第 25 卷第 1 期
2008 年 2 月

控 制 理 论 与 应 用
Control Theory & Applications

Vol. 25 No. 1
Feb. 2008

文章编号: 1000−8152(2008)01−0033−07

具有边界控制的线性Timoshenko型系统的指数稳定性

杜 燕, 许跟起

(天津大学 数学系, 天津 300072)

摘要: 本文研究多孔弹性材料在实际应用中的镇定问题. 多孔物体的动力学行为由线性Timoshenko型方程描述, 这样的系统一般只是渐近稳定但不指数稳定. 假定系统两端都是自由的, 在自由端对系统施加边界速度反馈控制, 本文讨论闭环系统的适定性和指数稳定性. 首先, 利用有界线性算子半群理论得到了系统的适定性. 进一步对系统算子的本征值的渐近值估计, 得到算子谱分布在一个带域, 相互分离的, 模充分大的本征值都是简单本征值. 通过引入一个辅助算子, 利用它的谱性质以及有界线性算子的扰动理论, 得到系统的广义本征向量的完整性以及Riesz基性质. 最后利用Riesz基性质和谱分布得到闭环系统的指数稳定性.

关键词: 线性Timoshenko型系统; 边界反馈控制; Riesz基; 指数稳定性

中图分类号: O231.4　　**文献标识码**: A

Exponential stability of a system of linear Timoshenko type with boundary controls

DU Yan, XU Gen-qi

(Department of Mathematics, Tianjin University, Tianjin 300072, China)

Abstract: In this paper we consider the stabilization problem of porous elastic solids in real world. The kinetic behavior of porous solids is governed by equations of linear Timoshenko type which is usually asymptotically stable but not exponentially stable. We apply boundary velocity feedback controls to the system with both ends free, then examine the well-posedness and exponential stability of the closed loop system. Firstly, we obtain the well-posedness of the system by the semigroup theory of bounded linear operators. Secondly, we get the asymptotic values of eigenvalues of the system, which are isolated and lie in a strip area under certain condition. Moreover, we introduce an auxiliary operator, and then by means of its spectral properties and theory of perturbations of bounded linear operators to prove that there is a sequence of generalized eigenvector system which forms a Riesz basis for Hilbert state space. Finally, we obtain the exponential stability of the closed loop system by using the Riesz basis property and spectral distribution .

Key words: linear Timoshenko type system; boundary feedback control; Riesz basis; exponential stability

1 引言(Introduction)

多孔材料是20世纪80年代发展起来的崭新材料体系, 其显著特点是规则排列, 大小可调的孔道结构及高的表面积比和大的吸附容量. 在太空材料, 生物, 医药, 光电器材及催化领域有着引人注目的应用前景. 它的出现为解决结构设计中的轻量化与耐撞性这对矛盾提供了重要手段. 如在机翼等结构的适当部位填充多孔材料, 可去除原有肋板等加强件, 仍保持足够的承载能力和耐撞性能. 如在汽车车身纵梁等薄壁结构中适当填充轻质多孔材料并进行优化设计, 可在有限的空间和质量条件下提高车辆的碰撞安全性能.

多孔材料虽然具有很大的应用价值, 但同时也引出一些理论上的问题.因此对多孔的弹性材料的研究就运而生. 一般来说, 多孔材料被视为一种弹性物质, 所以多孔物体行为理论是古典弹性学理论的一般化. 关于多孔的弹性物质的理论是由Cowin和Nunziato创立的(见文[1～3]). 在该理论中, 整体密度是“两个数量场”, “物体的密度”和“体积分数场”三者的乘积. 在Ciarletta和Iscan的书(见文[4])中对该理论进行了细致的研究.

在一维情况下, 多孔物体行为由下面发展方程描述:

$$\begin{cases}\rho_0\ddot{u}=T',\\ \rho_0K\ddot{\varphi}=h'+g,\end{cases}\tag{1}$$

收稿日期: 2006−06−13; 收修改稿日期: 2006−11−29.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(60474017); 教育部南开–天津大学刘徽应用数学中心资助项目.
本文在第25届中国控制会议上交流过.

其中: T是应力, h是平衡应力, g是平衡体力. 变元u和φ分别表示固体弹性物质的位移和体积分数.

其结构方程是

$$\begin{cases} T=\mu u'+\beta\varphi, \\ h=\alpha\varphi', \\ g=-\beta u'-\gamma\dot{\varphi}-\xi\varphi. \end{cases} \tag{2}$$

假定内部能量密度是正定型的, 则结构系数满足条件

$$\mu>0, \alpha>0, \xi>0, \xi\mu>\beta^2.$$

将结构方程代入发展方程得到域方程

$$\begin{cases} \rho_0\ddot{u}(x,t)=\mu u''(x,t)+\beta\varphi'(x,t), \\ \qquad 0<x<\ell, t>0, \\ \rho_0K\ddot{\varphi}(x,t)=\alpha\varphi''(x,t)-\beta u'(x,t)-\xi\varphi(x,t)- \\ \qquad \gamma\dot{\varphi}(x,t), 0<x<\ell, t>0, \end{cases} \tag{3}$$

常数ρ_0是质量密度, K是平衡惯性. 方程(3)类似于Timoshenko方程, 所以称其为线性Timoshenko型系统.

在目前已发表的文章中, 主要研究的是“一维的齐次线性方程”和“具有耗散性的各向同性的多孔的弹性物质”. 并且认为: 具有耗散过程的弹性学的组合是由于多孔性导致的. 因此, 一个很自然的问题就提出来, 由多孔性导致的耗散过程是否具有指数稳定性?

