

受扰动2-D线性时变系统的迭代学习控制

黄彧伟, 张国山

(天津大学 电气与自动化工程学院, 天津 300072)

摘要: 利用2-D系统理论的Roesser模型, 给出了受扰动的线性时变离散系统迭代学习控制(ILC)问题的一种解决方法. 对系统所受的已知扰动, 给出其学习律参数的选取范围以及仅经一次迭代就能实现输出完全跟踪期望轨迹的参数选取方法; 对系统所受的未知扰动, 首先对SISO系统提出其学习律存在的条件及参数选取方法, 进而推广到MIMO系统中, 提出MIMO系统学习律的参数选取方法. 最后给出两个数值例子进一步说明所得结果的有效性.

关键词: 线性时变系统; 迭代学习控制; 学习律; Roesser模型

中图分类号: TP273 **文献标识码:** A

Iterative learning control for disturbed 2-D linear time varying systems

HUANG Yu-wei, ZHANG Guo-shan

(School of Electrical Engineering and Automation, Tianjin University, Tianjin 300072, China)

Abstract: An approach to solve iterative learning control (ILC) for linear time-variant discrete systems is given by using Roesser-type model of the two-dimensional (2-D) system theory. Firstly, for the system with known disturbances, the scope of ILC rule's parameters and the way to choose the parameters that insures the output following the desired trajectory by only one iteration are provided. Secondly, for the system with unknown disturbances, the existing condition of the SISO system ILC rule and the method for choosing the parameters are given. These results are then extended to the MIMO systems, and the way to choose the parameters of ILC rules for the MIMO systems is also given. Finally, two numerical examples are presented to illustrate the proposed results.

Key words: linear time-variant system; iterative learning control; iterative learning control rule; Roesser-type model

1 引言(Introduction)

迭代学习控制(ILC: iterative learning control)是人工智能与自动控制相结合的新型学习控制方法, 是智能控制领域中研究、开发及应用的重要发展方向之一. 它具有拟人的学习过程与特性, 能以非常简单的方式处理不确定度相当高的非线性强耦合动态系统. 迭代学习控制的概念首先由M. Uchiyama于1978年提出^[1], 1984年由S. Arimoto等发展了这种思想, 并建立了实用算法, 可以实现在给定的时间段上对未知被控对象以任意精度跟踪给定的期望轨迹, 无需辨识系统参数, 属于基于品质的自学习控制, 特别适用于机器人等重复运动的场合^[2]. 它的研究对那些难以建模以及高精度轨迹控制的问题有非常重要的意义. 由于迭代学习算法极为简单, 又能解决如此复杂的问题, 因而一经提出就引起人们极大的关注和兴趣. 在国内外已有很多关于迭代学习控制的专著问世^[3~7].

在实际中, 动态过程并不是确定的, 而是存在着各种已知或未知扰动, 初始状态的偏差也并不随着学习次数的增加而趋于零. 在学习律中用到的输出误差也存在着测量误差. 当这些扰动、偏差和误差存在时, 迭代学习控制还能否收敛到期望轨迹的邻域, 即需要把鲁棒控制理论引入到这一领域中. 这一问题最早也是由S. Arimoto等提出^[8], 且在后来文章中作了深入讨论.

从本质上说, 迭代学习控制包含了两个过程, 即时间过程和迭代过程, 可以引入2-D系统理论及分析方法. 此理论始于20世纪70年代, 其中Roesser模型是最常见也是最有代表性的模型, 它的状态方程及输出方程分别是

$$\begin{bmatrix} x^h(i+1, j) \\ x^v(i, j+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^h(i, j) \\ x^v(i, j) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u(i, j), \quad (1)$$

$$y(i, j) = [C_1 \ C_2] \begin{bmatrix} x^h(i, j) \\ x^v(i, j) \end{bmatrix} + Du(i, j). \quad (2)$$

其中: i, j 分别是水平和垂直整值坐标, $x^h(i, j)$, $x^v(i, j)$ 分别是水平与垂直状态向量, $u(i, j)$, $y(i, j)$ 分别是系统的输入和输出向量, $A_{ij}, B_i, C_i (i, j = 1, 2)$, D 是具有适当维数的矩阵, 其边界条件为 $x^h(0, j), x^v(i, 0) (i, j = 0, 1, 2, \dots)$. 上面模型将仅基于时间变量的一维(1-D)模型扩展成二维(2-D)模型, 然后在该模型下讨论算法的收敛性. 此方法尤其适用于线性离散时不变或时变系统. 文[9,10]把ILC方法用于线性离散多变量系统中; 文[11,12]提出了经一次迭代使系统收敛的方法. 但文[9~12]仅考虑了系统无扰动时的情况.

