

一类高阶非线性不确定系统自适应稳定控制

孙宗耀, 刘允刚

(山东大学 控制科学与工程学院, 山东 济南 250061)

摘要: 研究了一类高阶非线性不确定性系统的自适应稳定控制设计问题. 因该系统的非线性程度高, 其控制系数不等同、符号已知、但数值未知, 故在此之前其稳定控制设计问题没有得到解决. 本文应用自适应技术, 结合设计参数的适当选取, 从而得到了设计该类非线性系统状态反馈稳定控制器的新方法, 并基于反推技术, 给出了稳定控制器的设计步骤. 所设计的状态反馈控制器使得闭环系统的状态全局渐近收敛于零, 其余闭环信号一致有界. 最后通过一个仿真例子说明了控制设计方法的有效性.

关键词: 高阶非线性系统; 状态反馈; 自适应控制; 反推方法

中图分类号: TP273 **文献标识码:** A

Adaptive stabilizing control for a class of high-order nonlinear uncertain systems

SUN Zong-yao, LIU Yun-gang

(School of Control Science and Engineering, Shandong University, Jinan Shandong 250061, China)

Abstract: The adaptive stabilizing control design is investigated for a class of high-order nonlinear uncertain systems with inherent nonlinearities and nonidentical unknown control coefficients with known signs. A new approach to design the state-feedback stabilizing controller is developed for this class of nonlinear systems by employing adaptive technique with suitable choice of the design parameters. The systematic design procedure for the stabilizing controller is also addressed by utilizing the backstepping technique. The designed state-feedback controller guarantees that the states of the closed-loop systems globally asymptotically converge to zero and all other closed-loop signals are uniformly bounded. Finally, a simulation example is given to illustrate the effectiveness of the proposed control scheme.

Key words: high-order nonlinear systems; state-feedback; adaptive control; the backstepping technique

1 引言(Introduction)

非线性系统的稳定控制设计是当前控制理论研究的热点问题^[1~3]. 自著名的反馈线性化条件^[3]得到以来, 反推方法的引入是另一大突破性进展^[4]. 对于严格反馈非线性系统, 或者可以反馈等价成严格反馈形式的非线性系统, 这种方法为构造一般性的全局稳定控制器提供了一种工具. 自20世纪90年代以来, 反推设计方法通过与其他技术相结合, 如非线性阻尼、调节函数、MT滤波器、神经网络、Nussbaum函数等, 在严格反馈系统控制的各个方面取得了丰硕研究成果^[2,4~15].

作为严格反馈系统控制的新近发展, Lin Wei 及其合作者系统地研究了一类称之为高阶非线性系统的稳定控制问题和输出跟踪问题^[9~13], 进而发展了传统的反推控制设计方法. 有必要指出的是, 在 Lin

Wei 及其合作者所取得的成果中都是假定控制系数为1或者虽然未知但是下界被已知正常数(或光滑函数)所界定. 一个自然且很有意义的问题是 **P**:

当高阶非线性系统的控制系数仅符号已知而无上下界信息时, 如何设计稳定控制?

据作者所知, 该问题一直未曾得到研究和解决. 作者已经在文[15]研究了问题 **P** 的一个特殊情况, 即所研究的系统的控制系数 d_i 等同、符号已知、无其上下界信息, 且 $\phi_i \equiv 0, i = 1, \dots, n-1, \phi_n \neq 0$. 在该文中, 尽管所研究的系统具有不确定性, 即控制系数未知, 但没有采用自适应技术, 而是仅仅通过选取适当的设计参数, 从而设计出了全局稳定控制器. 本文将要研究的是问题 **P** 的一个另外一个特殊情况, 即所研究系统的 d_i 不等同、符号已知、无其上下界信息, 且 $\phi_i \equiv 0, i = 1, \dots, n-1,$

$\phi_n \neq 0$. 显然该特殊情况较文 [15] 中所研究系统的更一般. 因控制系数未知、不等同, 将不可避免地采用自适应技术. 本文所得到的结果将为问题 **P** 的解决提供更多的可供参考的方法和手段.

本文综合应用传统积分反推设计方法^[5]和最近发展起来的增加幂次反推设计方法^[9], 研究了系统控制系数未知但符号已知条件下的状态反馈自适应稳定控制设计问题. 通过对所给系统作适当变形, 利用自适应技术、灵活的代数手段以及逐步修正算法的反推设计技术, 构造性地给出了状态反馈自适应稳定控制器的设计过程, 并且对所设计的控制器的性能进行了分析, 从而得到闭环系统状态渐近稳定、其余闭环信号一致有界的结论.