在R.Quintanilla的文章中(见文[5]), 在简单支撑边界条件

$$u(x,t)=0, \varphi'(x,t)=0, x=0,\ell,$$

下得到了域方程代表的系统是渐近稳定的, 但并不指数稳定. 明显地, 这样的性质在工程应用中是不充分的. 为了使相应的系统达到指数稳定, 还需对系统施加控制.

在本文假定系统两端都是自由的, 并在自由端施加边界反馈控制, 得到相应的闭环系统为

$$\begin{cases} \rho_0\ddot{u}(x,t)=\mu u''(x,t)+\beta\varphi'(x,t), 0<x<\ell, t>0, \\ \rho_0K\ddot{\varphi}(x,t)=\alpha\varphi''(x,t)-\beta u'(x,t)-\xi\varphi(x,t)- \\ \qquad \gamma\dot{\varphi}(x,t), 0<x<\ell, t>0, \\ \mu u'(0,t)+\beta\varphi(0,t)=\alpha_1\dot{u}(0,t)+\alpha_2 u(0,t), t>0, \\ \varphi'(0,t)=0, t>0, \\ \mu u'(\ell,t)+\beta\varphi(\ell,t)=0, t>0, \\ \varphi'(\ell,t)=-\beta_1\dot{\varphi}(\ell,t), t>0, \end{cases} \tag{4}$$

其中常系数满足的条件

$$\begin{cases} \mu>0, \alpha>0, K>0, \rho_0>0, \xi>0, \gamma>0, \\ \beta>0, \xi\mu>\beta^2, \alpha_1>0, \alpha_2>0, \beta_1>0. \end{cases} \tag{5}$$

本文将研究闭环系统(4)在系数满足条件(5)下的性质, 特别是系统的指数稳定性. 对于规范的Timoshenko系统, 近些年有不少研究结果, 比如文[9～12] 在各种反馈控制律下得到了闭环系统的指数稳定性以及Riesz基性质. 这里不同的是尽管系统称为Timoshenko型系统, 但它不是规范的Timoshenko系统, 由于其描述的是多孔物体的行为, 其系数具有一定的约束条件. 另外一个困难是在讨论中不能使用已导出的一维Timoshenko方程解公式(参考文[8]).在分析系统时, 为了克服上述困难, 主要是采用Birkhoff渐近展开方法(参考文[14]), 给出系统谱的渐近值估计.这里完全是利用算子谱方法研究系统的指数稳定性, 通过证明系统算子广义本征向量的完整性和Riesz基性质, 从而得到系统满足谱确定增长条件, 然后利用谱分布得到期望的结果.

本文的内容安排如下: 在第2节, 首先规范化系统, 通过设置合适的状态空间, 将闭环系统(4)写成一个抽象初值问题, 然后利用算子半群的理论得到闭环系统(4)的适定性和渐近稳定性. 并表明系统算子$\mathcal{A}$是预解紧的. 第3节着重研究系统算子的谱. 将算子的本征值问题转化成等价的一阶微分方程的边值问题, 算子的本征值作为参数. 由于一阶微分方程关于谱参数是非线性的, 这里重要的一步是做了一个可逆的变换, 将一阶微分方程转化为关于谱参数渐近线性的方程. 通过渐近线性化方程的基本解矩阵的渐近展开, 并利用边界条件得到相应特征方程零点的渐近分布, 从而得到算子$\mathcal{A}$的渐近本征值. 在第4节, 主要研究算子$\mathcal{A}$的广义本征向量的完整性, 这里的技巧在于引入一个辅助算子$\mathcal{A}_0$, 利用算子$\mathcal{A}_0$的谱性质和算子$\mathcal{A}$与辅助算子$\mathcal{A}_0$关系来得到算子$\mathcal{A}$的广义本征向量的完整性. 在第5节, 研究算子$\mathcal{A}$的广义本征向量的Riesz基性质以及系统的指数稳定性. 通过证明算子$\mathcal{A}$的广义本征向量的Riesz基性质, 得到系统满足谱确定增长条件, 从而利用第3节获得的算子$\mathcal{A}$的谱分布断言系统的指数稳定性.

2 系统的规范化及适定性和渐近稳定性(Normalization, well-posed-ness and asymptotic stability of the system)

选择状态空间$\mathcal{H}$

$$\mathcal{H}=H^1(0,\ell)\times L^2(0,\ell)\times H^1(0,\ell)\times L^2(0,\ell),$$

其中$H^k(0,\ell)$ 是k阶的Sobolev空间.

对任意的$Y_i=[u_i,v_i,\varphi_i,\phi_i]^\tau\in\mathcal{H}$, $i=1,2$, 空间$\mathcal{H}$中的内积定义为

$$(Y_1,Y_2)_1= \int_0^\ell\rho_0v_1(x)\bar{v}_2(x)\mathrm{d}x+\int_0^\ell\rho_0K\phi_1(x)\bar{\phi}_2(x)\mathrm{d}x+$$

$$\frac{1}{\mu}\int_0^\ell[\mu u_1'(x)+\beta\varphi_1(x)][\mu u_2'(x)+\bar{\beta}\varphi_2(x)]\mathrm{d}x+\frac{1}{\alpha}\int_0^\ell \alpha^2\varphi_1'(x)\bar{\varphi}_2'(x)\mathrm{d}x+(\xi-\frac{\beta^2}{\mu})\int_0^\ell\varphi_1(x)\bar{\varphi}_2(x)\mathrm{d}x+\alpha_2u_1(0)\bar{u}_2(0),$$

可以验证$(\mathcal{H},(\cdot,\cdot)_1)$是Hilbert空间.