本文基于文[12]的结果, 对已知扰动系统突破了以往研究中以 H_∞ 指标优化的传统方法, 另辟蹊径, 提出了一种基于Roesser模型的2-D学习律, 并给出了受已知扰动的线性时变离散系统输出收敛的充分条件, 通过在线测量和计算, 实现一次迭代输出完全无差跟踪. 对未知扰动系统, 基于范数定义, 给出了系统2-D学习律的存在条件及学习律参数的选择方法. 最后, 给出了两个仿真示例, 分别针对已知及未知扰动系统, 验证了这种2-D学习律的正确性和有效性.

本文的所有讨论和证明过程都是基于线性时变系统的, 其结果同样适用线性时不变系统.

2 Roesser模型及补充引理(Roesser-type model and lemma)

2-D时变离散系统的Roesser模型状态转移矩阵可由下式定义:

$$\begin{bmatrix} \alpha(t+1, k) \\ \beta(t, k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}(t, k) & A_{12}(t, k) \\ A_{21}(t, k) & A_{22}(t, k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha(t, k) \\ \beta(t, k) \end{bmatrix}. \quad (3)$$

其中: $\begin{bmatrix} A_{11}(t, k) & A_{12}(t, k) \\ A_{21}(t, k) & A_{22}(t, k) \end{bmatrix}$ 即为状态转移矩阵, t, k 分别是水平与垂直整值坐标, 在迭代学习控制中分别代表时间和迭代次数. $\alpha(t, k) \in \mathbb{R}^{n_1}$, $\beta(t, k) \in \mathbb{R}^{n_2}$ 分别是系统的状态、输出向量, $A_{ij} (i, j = 1, 2)$ 是具有适当维数的矩阵, 边界条件为

$$\alpha(0, k) = 0, \quad (k = 0, 1, 2, \dots), \quad (4)$$

$$\beta(t, 0) = \beta_0, \quad (t = 0, 1, 2, \dots). \quad (5)$$

引理 1 令 $\phi^{0,1}(t, k) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ A_{21}(t, k) & A_{22}(t, k) \end{bmatrix}$, 通过Roesser模型, 可以判断系统(3)的收敛性. 当 $\sup_{t,k} \|\phi^{0,1}(t, k)\| < 1$ ($\|\cdot\|$ 为矩阵范数)时, 对于每一

个 t , 有 $\lim_{k \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} \alpha(t, k) \\ \beta(t, k) \end{bmatrix} = 0$, 即系统输出收敛且状态收敛^[12].

3 线性时变离散系统的ILC学习律(ILC rules to linear time-variant discrete system)

对于受扰动的线性时变离散系统, 其状态方程和输出方程分别为

$$\begin{cases} x(t+1) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + \Delta_1\omega(t), \\ y(t) = C(t)x(t) + \Delta_2\nu(t). \end{cases} \quad (6)$$

其中: $x(t) \in \mathbb{R}^n$ 为状态向量, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ 为输入向量, $y(t) \in \mathbb{R}^p$ 为输出向量, 扰动向量由两部分构成: $\omega(t) \in \mathbb{R}^m, \nu(t) \in \mathbb{R}^p$ 为已知随时间变化的向量; Δ_1, Δ_2 为具有适当维数的未知量, 但其变化范围是已知的, 即 $\|\Delta_1\| \leq 1, \|\Delta_2\| \leq 1$. $A(t), B(t), C(t)$ 为时变实数阵. 假定系统(6)的边界条件为 $x(0) = x_0$, 期望轨迹为 $y_d(t)$, 迭代学习控制的目的即是在每次迭代时选用不同的输入 $u(t)$ 使系统按照期望轨迹输出. 下面给出一种具有普遍意义的ILC学习律:

$$\begin{cases} u(t, k+1) = u(t, k) + \Delta u(t, k), \\ t = 0, 1, \dots, N-1. \end{cases} \quad (7)$$