2 系统模型与控制目标(System model and control objective)

考虑如下高阶非线性不确定性控制系统:

$$\begin{cases} \dot{x}_i = d_i x_{i+1}^p, & i = 1, \dots, n-1, \\ \dot{x}_n = d_n u^p, \end{cases} \quad (1)$$

其中: $x = [x_1, \dots, x_n]^\top \in \mathbb{R}^n$ 是系统的状态向量, 初值 $x(0) = x_0$; $u \in \mathbb{R}$ 是系统的控制输入; $p \in \mathbb{N}$ 是正奇数; $d_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$ 为不等同、符号已知, 但数值未知的非零常数, 称之为系统 (1) 的控制系数.

本文目标是设计光滑的状态反馈自适应控制器:

$$\begin{cases} \dot{\hat{\theta}} = \mu(x, \hat{\theta}), \\ u = \eta(x, \hat{\theta}), \end{cases} \quad (2)$$

使得系统 (1) 的状态全局渐近稳定, 其他闭环信号均一致有界. 此处 $\mu, \eta \in \mathbb{C}^\infty$, $\hat{\theta}$ 为相应的未知参数向量 θ 的估计, 其具体定义将在下节给出.

3 自适应稳定控制(Adaptive stabilizing control)

首先应用反推设计技术, 构造性地给出状态反馈自适应控制器的设计步骤. 然后结合 Barbălat 引理, 分析闭环系统的稳定性, 得到闭环系统状态全局渐近稳定, 其余闭环信号一致有界的结论.

3.1 反推设计(Backstepping design)

控制器的设计开始于如下定义的状态变换:

$$\begin{cases} z_1 = x_1, \\ z_2 = x_2 - \alpha_1(x_1), \\ z_i = x_i - \alpha_{i-1}(x_{[i-1]}), & i = 3, 4, \dots, n, \end{cases} \quad (3)$$

其中

$$\begin{aligned} \hat{\Theta}_i &= [\hat{\theta}_{21}, \hat{\theta}_{22}, \hat{\theta}_{31}, \hat{\theta}_{32}, \dots, \hat{\theta}_{i1}, \hat{\theta}_{i2}]^\top \in \mathbb{R}^{2i-2}, \\ i &= 2, 3, \dots, n \end{aligned}$$

是未知参数

$$\begin{aligned} \Theta_i &= [\theta_{21}, \theta_{22}, \theta_{31}, \theta_{32}, \dots, \theta_{i1}, \theta_{i2}]^\top := \\ &[|d_1|, \frac{1}{|d_2|}, |d_2|, \frac{1}{|d_3|}, \dots, |d_{i-1}|, \frac{1}{|d_i|}]^\top \in \mathbb{R}^{2i-2}, \\ i &= 2, 3, \dots, n \end{aligned}$$

的估计; α_i , $i = 1, \dots, n-1$ 是待定的光滑函数, 称之为虚拟控制.

为了方便起见, 约定 $\alpha_0 = 0$, $z_{n+1} = 0$ 以及 $\alpha_n = u(x, \hat{\Theta}_n)$ 为实际控制. 此处 α_i , $i = 1, \dots, n$ 在原点保持平衡性, 即: $\alpha_1(0) = \alpha_2(0_{[2]}, 0_{[2]}) = \dots = \alpha_n(0_{[n]}, 0_{[2n-2]}) = 0$.

在新坐标 $z = [z_1, \dots, z_n]^\top$ 下, 系统 (1) 转化为:

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = d_1(\alpha_1^p + \sum_{i=1}^p C_p^i z_2^i \alpha_1^{p-i}), \\ \dot{z}_2 = d_2(\alpha_2^p + \sum_{i=1}^p C_p^i z_3^i \alpha_2^{p-i}) - d_1 \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} x_2^p, \\ \dot{z}_k = d_k(\alpha_k^p + \sum_{i=1}^p C_p^i z_{k+1}^i \alpha_k^{p-i}) - \frac{\partial \alpha_{k-1}}{\partial \hat{\Theta}_{k-1}} \dot{\hat{\Theta}}_{k-1} - \\ \sum_{i=1}^{k-1} d_i \frac{\partial \alpha_{k-1}}{\partial x_i} x_{i+1}^p, & k = 3, 4, \dots, n, \end{cases} \quad (4)$$

其中 $C_p^i = \frac{p!}{i!(p-i)!}$, $i = 0, 1, \dots, p$, 且约定 $0! = 1$.

需指出的是, 要实现系统 (1) 的既定稳定控制目标, 只要确保变换后的系统 (4) 具有相应的稳定控制目标即可. 为了保持匀称性, 将控制器的反推设计过程放在了文后的附录中. 从而分 n 步构造性地给出了使系统 (4) 状态渐近稳定、其余闭环信号一致有界的控制器 u .