在空间$\mathcal{H}$中定义线性算子$\mathcal{A}$如下:

$$\mathcal{A}\begin{pmatrix}u\\v\\\varphi\\\phi\end{pmatrix}:=\begin{pmatrix}v\\\frac{\mu}{\rho_0}u''+\frac{\beta}{\rho_0}\varphi'\\\phi\\\frac{\alpha}{\rho_0K}\varphi''-\frac{\beta}{\rho_0K}u'-\frac{\xi}{\rho_0K}\varphi-\frac{\gamma}{\rho_0K}\phi\end{pmatrix}. \tag{6}$$

$\mathcal{A}$ 的定义域为

$$\mathcal{D}(\mathcal{A})=\left\{[u,v,\varphi,\phi]^\tau\in H^2\times H^1\times H^2\times H^1\ \middle|\ \begin{array}{l}\mu u'(0)+\beta\varphi(0)=\alpha_1v(0)+\alpha_2u(0),\\\varphi'(0)=0,\ \ \mu u'(\ell)+\beta\varphi(\ell)=0,\\\varphi'(\ell)=-\beta_1\phi(\ell),\end{array}\right\} \tag{7}$$

则闭环系统(4)可化为一阶抽象微分方程

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}Y(t)}{\mathrm{d}t}=\mathcal{A}Y(t),t>0,\\Y(0)=Y_0,\end{cases} \tag{8}$$

其中$Y(t)=[u(\cdot,t),\dot{u}(\cdot,t),\varphi(\cdot,t),\dot{\varphi}(\cdot,t)]^\tau$, 且$Y_0\in\mathcal{H}$是给定的初值.

本节将主要研究系统(8)的适定性和渐近稳定性问题. 首先有下面的结论.

定理 1　算子$\mathcal{A}$如定义, 则$\mathcal{A}$是耗散的, 且$0\in\rho(\mathcal{A})$, $\mathcal{A}^{-1}$是紧算子, 因此$\mathcal{A}$生成C_0压缩半群.

证　首先证明$\mathcal{A}$是耗散的. 对任意实的

$$Y=[f,g,\varphi,\phi]^\tau\in\mathcal{D}(\mathcal{A}),$$

$$(\mathcal{A}Y,Y)_1=-\alpha_1[g(0)]^2-\alpha\beta_1[\phi(\ell)]^2-\gamma\int_0^\ell[\phi(x)]^2\mathrm{d}x\leqslant 0.$$

所以算子$\mathcal{A}$是耗散算子.

下面证明$0\in\rho(\mathcal{A})$, 且$\mathcal{A}$是可逆的, $\mathcal{A}^{-1}$是紧算子.

设对于任意的$F=[f_1,f_2,g_{1,}g_2]^\tau\in\mathcal{H}$, 考虑方程$\mathcal{A}Y=F, Y=[u,v,\varphi,\phi]^\tau\in\mathcal{D}(\mathcal{A})$, 即

$$\begin{cases}v(x)=f_1(x),\ \ \phi(x)=g_1(x),\\\mu u''(x)+\beta\varphi'(x)=\rho_0f_2(x),\\\alpha\varphi''(x)-\beta u'(x)-\xi\varphi(x)-\gamma\phi(x)=\rho_0Kg_2(x),\\\mu u'(0)+\beta\varphi(0)=\alpha_1f_1(0)+\alpha_2u(0),\\\varphi'(0)=0,\mu u'(\ell)+\beta\varphi(\ell)=0,\\\varphi'(\ell)=-\beta_1g_1(\ell).\end{cases} \tag{9}$$

为解方程(9), 令

$$G(x)=\frac{1}{\alpha\mu}[-\mu\gamma g_1(x)-\mu\rho_0Kg_2(x)+\beta\int_x^\ell\rho_0f_2(s)\mathrm{d}s],$$

$$m=\sqrt{\frac{\xi\mu-\beta^2}{\alpha\mu}},$$

$$C_1=\frac{1}{2m\sinh(m\ell)}[\int_0^\ell\cosh(m(\ell-r))G(r)\mathrm{d}r-\beta_1g_1(\ell)]. \tag{10}$$

解式(9)得

$$\varphi(x)=C_1\cosh(mx)-\frac{1}{m}\int_0^x\sinh(m(x-r))G(r)\mathrm{d}r, \tag{11}$$

$$u(x)=-\frac{1}{\mu}[\beta\int_0^x\varphi(r)\mathrm{d}r+\int_0^x\mathrm{d}r\int_r^\ell\rho_0f_2(s)\mathrm{d}s]. \tag{12}$$

即对于任意的$F=[f_1,f_2,g_{1,}g_2]^\tau\in\mathcal{H}$, 设$v=f_1,\phi=g_1$, 而$u(x)$和$\varphi(x)$分别由(12)和(11)给出, 常数$C_1$由(10)确定, 则有唯一的$Y=[u,v,\varphi,\phi]^\tau\in\mathcal{D}(\mathcal{A})$ 使得$\mathcal{A}Y=F$. 所以逆算子$\mathcal{A}^{-1}$存在, 因此$\mathcal{A}^{-1}F=Y$且$0\in\rho(\mathcal{A})$. 由Sobolev嵌入定理可知$\mathcal{A}^{-1}$是紧算子. 利用Lumer-Phillips定理可得$\mathcal{A}$生成C_0压缩半群.

定理 2　虚轴上没有$\mathcal{A}$的谱点, 从而$\mathcal{A}$生成的半群$T(t)$是渐近稳定的.

