac{\tau_{\min}^\alpha \eta_{\min}^\beta}{|\nu| [h(s^*)]^\alpha \psi^\beta} > 0.$$

模式探测算法在发现一个改善解或者所有探测移动 $\gamma_k = |\nu|, |\Gamma_k| \leq 2n|\nu|$ 均无效以后, 搜索才停止. 令 $R_{r,i,j}$ 表示在探测移动 $r+1$ 开始到 $r+i$ 之间第 j 个核心移动不被采纳的探测移动序列集合, 令 $R_{r,i}$ 表示在探测移动 $r+1$ 开始到 $r+i$ 之间一个或一个以上核心移动不被采纳的探测移动序列集

合, 令 R_r 表示在探测移动 r 以后所有探测移动中一个或一个以上核心移动不被采纳的探测移动序列集合. 注意它们之间存在关系:

$$R_{r,i} = \bigcup_{j=1}^{\gamma_k} R_{r,i,j}, \quad R_r = \bigcap_{i=1}^{\infty} R_{r,i}, \quad \text{且 } R_{r,i} \supset R_{r,i+1}.$$

因此

$$P(R_r) = \lim_{i \rightarrow \infty} P(R_{r,i}) \leq \lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{\gamma_k} P(R_{r,i,j}) \leq \lim_{i \rightarrow \infty} \gamma_k (1 - \hat{p})^i = 2n|\nu| \lim_{i \rightarrow \infty} (1 - \hat{p})^i = 0,$$

所以有

$$P(A) = 1 - P\left(\bigcup_{r=1}^{\infty} R_r\right) = 1 - \lim_{r \rightarrow \infty} P(R_r) = 1.$$

证毕.

引理4 设对于无约束(边界约束)群体协同模式搜索, 如果 $L(x_0)(L_\Omega(x_0))$ 是紧集, 则

$$P(\liminf_{k \rightarrow \infty} \Delta_k = 0) = 1.$$

证 该引理的证明类似于文献[5]定理4的证明, 利用反证法. 对于所有的 k , 设 $0 < \Delta_{\min} \leq \Delta_k = \phi^{\gamma_k} \Delta_0$. 这说明序列 $\{\phi^{\gamma_k}\}$ 的下边界为零. 同时, 序列 $\{\Delta_k\}$ 有上边界, 因为所有的迭代序列 $\{x_k\}$ 必须位于紧集 $L(x_0)(L_\Omega(x_0))$ 内. 引理1保证了上边界 $\Delta_{\max} < \infty$. 因此, 可以得出序列 $\{\phi^{\gamma_k}\}$ 和 $\{r_k\}$ 都具有上下界.

$$r_{\max}^k = \max_{0 \leq k < \infty} r_k \text{ and } r_{\min}^k = \min_{0 \leq k < \infty} r_k. \quad (17)$$

则式(11)约束(12)可以表示为式(17), 且 x_k 位于由 x_0 和 $\phi_n^{r_{\min}^k} \phi_d^{-r_{\max}^k} \Delta_0 B$ 的列组成的网格 Θ . 网格 Θ 构成的紧集 $L(x_0)(L_\Omega(x_0))$ 内部是有限的, 所以网格内至少存在一个点 x_* , 在有限的 k 步内, 使得 $x_k = x_*$. 根据步长更新策略, 当且仅当 $f(x_t) > f(x_t + s_k)$ 接受新的移动. 所以存在 N , 使对于任意的 $k \geq N$ 存在 $x_k = x_*$. 这意味着对于 $k \geq N$ 存在 $\rho_k = 0$, 也就是说 $\Delta_k \rightarrow 0$. 这与假设 $0 < \Delta_{\min} \leq \Delta_k = \phi^{\gamma_k} \Delta_0$ 相矛盾. 从引理3可以知道迭代序列集合中每一次模式移动停止的概率为1, 所以 $P(\liminf_{k \rightarrow \infty} \Delta_k = 0) = 1$.

证毕.

定理1 令 $L(x_0)$ 是紧的, 且设 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 在 $L(x_0)$ 的开邻域上连续可微. 则 ACPSA 产生的迭代序列 $\{x_k^*\}$ 满足如下条件:

$$P(\liminf_{k \rightarrow \infty} \|g(x_k^*)\| = 0) = 1. \quad (18)$$

其中 $g(x)$ 为 f 在 x 点的梯度.