其中 Δu 代表控制输入的修正量, 将系统(6)转换为2-D模型, 可得

$$\begin{cases} x(t+1, k) = \\ A(t)x(t, k) + B(t)u(t, k) + \Delta_1\omega(t, k), \\ y(t, k) = C(t, k) + \Delta_2\nu(t, k). \end{cases} \quad (8)$$

假定此2-D系统的边界条件为

$$\begin{cases} x(0, k) = x_0, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \\ u(t, 0) = u_0(t), \quad t = 0, 1, \dots, N-1. \end{cases} \quad (9)$$

而进行迭代学习控制的目的就是选择合适的学习律使得

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y(t, k) = y_d(t), \quad t = 1, 2, \dots, N. \quad (10)$$

若对某个 k 使 $y(t, k) = y_d(t)$, 则式中的 k 越小表明学习速度越快. 为方便系统(8)与Roesser模型结合, 可作如下标记:

$$\alpha(t, k) := x(t-1, k+1) - x(t-1, k). \quad (11)$$

$$\beta(t, k) := y_d(t) - y(t, k). \quad (12)$$

结合式(7)和(8), 可得

$$\begin{aligned} \alpha(t+1, k) = & x(t, k+1) - x(t, k) = A(t-1)\alpha(t, k) + \\ & B(t-1)\Delta u(t-1, k) + [\Delta_1\omega(t-1, k+1) - \\ & \Delta_1\omega(t-1, k)], \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned}
& \beta(t, k+1) - \beta(t, k) = \\
& -C(t)[x(t, k+1) - x(t, k)] - \\
& [\Delta_2 \nu(t, k+1) - \Delta_2 \nu(t, k)] = \\
& -C(t)A(t-1)\alpha(t, k) - C(t)B(t-1) \\
& \Delta u(t-1, k) - C(t)[\Delta_1 \omega(t-1, k+1) - \\
& \Delta_1 \omega(t-1, k)] - [\Delta_2 \nu(t, k+1) - \Delta_2 \nu(t, k)]. \quad (14)
\end{aligned}$$

设

$$\begin{aligned}
\Delta u(t, k) &= R_a(t+1)\alpha(t+1, k) + \\
& R_b(t+1)\beta(t+1, k). \quad (15)
\end{aligned}$$

其中: $R_a(t+1), R_b(t+1)$ 为待求函数.

因 $\Delta_1 \omega(t-1, k+1)$ 与 $\Delta_1 \omega(t-1, k)$ 之差是未知量, 但可知其上界为 $|\omega(t-1, k+1)| + |\omega(t-1, k)|$, 故一定存在离散函数 $P_a(t), P_b(t)$ 使得

$$\begin{aligned}
& |\omega(t-1, k+1)| + |\omega(t-1, k)| = \\
& P_a(t)\alpha(t, k) + P_b(t)\beta(t, k) \quad (16)
\end{aligned}$$

成立. 同理, 存在离散函数 $Q_a(t), Q_b(t)$ 使得

$$\begin{aligned}
& |\nu(t, k+1)| + |\nu(t, k)| = \\
& Q_a(t)\alpha(t, k) + Q_b(t)\beta(t, k) \quad (17)
\end{aligned}$$

成立, 这里, $|\nu|$ 表示向量 ν 的每一元素取绝对值. 因为 $|\Delta_1 \omega(t-1, k+1) - \Delta_1 \omega(t-1, k)| \leq |\omega(t-1, k+1)| + |\omega(t-1, k)|$, 故存在 Δ_a 使得

$$\begin{aligned}
& \Delta_1 \omega(t-1, k+1) - \Delta_1 \omega(t-1, k) = \\
& \Delta_a [P_a(t)\alpha(t, k) + P_b(t)\beta(t, k)]. \quad (18)
\end{aligned}$$

同理, 存在 Δ_b 使得

$$\begin{aligned}
& \Delta_2 \nu(t, k+1) - \Delta_2 \nu(t, k) = \\
& \Delta_b [Q_a(t)\alpha(t, k) + Q_b(t)\beta(t, k)]. \quad (19)
\end{aligned}$$