证　因为$\mathcal{A}^{-1}$是紧算子, 所以可设$\mathcal{A}$的谱$\sigma(\mathcal{A})$都是点谱. 只需证明在虚轴上没有$\mathcal{A}$的本征值.

利用反证法.假设存在$\lambda\in\sigma(\mathcal{A})$在虚轴上. 显然$\lambda\neq 0$.不妨设$\lambda=\mathrm{i}r$, $Y=[u,v,\varphi,\phi]^\tau$ 是相应的本征向量.则$(\lambda I-\mathcal{A})Y=0$. 因为$\mathcal{A}$是耗散算子, 所以

$$\Re\lambda\|Y\|^2=-\alpha_1[v(0)]^2-\alpha\beta_1[\phi(\ell)]^2-\gamma\int_0^\ell[\phi(x)]^2\mathrm{d}x\leqslant 0,$$

由此得到$v(0)=\phi(x)=0$. 因此$u(0)=\varphi(x)=0$. 将之代入系统方程得$u(x)=0$.从而$Y=[0,0,0,0]^\tau$. 此与Y是$\mathcal{A}$的本征向量矛盾. 因此虚轴上没有$\mathcal{A}$的本征值, 由Lyubich和Phóng定理(见文[7])得半群$T(t)$是渐近稳定的.

3　$\mathcal{A}$ 的谱的渐近分析(Asymptotic analysis of spectrum of $\mathcal{A}$)

前节得到算子$\mathcal{A}$具有紧的预解式, 生成压缩半群, 相应系统是渐近稳定的. 为了研究系统的指数稳定性, 需要知道算子$\mathcal{A}$的谱分布. 因此本节重点研究算子的本征值问题. 由于本文的算子是非规范的Timoshenko算子, 不能直接应用已有的解渐近公式, 所以本文将利用最基本的方法求算子$\mathcal{A}$的本征

值的渐近值. 这个过程主要通过下面4步来完成.

3.1 边界本征值问题(Eigenvalues of boundary values problem)

设λ 是$\mathcal{A}$的一个本征值, $Y = [u,v,\varphi,\phi]^\tau \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$是相应的一个本征向量. 则

$$v(x)=\lambda u(x),\ \ \phi(x)=\lambda\varphi(x),$$

函数$u(x),\varphi(x)$满足方程

$$\begin{cases}\rho_0\lambda^2 u(x)-\mu u''(x)-\beta\varphi'(x)=0,\ \ 0<x<\ell,\\ \rho_0K\lambda^2\varphi(x)-\alpha\varphi''(x)+\beta u'(x)+\xi\varphi(x)+\\ \gamma\lambda\varphi(x)=0,\quad 0<x<\ell,\\ \mu u'(0)+\beta\varphi(0)=(\alpha_1\lambda+\alpha_2)u(0),\\ \varphi'(0)=0,\ \ \mu u'(\ell)+\beta\varphi(\ell)=0,\\ \varphi'(\ell)=-\beta_1\lambda\varphi(\ell).\end{cases}$$

令

$$z(x)=u'(x),\psi(x)=\varphi'(x),Z(x)=[u,z,\varphi,\psi]^\tau,$$

则微分方程写成

$$\frac{\mathrm{d}Z(x)}{\mathrm{d}x}=M(\lambda)Z(x).$$

其中

$$M(\lambda)=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\ \dfrac{\rho_0}{\mu}\lambda^2&0&0&-\dfrac{\beta}{\mu}\\ 0&0&0&1\\ 0&\dfrac{\beta}{\alpha}&\dfrac{\rho_0K}{\alpha}\lambda^2+\dfrac{\gamma}{\alpha}\lambda+\dfrac{\xi}{\alpha}&0\end{pmatrix},$$

取矩阵

$$B_0(\lambda)=\begin{pmatrix}\alpha_1\lambda+\alpha_2&-\mu&-\beta&0\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&1\\ 0&0&0&0\end{pmatrix},$$

$$B_1(\lambda)=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\ 0&\mu&\beta&0\\ 0&0&0&0\\ 0&0&\beta_1\lambda&1\end{pmatrix},$$

则边界条件可写成

$$B_0(\lambda)Z(0)+B_1(\lambda)Z(\ell)=0.$$

于是有下面的结论.

命题 1 一阶线性微分方程

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}Z(x)}{\mathrm{d}x}=M(\lambda)Z(x),0<x<\ell,\\ B_0(\lambda)Z(0)+B_1(\lambda)Z(\ell)=0\end{cases}\tag{13}$$

的边界本征值问题非零解的存在性和算子$\mathcal{A}$的本征值是等价的.

3.2 边界值问题本征参数的线性化(Linearization of parameters of boundary eigenvalues problem)

在上面的矩阵$M(\lambda)$是本征参数λ二阶形式, 也就是说$M(\lambda)$关于λ是非线性的, 为了能达到求本征值渐近值的目的, 需将矩阵$M(\lambda)$渐近线性化. 这里重要的一点是找一个可逆矩阵$P(\lambda)$使得$P^{-1}(\lambda)M(\lambda)P(\lambda)$是一个渐近线性矩阵.