证 利用反证法. 假设 $P(\liminf_{k \rightarrow \infty} \Delta_k = 0) < 1$, 则存在迭代序列 $\{x_k^*\}$ 使得 $\liminf_{k \rightarrow \infty} \|g(x_k^*)\| \neq 0$. 对于序列 $\{x_k^*\}$, 则必存在 $\Delta_{\min} > 0$ 使得 $\Delta_k > \Delta_{\min}$. 而这

与引理4相矛盾. 因此定理1成立. 证毕.

4 仿真实验分析(Simulation analysis)

本文以求解典型的高维复杂函数探讨ACPSA算法的优化性能. 测试函数见附录. 进行测试的ACPSA算法中, 模式搜索采用Hooke-Jeeves方法(模式搜索算法的一种特殊情况, 见Hart^[5]). 本文使用MATLAB 6.0实现了上述算法. 每个算例均随机运行20次, 然后平均统计各项优化性能指标: 目标函数评价次数(*evals*)、平均CPU时间(*t*)、平均误差(*err*)以及优化成功率(%). 其中, 在给定的迭代次数内(文中 $num=10000$), 若搜索最终解与问题最优解之间的关系满足式(19), 则认为算法测试成功.

$$|f^* - f^\alpha| < \varepsilon_1 f^* + \varepsilon_2. \quad (19)$$

其中: f^* 是目标函数的全局最优解; f^α 是算法搜索解; ε_1 和 ε_2 是给定参数(文中 $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 10^{-4}$).

首先分析参数对ACPSA算法的优化性能的影响. 对不同测试函数的平均统计结果如表2所示. 从表2可以看出, 参数对ACPSA算法的影响不大.

另外, 将ACPSA与其他连续蚁群算法如CACO^[1], M-CACO^[2], CIAC^[3]进行比较, 计算结果见表3. 由于参考文献中许多信息的缺乏, 部分测试函数的优化性能没有给出. 从表3可以看出, ACPSA得到的结果比其他算法性能要好的多.

最后, 将ACPSA的优化性能与其他典型的优化算法进行了比较, 如遗传算法(GA)^[6]、微分进化(DE)^[7]、禁忌搜索(TS)^[8]. 比较结果见表4. 从表4可以看出, 相对其他算法, 其优越性明显.

表2 不同参数情况下的ACPSA算法性能比较

Table 2 Comparison of ACPSA performance with different parameters

Fun.($n=5$)	区间	N	ρ	Δ_0	err	%	t/s	$evals$
Rosenbrock	[-2.56 2.56]	20	0.98	5.0	9.8518×10^{-5}	100	133.6671	858
		20	0.9	1.0	9.9905×10^{-5}	100	134.0790	979
		10	0.9	10.0	9.7911×10^{-5}	90.0	33.2970	376
Griewangk	[-5.12 5.12]	10	0.7	10.0	9.8268×10^{-4}	90	22.9379	140
		20	0.9	5.0	9.5960×10^{-5}	100	37.5160	120
		20	0.98	1.0	0.0099	20	99.0790	307

表3 ACPSA与其他连续蚁群算法的比较结果

Table 3 Comparison of ACPSA performance with other continuous ACO

Fun.	ACPSA				CAIC			CACO			M-CACO	
	%	err	t/s	$evals$	%	err	$evals$	%	err	$evals$	%	$evals$
R2	100	9.3070×10^{-5}	46.6155	621	100	3×10^{-3}	11797	100	0.00	6842	100	5545
SM6	100	7.1712×10^{-5}	1.7820	14	100	9×10^{-10}	50000	100	—	22050	100	10563
Gr5	100	5.6734×10^{-5}	2.3484	12	63	0.01	48402	—	—	—	—	—
Gr10	100	5.9357×10^{-5}	31.0688	15	52	0.05	50121	100	0.00	50000	100	50000
MG	100	5.7313×10^{-5}	1.6358	35	20	0.34	11751	100	—	1688	100	4862