其中: Δ_a, Δ_b 是具有适当维数的实数阵且 $\|\Delta_a\| \leq 1, \|\Delta_b\| \leq 1$. 从而式(13)和(14)可以以矩阵形式表示为

$$\begin{bmatrix} \alpha(t+1, k) \\ \beta(t, k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}(t, k) & A_{12}(t, k) \\ A_{21}(t, k) & A_{22}(t, k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha(t, k) \\ \beta(t, k) \end{bmatrix}. \quad (20)$$

其中:

$$\begin{aligned}
A_{11}(t, k) &= A(t-1) + B(t-1)R_a(t) + \Delta_a P_a(t), \\
A_{12}(t, k) &= B(t-1)R_b(t) + \Delta_a P_b(t), \\
A_{21}(t, k) &= -C(t)A(t-1) - C(t)B(t-1)R_a(t) - \\
& \Delta_a C(t)P_a(t) - \Delta_b Q_a(t), \\
A_{22}(t, k) &= I - C(t)B(t-1)R_b(t) - \\
& \Delta_a C(t)P_b(t) - \Delta_b Q_b(t).
\end{aligned}$$

为得出SISO系统的学习律, 需先作如下定义:

定义 1 设系统(8)为SISO系统, 则有 $A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}, B(t) \in \mathbb{R}^{n \times 1}, C(t) \in \mathbb{R}^{1 \times n}, \omega(t) \in \mathbb{R}^{n \times 1}, \nu(t) \in \mathbb{R}^{1 \times 1}, P_a(t) \in \mathbb{R}^{1 \times 1}, P_b(t) \in \mathbb{R}^{n \times 1}, Q_a(t) \in \mathbb{R}^{1 \times n}, Q_b(t) \in \mathbb{R}^{1 \times 1}, R_a(t) \in \mathbb{R}^{1 \times n}, R_b(t) \in \mathbb{R}^{1 \times 1}$. 令 $a_{ij}(t), b_{ij}(t), c_{ij}(t), \omega_{ij}(t), \nu_{ij}(t), p_{aij}(t), p_{bij}(t), q_{aij}(t), q_{bij}(t), r_{aij}(t), r_{bij}(t)$, 分别为 $A(t), B(t), C(t), \omega(t), \nu(t), P_a(t), P_b(t), Q_a(t), Q_b(t), R_a(t), R_b(t)$ 中第 i 行第 j 列的元素. 则式(20)中的 $A_{21}(t), A_{22}(t)$ 可由下式表示:

$$A_{21}(t) := [a_{(21)1}, a_{(21)2}, \dots, a_{(21)n}]. \quad (21)$$

其中:

$$\begin{aligned}
a_{(21)1} &= \\
& - \sum_{i=1}^n c_{1i}(t)a_{i1}(t-1) - \sum_{i=1}^n c_{1i}(t)b_{i1}(t-1)r_{a11}(t) - \\
& \Delta_a c_{11}(t)p_a(t) - \Delta_b q_{a11}(t), \\
a_{(21)2} &= \\
& - \sum_{i=1}^n c_{1i}(t)a_{i2}(t-1) - \sum_{i=1}^n c_{1i}(t)b_{i1}(t-1)r_{a12}(t) - \\
& \Delta_a c_{12}(t)p_a(t) - \Delta_b q_{a12}(t), \\
& \vdots \\
a_{(21)n} &= \\
& - \sum_{i=1}^n c_{1i}(t)a_{in}(t-1) - \sum_{i=1}^n c_{1i}(t)b_{i1}(t-1)r_{a1n}(t) - \\
& \Delta_a c_{1n}(t)p_a(t) - \Delta_b q_{a1n}(t), \\
A_{22}(t) &= \\
& [1 - \sum_{i=1}^n c_{1i}(t)b_{i1}(t-1)r_{b11}(t) - \Delta_a \sum_{i=1}^n c_{1i}(t)p_{bi1}(t), \\
& p_{b1}(t) - \Delta_b q_{b11}(t)] := [a_{(22)}]. \quad (22)
\end{aligned}$$

定理 1 对式(8)所描述的SISO系统, 且满足条件:

i)

$$|c_{1i}(t)p_{a11}(t)| + |q_{a1i}(t)| < 1, \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad (23)$$

ii)

$$|\sum_{i=1}^n c_{1i}(t)p_{bi1}(t)| + |q_{b11}(t)| < 1, \quad (24)$$

则存在学习律

$$\begin{aligned}
& u(t, k+1) = \\
& u(t, k) + R_a(t+1)\alpha(t+1, k) + R_b(t+1) \\
& \beta(t+1, k), \quad t = 0, 1, \dots, N-1 \quad (25)
\end{aligned}$$