令$m_1=\sqrt{\dfrac{\rho_0}{\mu}}, m_2=\sqrt{\dfrac{\rho_0K}{\alpha}}$, 构造可逆矩阵, 对$|\lambda|>0$,

$$P(\lambda)=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\ m_1\lambda&-m_1\lambda&0&0\\ 0&0&1&1\\ 0&0&m_2\lambda&-m_2\lambda\end{pmatrix},$$

令$Z(x)=P(\lambda)W(x)$, 所以

$$\frac{\mathrm{d}W(x)}{\mathrm{d}x}=P^{-1}(\lambda)M(\lambda)P(\lambda)W(x),$$

$$P^{-1}(\lambda)M(\lambda)P(\lambda)=$$

$$\lambda\begin{pmatrix}m_1&0&0&0\\ 0&-m_1&0&0\\ 0&0&m_2&0\\ 0&0&0&-m_2\end{pmatrix}+$$

$$\begin{pmatrix}0&0&-\dfrac{\beta m_2}{2\mu m_1}&\dfrac{\beta m_2}{2\mu m_1}\\ 0&0&\dfrac{\beta m_2}{2\mu m_1}&-\dfrac{\beta m_2}{2\mu m_1}\\ \dfrac{\beta m_1}{2\alpha m_2}&-\dfrac{\beta m_1}{2\alpha m_2}&\dfrac{\gamma}{2\alpha m_2}&\dfrac{\gamma}{2\alpha m_2}\\ -\dfrac{\beta m_1}{2\alpha m_2}&\dfrac{\beta m_1}{2\alpha m_2}&-\dfrac{\gamma}{2\alpha m_2}&-\dfrac{\gamma}{2\alpha m_2}\end{pmatrix}+$$

$$\frac{1}{\lambda}\begin{pmatrix}0&0&0&0\\ 0&0&0&0\\ 0&0&\dfrac{\xi}{2\alpha m_2}&\dfrac{\xi}{2\alpha m_2}\\ 0&0&-\dfrac{\xi}{2\alpha m_2}&-\dfrac{\xi}{2\alpha m_2}\end{pmatrix}=$$

$$\lambda M_0^*+M_1^*+\lambda^{-1}M_2^*=M^*(\lambda).$$

得到渐近线性参数的边界本征值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}W(x)}{\mathrm{d}x}=M^*(\lambda)W(x),0<x<\ell,\\ B_0(\lambda)P(\lambda)W(0)+B_1(\lambda)P(\lambda)W(\ell)=0.\end{cases}\tag{14}$$

命题 2 一阶线性微分方程

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}Z(x)}{\mathrm{d}x}=M(\lambda)Z(x),0<x<\ell,\\ B_0(\lambda)Z(0)+B_1(\lambda)Z(\ell)=0\end{cases}\tag{15}$$

的边界本征值问题和方程(14)是等价的.

3.3 基本解矩阵渐近展开(Asymptotic expansion of the fundamental matrix)

一阶微分方程$\dfrac{\mathrm{d}R(x)}{\mathrm{d}x}=\lambda M_0^* R(x)$的基本解矩阵为

$$E(x,\lambda)=\mathrm{e}^{\lambda M_0^* x}.$$

定理 3　一阶微分方程

$$\frac{\mathrm{d}W(x)}{\mathrm{d}x}=[\lambda M_0^*+M_1^*+\lambda^{-1}M_2^*]W(x) \tag{16}$$

的基本解矩阵有渐近表达

$$W(x,\lambda)=[P_0(x)+O(\lambda^{-1})]E(x,\lambda),$$

其中

$$P_0(x)=\mathrm{diag}\{1,1,\mathrm{e}^{\frac{\gamma}{2\alpha m_2}x},\mathrm{e}^{-\frac{\gamma}{2\alpha m_2}x}\}.$$

证明按照Birkhoff展开方法进行, 细节省略. 相关的一般形式的结果可见文[14].

3.4 渐近本征值计算(Calculation of asymptotic eigenvalues)

前面给出的渐近线性方程基本解矩阵的渐近展开, 这里将应用这个渐近展开去计算本征值的渐近值. 先考虑渐近线性参数一阶系统边界值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}W(x)}{\mathrm{d}x}=M^*(\lambda)W(x), 0<x<\ell,\\ B_0(\lambda)P(\lambda)W(0)+B_1(\lambda)P(\lambda)W(\ell)=0\end{cases} \tag{17}$$

的非零解的存在性.

任一解$W(x)$可表示为

$$W(x)=W(x,\lambda)\eta, \eta\in\mathbb{C}^4,$$

将其代入边界条件得

$$\{B_0(\lambda)P(\lambda)+B_1(\lambda)P(\lambda)[P_0(\ell)+O(\lambda^{-1})]E(\ell,\lambda)\}\eta=0.$$

令

$$\widehat{\Phi}(\lambda)=B_0(\lambda)P(\lambda)+B_1(\lambda)P(\lambda)\cdot\left[P_0(\ell)+O(\lambda^{-1})\right]E(\ell,\lambda),$$

要使之有非零解η, 则

$$\Delta(\lambda)=\det(\widehat{\Phi}(\lambda))=0. \tag{18}$$

当$\alpha_1\neq\mu m_1,\beta_1\neq m_2$时, 存在$N$使得

$$|\Delta(\lambda)|>0,\quad |\Re\lambda|\geqslant N.$$

对$|\Re\lambda|\leqslant N$, 计算得

$$\Delta(\lambda)=-\mu m_1 m_2\lambda^4\times[\Delta_1(\lambda)\Delta_2(\lambda)]$$

当$|\Re\lambda|\leqslant N$,且$|\lambda|\to\infty$时, $\Delta(\lambda)$有渐近零点. 即$\Delta_1(\lambda)=0,\Delta_2(\lambda)=0$, 解得渐近零点.