表4 ACPSA与其他典型算法的比较结果

Table 4 Comparison of ACPSA performance with other typical algorithms

Fun.	ACPSA			GA			DE		TS		
	%	err	$evals$	%	err	$evals$	%	$evals$	%	err	$evals$
R2	100	9.3070×10^{-5}	621	100	0.004	960	100	615	100	0.02	480
R5	100	9.8518×10^{-5}	719	100	0.15	3990	—	—	100	0.08	2142
SM6	100	7.1712×10^{-5}	14	100	0.0002	750	100	392	100	3×10^{-8}	338
Gr10	100	5.9357×10^{-5}	15	100	—	200000	100	12804	—	—	—
MG	100	9.3587×10^{-5}	215	100	—	2844	—	—	—	—	—

5 结论(Conclusions)

本文提出了一种解决无约束连续空间优化问

题的蚁群协同模式搜索算法. 理论分析结果表明算法在无约束、边界约束情况下均能以概率1收敛

到全局最优. 实验结果表明:

1) ACPSA算法对参数的依赖性不是很强. 对于大部分的算例均能得到最优值.

2) 与其他连续蚁群算法的比较结果表明, ACPSA算法在迭代次数上要远小于其他连续蚁群算法, 而且求解成功率也高的多.

3) 与其他典型的优化算法进行了比较, 结果表明, ACPSA的优化性能较好.

参考文献(References):

- [1] BILCHEV G, PARMEE I C. The ant colony metaphor for searching continuous design spaces[J]. *Lecture Notes in Computer Science*, 1995, 993(1): 25 – 39.
- [2] MATHUR M, KARALE S B, PRIYE S, et al. Ant colony approach to continuous function optimization[J]. *Industrial Engineering Chemistry Research*, 2000, 39(4): 3814 – 3822.
- [3] DREO J, SIARRY P. Continuous interacting ant colony algorithm based on dense heterarchy[J]. *Future Generation Computer Systems*, 2004, 20(5): 841 – 856.
- [4] 陈凌, 沈洁, 秦玲. 蚁群算法求解连续空间优化问题的一种方法[J]. *软件学报*, 2002, 13(12): 2317 – 2323.
(CHEN Ling, SHEN Jie, QIN Ling. A method for solving optimization problem in continuous space by using ant colony algorithm[J]. *J of Software*, 2002, 13(12): 2317 – 2323.
- [5] HART W E. Evolutionary pattern search: Algorithms for unconstrained and linearly constrained optimization[J]. *IEEE Trans on Evolutionary Computation*, 2001, 5(4): 388 – 397.
- [6] CHELOUAH R, SIARRY P. A continuous genetic algorithm designed for the global optimization[J]. *J of Heuristics*, 2000, 6(2): 191 – 213.
- [7] STORN R, PRICE K. *Differential evolution-a simple and efficient adaptive scheme for global optimization over continuous spaces*,

Technical Report TR95-012[R]. Berkeley, CA: Int Computer Science Institute, 1995.

- [8] CHELOUAH R, SIARRY P. Tabu search applied to global optimization[J]. *European J of Operational Research*, 2000, 123(2): 256 – 270.

附录 测试函数(Appendix Test functions)

I) Gr_n (Griewangk):

$$Gr_n(\vec{x}) = \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{4000} - \prod_{i=1}^n \cos\left(\frac{x_i}{\sqrt{i}}\right) + 1.$$

II) R_n (Rosenbrok):

$$R_n(\vec{x}) = \sum_{i=1}^n [100(x_i^2 - x_{i+1}^2) + (1 - x_i)^2].$$

III) SM_n (Sphere model):

$$SM_n(\vec{x}) = \sum_{i=1}^n x_i^2.$$

IV) MG (Martin Gaddy):

$$MG(\vec{x}) = (x_1 - x_2)^2 + ((x_1 + x_2 - 10)/3)^2.$$

作者简介:

冯远静 (1977—), 男, 浙江工业大学信息工程学院讲师, 工学博士, 研究方向为网络化群体系统理论与应用、机器人视觉, E-mail: fyjing@zjut.edu.cn;

俞立 (1961—), 男, 浙江工业大学信息工程学院教授, 工学博士, 研究方向为网络控制系统, E-mail: lyu@zjut.edu.cn;

冯祖仁 (1953—), 男, 西安交通大学教授, 工学博士, 研究方向为机器人控制, E-mail: fzf9910@xjtu.edu.cn.