使 $k \rightarrow \infty$ 时系统的迭代输出 $y(t, k)$ 在 $[0, T]$ 上收敛于期望轨迹 $\lim_{k \rightarrow \infty} y(t, k) = y_d(t), \forall t \in [0, T]$. (其中 $p_{a11}(t), q_{a1i}(t), p_{bi1}(t), q_{b11}(t)$ 等由定义1给出, $C(t)B(t-1) \neq 0$, 下文同).

证 根据引理1, 当 $-1 < a_{(21)i} < 1, i = 1, 2, \dots, n$ 且 $-1 < a_{22} < 1$ 时, 系统收敛. 对 $-1 < a_{(21)1} < 1$ 有

$$-1 + \Delta_a c_{11}(t)p_a(t) + \Delta_b q_{a11}(t) < -\sum_{i=1}^n c_{1i}(t)a_{i1}(t-1) - \sum_{i=1}^n c_{1i}(t)b_{i1}(t-1)r_{a11}(t) < 1 + \Delta_a c_{11}(t)p_a(t) + \Delta_b q_{a11}(t). \quad (26)$$

因为 $\|\Delta_a\| \leq 1, \|\Delta_b\| \leq 1$, 故若上式成立, 只要

$$-1 + |c_{11}(t)p_a(t)| + |q_{a11}(t)| < -\sum_{i=1}^n c_{1i}(t)a_{i1}(t-1) - \sum_{i=1}^n c_{1i}(t)b_{i1}(t-1)r_{a11}(t) < 1 + |c_{11}(t)p_a(t)| + |q_{a11}(t)|. \quad (27)$$

上式中 $r_{a11}(t)$ 存在当且仅当 $|c_{11}(t)p_{a11}(t)| + |q_{a11}(t)| < 1$. 同理可得 $r_{a1i}(t) (i = 2, 3, \dots, n)$ 存在当且仅当式(23)成立, $r_{b11}(t)$ 存在当且仅当式(24)成立.

证毕.

定理2 令

$$\begin{aligned} k_{1i} &= [-1 + |c_{1i}(t)p_a(t)| + |q_{a1i}(t)| + \sum_{i=1}^n c_{1i}(t)a_{i1}(t-1)] / (-\sum_{i=1}^n c_{1i}(t)b_{i1}(t-1)), \\ k_{2i} &= [1 - |c_{1i}p_a(t)| - |q_{a1i}(t)| + \sum_{i=1}^n c_{1i}(t)a_{i1}(t-1)] / (-\sum_{i=1}^n c_{1i}(t)b_{i1}(t-1)), \\ k_3 &= [-2 + |\sum_{i=1}^n c_{1i}(t)p_{b11}(t)| + |q_{b11}(t)|] / (-\sum_{i=1}^n c_{1i}(t)b_{i1}(t-1)), \\ k_4 &= [-|\sum_{i=1}^n c_{1i}(t)p_{b11}(t)| - |q_{b11}(t)|] / (-\sum_{i=1}^n c_{1i}(t)b_{i1}(t-1)), \\ (i &= 1, 2, 3, \dots, n). \end{aligned} \quad (28)$$

对系统(8), 若采用学习律(25), 依下式选取 $R_a(t), R_b(t)$,

$$\begin{cases} \min\{k_{1i}, k_{2i}\} < r_{a1i}(t) < \max\{k_{1i}, k_{2i}\}, \\ i = 1, 2, \dots, n, \\ \min\{k_3, k_4\} < r_{b11}(t) < \max\{k_3, k_4\}, \end{cases} \quad (29)$$

就能保证系统的迭代输出 $y(t, k)$ 在 $[0, T]$ 上收敛于期望轨迹 $y_d(t)$. 即对 $\forall t \in [0, T], \lim_{k \rightarrow \infty} y(t, k) = y_d(t)$.