$$\tilde\lambda_{1,n}=\begin{cases}\dfrac{1}{2m_1\ell}\ln\left|\dfrac{\mu m_1-\alpha_1}{\mu m_1+\alpha_1}\right|+\dfrac{n}{m_1\ell}\pi\mathrm{i},\\ \quad\mu m_1-\alpha_1>0,\\ \dfrac{1}{2m_1\ell}\ln\left|\dfrac{\mu m_1-\alpha_1}{\mu m_1+\alpha_1}\right|+\dfrac{2n+1}{2m_1\ell}\pi\mathrm{i},\\ \quad\mu m_1-\alpha_1<0.\end{cases} \tag{19}$$

$$\tilde\lambda_{2,n}=\begin{cases}-\dfrac{\gamma}{2\alpha m_2^2}+\dfrac{1}{2m_2\ell}\ln\left|\dfrac{m_2-\beta_1}{m_2+\beta_1}\right|+\dfrac{n}{m_2\ell}\pi\mathrm{i},\\ \quad m_2-\beta_1>0,\\ -\dfrac{\gamma}{2\alpha m_2^2}+\dfrac{1}{2m_2\ell}\ln\left|\dfrac{m_2-\beta_1}{m_2+\beta_1}\right|+\dfrac{2n+1}{2m_2\ell}\pi\mathrm{i},\\ \quad m_2-\beta_1<0.\end{cases} \tag{20}$$

所以算子$\mathcal{A}$的渐近本征值为$\{\tilde\lambda_{1,n},\tilde\lambda_{2,n}|n\in\mathbb{Z}\}$.

对函数$\Delta(\lambda)$应用复变函数中的Rouché定理可以得到下面的结论.

定理 4　算子$\mathcal{A}$如定义, 且$\alpha_1\neq\mu m_1,\beta_1\neq m_2$. 则$\mathcal{A}$的谱$\sigma(\mathcal{A})$分布在一个垂直的带域里, 相互可分离的, 且由两支组成, 即

$$\sigma(\mathcal{A})=\{\lambda_{1,n},\lambda_{2,n};n\in\mathbb{Z}\},$$

当$|\lambda_{j,n}|$充分大时, $\lambda_{j,n}$有渐近的表达式$\lambda_{j,n}=\tilde\lambda_{j,n}+O(\tilde\lambda_{j,n}^{-1})$, 其中$\tilde\lambda_{j,n}$由(19)和(20)给出.

证　限于篇幅, 从略.

4 辅助算子及其谱性质(Auxiliary operator and its spectral properties)

本文中主要研究系统(8) 的指数稳定性和算子$\mathcal{A}$的广义本征向量系统的Riesz基性质. 为了达到此目的, 引入辅助算子$\mathcal{A}_0$(参考文[13]),

$$\mathcal{A}_0Y=[v,\frac{\mu}{\rho_0}u'',\phi,\frac{\alpha}{\rho_0K}\varphi''-\frac{\gamma}{\rho_0K}\phi]^\tau, \tag{21}$$

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}_0)=\left\{[u,v,\varphi,\phi]^\tau\in H^2\times H^1\times H^2\times H^1\ \middle|\ \begin{array}{l}\mu u'(0)=\alpha_1v(0)+\alpha_2u(0),\varphi'(0)=0,\\ u'(\ell)=0,\quad\varphi'(\ell)=-\beta_1\phi(\ell),\end{array}\right\}. \tag{22}$$

以后总假定$\alpha_1\neq\mu m_1,\beta_1\neq m_2$.

4.1 算子$\mathcal{A}_0$的性质(Properties of $\mathcal{A}_0$)

在空间$\mathcal{H}$上定义新的内积, 对于$\forall Y_i=[u_i,v_i,\varphi_i,\phi_i]^\tau\in\mathcal{H},i=1,2$,

$$(Y_1,Y_2)_2=\int_0^\ell\rho_0v_1\bar v_2\mathrm{d}x+\int_0^\ell\rho_0K\phi_1\bar\phi_2\mathrm{d}x+\mu\int_0^\ell u_1'\bar u_2'\mathrm{d}x+\alpha\int_0^\ell\varphi_1'\bar\varphi_2'\mathrm{d}x+\alpha_2u_1(0)\bar u_2(0)+\varphi_1(\ell)\bar\varphi_2(\ell),$$

可以证明这个内积与原内积等价.

定理 5　$\mathcal{A}_0$具有紧的预解式.

证明与定理1类似, 这里略去细节.

引理 1 如果序列$\{e_n\}$是空间H的一个Riesz基, 序列$\{a_n\}$满足$a_n \neq 0$, 当$|n| \to \infty$时, 有$a_n \to a \neq 0$. 那么$\{a_n\ e_n\}$也构成空间H的Riesz基.

因为算子$\mathcal{A}_0$是预解紧的, 所以$\mathcal{A}_0$的谱由其所有的本征值组成.并且有下面的结论.

定理 6 算子$\mathcal{A}_0$的本征值为

$$\sigma(\mathcal{A}_0) = \{\zeta_{1,n}, \zeta_{2,n}, \zeta_0 = 0, \mid n \in \mathbb{Z}\},$$

其中$\zeta_{1,n} = \tilde{\lambda}_{1,n}$, 由式(19)给出

$$\zeta_{2,n} = \begin{cases} -\dfrac{\gamma}{2\alpha m_2^2} + \dfrac{1}{2m_2\ell}\ln\left|\dfrac{m_2-\beta_1}{m_2+\beta_1}\right| + \\ \dfrac{n}{m_2\ell}\pi\mathrm{i} + \mathrm{O}(\dfrac{1}{n}),\ \ m_2-\beta_1>0, \\ -\dfrac{\gamma}{2\alpha m_2^2} + \dfrac{1}{2m_2\ell}\ln\left|\dfrac{m_2-\beta_1}{m_2+\beta_1}\right| + \\ \dfrac{2n+1}{2m_2\ell}\pi\mathrm{i} + \mathrm{O}(\dfrac{1}{n}),\ \ m_2-\beta_1<0, \end{cases}$$

且相应的本征向量构成$(\mathcal{H}, (\cdot,\cdot)_2)$ 的一个Riesz基.