证 由式(27)可得

$$-1 + |c_{11}(t)p_a(t)| + |q_{a11}(t)| + \sum_{i=1}^n c_{1i}(t)a_{i1}(t-1) < -\sum_{i=1}^n c_{1i}(t)b_{i1}(t-1)r_{a11}(t) <$$

$$1 - |c_{11}(t)p_a(t)| - |q_{a11}(t)| + \sum_{i=1}^n c_{1i}(t)a_{i1}(t-1). \quad (30)$$

因 $\sum_{i=1}^n c_{1i}(t)b_{i1}(t-1) \neq 0$, 故 $r_{a11}(t)$ 取值范围在 k_{11} 与 k_{21} 之间, 同理, $r_{b11}(t)$ 取值范围在 k_3 与 k_4 之间. 综合定理1可知, 当 $R_a(t), R_b(t)$ 满足不等式(29)时, 系统的迭代输出 $y(t, k)$ 在 $[0, T]$ 上收敛于期望轨迹 $y_d(t)$. 证毕.

注1 定理1与定理2说明在给定条件下当 $k \rightarrow \infty$ 时, $y(t, k)$ 收敛于 $y_d(t)$, 但笔者的目标是有限次迭代. 因此无论扰动项是否与迭代次数有关, 经有限次迭代后, 当 $y(t, k)$ 与 $y_d(t)$ 的误差小于允许误差时, 迭代即可中止.

上述方法由于精度较高, 学习速度较快(见例2)而导致计算量较大, 因而应用于MIMO系统就显得过于复杂. 在这种情况下, 可引入一种折衷方案, 削去未知量 Δ 来简化系统, 减小计算量, 但是会不可避免地减慢学习速度, 增加迭代次数.

定理3 对MIMO系统(8)采用学习律(25), 若依照下式选取 $R_a(t), R_b(t)$:

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad & \| -C(t)A(t-1) - C(t)B(t-1)R_a(t) \| + \| C(t)P_a(t) \| + \| Q_a(t) \| < 1; \\ \text{ii)} \quad & \| I - C(t)B(t-1)R_b(t) \| + \| C(t)P_b(t) \| + \| Q_b(t) \| < 1, \end{aligned} \quad (31)$$

则可保证系统输出收敛.

证 根据引理1, 当 $\| \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ A_{21}(t) & A_{22}(t) \end{bmatrix} \| < 1$ 时系统收敛, 此时有 $\| A_{21}(t) \| < 1$ 且 $\| A_{22}(t) \| < 1$. 而

$$\begin{aligned} \| A_{21}(t) \| &= \| -C(t)A(t-1) - C(t)B(t-1)R_a(t) - \Delta_a C(t)P_a(t) - \Delta_b Q_a(t) \|. \end{aligned}$$

从而当式(31)(32)成立时, 必有 $\| A_{21}(t) \| < 1$, 同理可证 $\| A_{22}(t) \| < 1$. 证毕.

上文所讨论的系统所受到的扰动具有一般性, 下文将对一种特殊扰动加以说明.

对系统(6), 若令 $\Delta_1 \equiv 1, \Delta_2 \equiv 1$, 则系统状态方程和输出方程可简化为

$$\begin{cases} x(t+1) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + \omega(t), \\ y(t) = C(t)x(t) + \nu(t). \end{cases} \quad (33)$$

因 $\omega(t), \nu(t)$ 的值可准确测得, 故可视为已知扰动. 使用学习律(7)和(15), 则式(20)可简化为

$$\begin{bmatrix} \alpha(t+1, k) \\ \beta(t, k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}(t, k) & A_{12}(t, k) \\ A_{21}(t, k) & A_{22}(t, k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha(t, k) \\ \beta(t, k) \end{bmatrix}. \quad (34)$$

其中:

$$A_{11}(t, k) = A(t-1) + B(t-1)R_a(t) + P_a(t),$$

$$A_{12}(t, k) = B(t-1)R_b(t) + P_b(t),$$

$$A_{21}(t, k) = -C(t)A(t-1) - C(t)B(t-1)R_a(t) - C(t)P_a(t) - Q_a(t),$$

$$A_{22}(t, k) = I - C(t)B(t-1)R_b(t) - C(t)P_b(t) - Q_b(t).$$

定理 4 对于系统(33), 设 $C(t)B(t-1)$ 为行满秩阵, 则只要选择合适学习律(15), 即选择合适的 $R_a(t)$, $R_b(t)$, 就能确保系统输出以最快速度收敛. 若 $C(t)B(t-1)$ 可逆, 选

$$\begin{cases} R_a(t) = -[C(t)B(t-1)]^{-1}[C(t)A(t-1) + C(t)P_a(t) + Q_a(t)], \\ R_b(t) = [C(t)B(t-1)]^{-1}[I - C(t)P_b(t) - Q_b(t)], \end{cases} \quad (35)$$

则只需经过一次迭代就能实现系统输出对期望轨迹的完全跟踪.

证 由式(34)可得

$$\begin{aligned} \beta(t, 1) = & \{-C(t)[A(t-1) + B(t-1)R_a(t) + P_a(t)] - \\ & Q_a(t)\}\alpha(t, 0) + [I - C(t)B(t-1) \\ & C(t)R_b(t) - (t)P_b(t) - Q_b(t)]\beta(t, 0). \end{aligned}$$

将式(35)代入式(34), 则 $\beta(t, 1) = y_d(t) - y(t, 1) = 0$. 证毕.

4 仿真示例(Examples of simulation)

本文所用的两个示例均来自文[12], 并在原系统中添加了扰动.

4.1 例 1 (Example 1)

系统

$$\begin{cases} x(t+1) = \begin{bmatrix} -0.24 & 0.01 \\ 0.2 \sin t + 0.04 & -0.35 \end{bmatrix} x(t) + \\ \quad \begin{bmatrix} 0.027t + 1 \\ 0.12 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0.01 \\ -0.02t \end{bmatrix}, \\ y(t) = [0.45 \quad -0.001t]x(t) + 0.003 \sin(0.1t). \end{cases}$$

令初始条件 $x(0) = 0$, 期望轨迹为 $y_d(t) = 1.5 \sin(0.06t)$, 取

$$R_a(t) = \begin{bmatrix} \frac{0.108 + 0.0002t \sin(t-1)}{0.43785 + 0.01203t} & \frac{-0.0045 - 0.00035t}{0.43785 + 0.01203t} \end{bmatrix},$$

$$R_b(t) = \frac{1}{0.43785 + 0.01203t},$$

给定初始输入 $u(t) = 1$, 仿真结果如图1所示.

图1中, 虚线 y_0 为第1次运行输出轨迹, 星线 y_1 与实线 y_d 重合(正弦曲线), 为第2次运行(第1次迭代)输出轨迹和系统期望轨迹, 表明经过一次迭代就能实现无差跟踪. 文[12]中相同的系统经6次迭代才能达到无差跟踪.

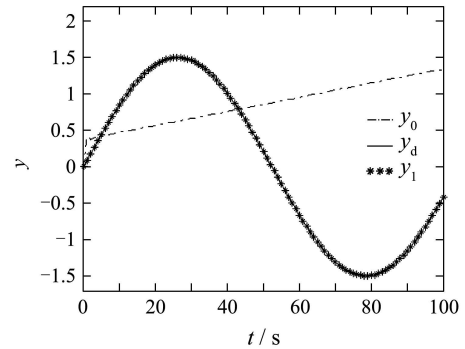


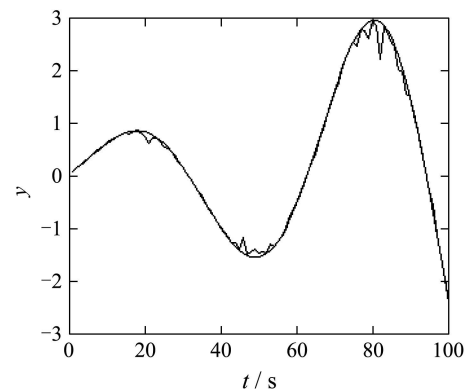
图1 例1系统经一次迭代跟踪期望轨迹的迭代过程
Fig. 1 Iterative process that following the desired trajectory by one iteration

4.2 例 2 (Example 2)

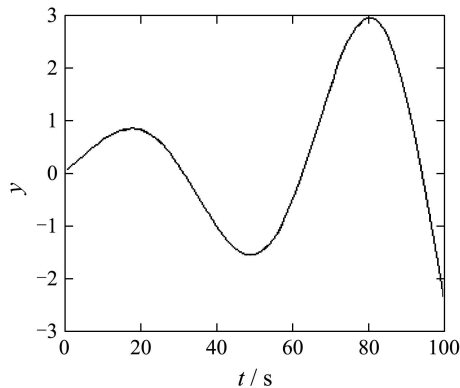
对如下系统

$$\begin{cases} x(t+1) = \begin{bmatrix} 0.18 & 0 \\ 0.02t & -0.5 \end{bmatrix} x(t) + \\ \quad \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.01t + 2 \end{bmatrix} u(t) + \Delta_1 \begin{bmatrix} 0.01t \\ 0.03 \end{bmatrix}, \\ y(t) = [-0.52 \quad 0]x(t) + \Delta_2 0.002. \end{cases}$$