推论 1 算子$\mathcal{A}_0$的本征值是简单的, 且$\mathcal{A}_0$生成C_0群.

4.2 算子$\mathcal{A}$与算子$\mathcal{A}_0$之间的关系(Relation between $\mathcal{A}$ and $\mathcal{A}_0$)

令

$$a(x) = -\beta x \sin\left(\frac{x\pi}{2\ell}\right),$$

$$b(x) = -\frac{2\ell\beta}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2\ell}(\ell - x)\right),$$

在空间$\mathcal{H}$上定义算子$\mathcal{P}: \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$,

$$\mathcal{P}(u_1, v, \varphi, \phi) = (u, v, \varphi, \phi),$$

且$\mu u(x) = \mu u_1(x) + a(x)\varphi(\ell) + b(x)\varphi(0)$.

于是算子P映$\mathcal{D}(\mathcal{A}_0)$ 到$\mathcal{D}(\mathcal{A})$是双射. 且有

$$\mathcal{A}_0 + \mathcal{B} = \mathcal{P}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{P}, \tag{23}$$

其中算子$\mathcal{B}: \mathcal{H} \to \mathcal{H}, \forall Y = [u_1, v, \varphi, \phi]^\tau \in \mathcal{H}$,

$$\mathcal{B}Y = \begin{pmatrix} -a(x)\varphi(\ell) - b(x)\varphi(0) \\ \dfrac{\beta}{\rho_0}\varphi' + \dfrac{\mu}{\rho_0}[a''(x)\varphi(\ell) + b''(x)\varphi(0)] \\ 0 \\ -\dfrac{\beta}{\rho_0 K}[u_1' + a'(x)\varphi(\ell) + b'(x)\varphi(0)] - \dfrac{\xi\varphi + \gamma\phi}{\rho_0 K} \end{pmatrix}. \tag{24}$$

易见$\mathcal{B}$是有界线性算子, $\mathcal{A}_0$与正规算子相似. 由定理4知, 算子$\mathcal{A}_0$的谱是$\mathcal{A}$的渐近本征值. 将式(23)变形为

$$\mathcal{A} = \mathcal{P}\mathcal{A}_0\mathcal{P}^{-1} + \mathcal{P}\mathcal{B}\mathcal{P}^{-1},$$

由此可见, $\mathcal{A}$是算子$\mathcal{P}\mathcal{A}_0\mathcal{P}^{-1}$的一个有界扰动.

5 算子$\mathcal{A}$的Riesz基性质和系统的指数稳定性(Riesz basis property of $\mathcal{A}$ and exponential stability of the system)

本节证明谱的完整性及算子$\mathcal{A}$的广义本征向量构成全空间的Riesz基从而说明系统的指数稳定性. 首先应用半群的扰动定理可以得到下面的结论.

定理 7 当$\alpha_1 \neq \mu m_1, \beta_1 \neq m_2$ 时, 算子$\mathcal{A}$生成C_0群, 而且算子$\mathcal{A}$的本征向量张成的空间在$\mathcal{H}$中是稠密的, 即谱是完整的.

证 由前面的结论知算子$\mathcal{A}_0$在$\mathcal{H}$上生成C_0群, 且$\mathcal{A} = \mathcal{P}\mathcal{A}_0\mathcal{P}^{-1} + \mathcal{P}\mathcal{B}\mathcal{P}^{-1}$, 而$\mathcal{B}$是有界线性算子.由半群的扰动定理, 算子$\mathcal{A}$在$\mathcal{H}$上也生成$C_0$群.

注意到算子$\mathcal{A}$的预解式是有限指数型, 用常规的论证方式及复变函数的Phragmén-Lindelöf定理可表明算子的广义本征向量是完整性.

为了证明$\mathcal{A}$的广义本征向量构成全空间的Riesz基, 需要下面的结果(见文[13]).

定理 8 设X是一个可分的Hilbert空间, $\mathcal{A}$是C_0半群$T(t)$的母元, 假设算子$\mathcal{A}$满足以下条件:

1) $\mathcal{A}$的谱可分成两部分$\sigma(\mathcal{A}) = \sigma_1(\mathcal{A}) \cup \sigma_2(\mathcal{A})$,且$\sigma_2(\mathcal{A}) = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$是由孤立的有限重本征值组成;

2) 算子$\mathcal{A}$本征值的代数重数一致有界, 即

$$\sup m_a(\lambda_k) < \infty, k \geqslant 1,$$

其中$m_a(\lambda_k) = \dim E(\lambda_k, \mathcal{A})X$表示相应于$\lambda_k$的代数重数;

3) 存在一条竖直线$\Re\lambda = \alpha$可将算子$\mathcal{A}$的谱分离开来, 即

$$\sup\{\Re\lambda | \lambda \in \sigma_1(\mathcal{A})\} \leqslant \alpha \leqslant \inf\{\Re\lambda | \lambda \in \sigma_2(\mathcal{A})\},$$

且集$\sigma_2(\mathcal{A})$具有可分离性, 即$\inf|\lambda_n - \lambda_m| > 0, (n \neq m)$.

那么下面的结论成立:

i) 存在半群$T(t)$-的不变闭子空间X_1和X_2具有性质: $\sigma(\mathcal{A}|_{X_1}) = \sigma_1(\mathcal{A}), \sigma(\mathcal{A}|_{X_2}) = \sigma_2(\mathcal{A})$, 在子空间$X_2$上, 子空间列$\{E(\lambda_k, \mathcal{A})X_2\}_{k=1}^{\infty}$形成$X_2$的一个子空间Riesz基, 此外还有$X = \overline{X_1 \oplus X_2}$;

ii) 如果本征投影是一致有界的, 即

$$\sup \| E(\lambda_k, \mathcal{A}) \| < \infty, (k \geqslant 1),$$

那么有$\mathcal{D}(\mathcal{A}) \subset X_1 \oplus X_2 \subset X$;

iii) 空间X有直和分解$X = X_1 \oplus X_2$ 的充要条件是本征投影的部分和列一致有界, 即

$$\sup \|\sum_{k=1}^{n} E(\lambda_k, \mathcal{A})\| < \infty, n \geqslant 1.$$

作为上面定理8的应用以及前面已有的谱的分布及渐近表示, 有下面的结果.

定理 9 算子$\mathcal{A}$如定义, 假定$\alpha_1 \neq \mu m_1, \beta_1 \neq$

m_2 那么存在$\mathcal{A}$的一列广义本征向量, 它们构成全空间$\mathcal{H}$的一个Riesz基. 从而系统是指数稳定的.

注 1 从本文的结果看, 如果在原系统中只加一个力控制, 此时$\beta_1 = 0$, 相应闭环系统的谱$\sigma(\mathcal{A})$有两条渐近线

$$\Re\lambda = \frac{1}{2m_1\ell}\ln\left|\frac{\mu m_1 - \alpha_1}{\mu m_1 + \alpha_1}\right|, \Re\lambda = -\frac{\gamma}{2\alpha m_2^2},$$

系统也能达到指数稳定.

参考文献(References):

[1] COWIN S C, NUNZIATO J W. Linear elastic materials with voids[J]. *J of Elasticity,* 1983, 13(2): 125 – 147.

[2] NUNZIATO J W, COWIN S C. A nonlinear theory of elastic matericals with voids[J]. *Arch Rational Mech Anal*, 1979, 72(2): 175 – 201.

[3] COWIN S C. The viscoelastic behavior of linear elastic matericals with viods[J]. *J of Elasticity,* 1985, 15(2): 185 – 191.

[4] CIARLETTA M, IESAN D. *Non-classical Elastic Solids*[M]. New York: Longnan Scientific & Technical, 1993.

[5] QUINTANILLA R. Slow dacay for one-dimensional Porous dissipation elasticity[J]. *Appl Math Letters*, 2003, 16(4): 487 – 491.

[6] PAZY A. *Semigroup of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*[M]. New York: Springer, 1983.

[7] LYUBICH Y I, PHÓNG V Q. Asymptotic stability of linear differential equations in banach spaces[J]. *Studia Math*, 1988, 88: 34 – 37.

[8] VU Q P, WANG J M, XU G Q, et al. Spectral analysis and system of fundamental solutions for timoshenko beams[J]. *Applied Mathematics Letter*, 2005, 18(2): 127 – 134.

[9] XU G Q, FENG D X. Riesz basis property of a Timoshenko beam with boundary feedback and application[J]. *IMA J of Applied Mathematics*, 2002, 67(4): 357 – 370.

[10] XU G Q, YUNG S P. Stabilization of Timoshenko beam by means of pointwise controls[J]. *ESAIM Control Optim Calc Var*, 2003, 9: 579 – 600.

[11] XU G Q, FENG D X, YUNG S P. Riesz basis property of the generalized eigenvector system of a Timoshenko beam[J]. *IMA J of Mathematical Control and Information*, 2004, 21(1): 65 – 83.

[12] SHUBOV M A. Asymptotic and spectral analysis of the spatially nonhomogeneous Timoshenko beam model[J]. *Math Nachr*, 2002, 241(1): 125 – 162.

[13] XU G Q, YUNG S P. The expansion of a semigroup and a Riesz basis criterion[J]. *J of Differentail Equations*, 2005, 210(1): 1 – 24.

[14] MENNICKEN R, MÖLLER M. Non-self-adjoint boundary eigenvalue probelm[M]// *Mathematics Studies*, Nederland: Elsevier Science, 2003, 192.

作者简介:

杜 燕 (1980—), 女, 研究生, 研究方向为分布参数系统控制, E-mail: duyan1210@yahoo.com.cn;

许跟起 (1959—), 男, 教授, 博士生导师, 研究方向有分布参数系统控制、线性算子谱理论、系统的稳定性分析等, E-mail: gqxu@tju.edu.cn.

网站开通公告

《控制理论与应用》(中、英文刊)网站经调试现正式开通. 新的网址为http://www.jcta.ac.cn.

2008年开始, 作者投稿、专家评审、编辑管理及读者阅览均在新网站上在线进行. 如果您在使用过程中遇到问题, 欢迎反馈给编辑部. 对《控制理论与应用》中、英文刊有什么意见和建议, 欢迎批评指正.

2008年以前投本刊的稿件仍在旧系统中, 不移至新系统, 因此2008年1月1日以前投本刊的稿件请登录旧系统查询或致电、E-mail给编辑部询问, 如有不便之处敬请谅解.

编辑部电话: 020-87111464, E-mail: aukzllyy@scut.edu.cn.

《控制理论与应用》编辑部