其中: $x(0) = 0$, $\|\Delta_1\| \leq 1$, $\|\Delta_2\| \leq 1$, 矩阵 $C(t)B(t-1)$ 对 $t = 1, 2, \dots, 100$ 是可逆的. 期望输出轨迹为 $y_d = 0.6e^{0.02t} \sin(0.1t)$. 设定初始输入为 $u(t, 0) = 0, t = 0, 1, \dots, 99$, 仿真表明, 系统经6次迭代后基本收敛于期望轨迹, 经8次迭代后就和期望轨迹的误差几乎为0. 图2给出第4次迭代和第8次迭代结果.



(a) 第4次迭代



(b) 第8次迭代

图2 例2的受扰动系统迭代过程(第4,8次迭代)

Fig. 2 Iterative process of the system with disturbances in example 2(the 4th and 8th iterations)

5 结论(Conclusion)

本文基于2-D系统理论,给出了针对不同线性时变离散系统的学习律.对受已知扰动的系统,可通过选择参数实现仅经一次迭代就能完全跟踪期望轨迹;对扰动量未知的系统,提出了其学习律存在条件及参数选取方法.正如前言中所说,本文中的方法适用于重复性运动的场合,经有限次迭代即可达到很高的精度.

参考文献(References):

- [1] UCHIYAMA M. Formation of high speed motion pattern of mechanical arm by trail[J]. *Trans of the Society of Instrumentation and Control Engineer*, 1978, 16(4): 706 – 712.
- [2] ARIMOTO S, KAWAMURA S, MIYAZAKI F. Bettering operation of robots by learning[J]. *J of Robotic Systems*, 1984, 1(2): 123 – 140.

- [3] 孙明轩, 黄宝键. 迭代学习控制[M]. 北京: 国防工业出版社, 1999.
- [4] 林辉, 王林. 迭代学习控制理论[M]. 西安: 西北工业大学出版社, 1998.
- [5] 谢胜利, 田森平, 谢振东. 迭代学习控制理论与应用[M]. 北京: 科学出版社, 2005.
- [6] CHEN Y, WEN C. *Iterative Learning Control: Convergence, Robustness, and Applications*[M]. London: Springer, 1999.
- [7] NORRLSÖF M, WEN C. *Iterative Learning Control: Analysis, Design, and Experiments*[M]. Linköping: Department of Electrical Engineering, Linköping Universitet, 2000.
- [8] ARIMOTO S, MIGAZAKI F. Stability and robustness of PID feedback control for robot manipulators of sensory capability[C]//BRADY M, PAUL R P. *Proc of Robotics Research: First International Symposium*. USA: MIT Press, 1984: 783 – 799.
- [9] GENG Z, JAMSHIDI M. Learning control system analysis and design based on 2-D system theory[J]. *J of Intell Robot Syst*, 1990, 17: 17 – 26.
- [10] KUREK J E, ZAREMBA M B. Iterative learning control synthesis based on 2-D system theory[J]. *J of Intell Robot Syst*, 1993, 38(1): 121 – 125.
- [11] FANG Y, CHOW T W S. Iterative learning control of linear discrete-time multivariable system[J]. *Automatica*, 1998, 34(11): 1459 – 1462.
- [12] LI X D, HO J K L, CHOW T W S. Iterative learning control for linear time-variant discrete systems based on 2-D system theory[J]. *IEE Proc: Control Theory and Applications*, 2005, 152(1): 13 – 18.

作者简介:

黄彧伟 (1980—), 男, 硕士研究生, 主要研究方向为学习控制、嵌入式系统, E-mail: topazmann@yahoo.com.cn;

张国山 (1961—), 男, 教授, 博士, 主要研究方向为鲁棒控制、智能控制与广义系统理论, E-mail: zhanggs@tju.edu.cn.