注 1 在附录中的状态反馈自适应控制器的设计过程中, 采用了反推的设计方法, 并通过调节函数技术避免了过参数估计现象的出现.

注 2 有必要指出的是, 为简单起见, 在附录中的设计过程中, 所给出的参数估计的自适应律的增益固定不变, 即为“1”. 但是在实际应用中, 往往要求自适应律的增益可调节以改善系统的性能. 为此, 可在修改已有结果(A37)的基础上得到如下具有可调节增益的自适应律:

$$\begin{cases} \dot{\hat{\theta}}_{j1} = \gamma_{j1} \sigma_{j1, n+1-j}, & j = 2, 3, \dots, n, \\ \dot{\hat{\theta}}_{j2} = \gamma_{j2} \sigma_{j2, j}, & j = 2, 3, \dots, n-1, \\ \dot{\hat{\theta}}_{n2} = \gamma_{n2} \tau_{n21} (x_n - \alpha_{n-1})^{p+1}, \end{cases} \quad (5)$$

其中 $\gamma_{j1} > 0$, $\gamma_{j2} > 0$, $j = 2, 3, \dots, n$ 为相应未知参数估计自适应律的增益.

3.2 主要结果(Main results)

本文的主要结论如下:

定理 1 考虑 n 维高阶非线性控制系统 (1), 其控制系数不等同、符号已知、但数值未知. 按照附录所给出的反推设计步骤, 最终可设计得到光

滑的状态反馈自适应控制器 $u(x, \hat{\Theta}_n)$, 见 (A36) 及 (A37). 该控制器不但在原点处保持平衡性, 而且使得闭环系统状态全局渐近稳定, 其它闭环信号一致有界.

证 由状态反馈控制器 u 的表达式 (A36), 易验证该控制器在原点处保持平衡性. 以下证明闭环系统的所有信号的一致有界性和状态 x 渐近稳定性.

由 (A38) 以及 V_n 的定义, 可直接得到状态向量 z 和 $\tilde{\Theta}_n$ 的一致有界性以及 $\int_0^\infty \|z(t)\|^{p+1} dt < \infty$. 由 $\hat{\Theta}_n = \Theta_n - \tilde{\Theta}_n$, 可得 $\hat{\Theta}_n$ 的一致有界性, 进而由 (3) 及 α_i 的光滑性, 易证 x 为一致有界的. 这意味着闭环系统所有信号 (包括控制输入 u) 都是一致有界的. 由此及 α_i 和 $\hat{\Theta}_n$ 的光滑性知 $\dot{z}_i$ 是一致有界性的. 进而由著名的 Barbalat 引理, 可得 $\lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = 0$. 由此及 z 的定义 $x_1 = z_1$ 知 x_1 为渐近稳定的. 假设 $[x_1, \dots, x_{i-1}]^\top$ 为渐近稳定的, 其中 $i = 2, 3, \dots, n$. 那么由 α_{i-1} 的光滑性, $\hat{\Theta}_n$ 的一致有界性, 且 $\alpha_{i-1}(0_{[i-1]}, \hat{\Theta}_{i-1}) = 0$ 易知 $x_i = z_i + \alpha_{i-1}(x_{[i-1]}, \hat{\Theta}_{i-1})$ 及 $[x_1, \dots, x_i]^\top$ 为渐近稳定的. 因此, 由归纳法, $x = [x_1, \dots, x_n]^\top$ 为渐近稳定.

证毕.

注 3 上面的控制器的设计方法还可以进行推广, 用来研究如下较系统 (1) 更为一般的高阶非线性不确定性控制系统:

$$\begin{cases} \dot{x}_i = d_i x_{i+1}^p, & i = 1, \dots, n-1, \\ \dot{x}_n = d_n(u^p + f(t, x)), \end{cases}$$

其中 $f: [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 为已知的连续函数, 且 $f(t, 0_{[n]}) = 0, \forall t \in [0, \infty)$. 按照上面提到的控制器的设计方法, 可以构造出连续时变状态反馈控制器.

4 仿真算例 (Simulation example)

考虑如下二阶非线性不确定性系统:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = d_1 x_2^3, \\ \dot{x}_2 = d_2 u^3, \end{cases} \quad (6)$$

其中: $x = [x_1, x_2]^\top$ 是系统的状态向量; d_1 和 d_2 为符号已知, 但数值未知的非零常数. 在此仿真算例中, 选择 $d_1 = 10, d_2 = -5$.

令 $z_1 = x_1, z_2 = x_2 - \alpha_1(x_1)$, 其中 α_1 为待定光滑函数. 参照第3节及附录所给出的设计步骤, 得到 $\alpha_1 = -x_1, \hat{\theta}_{21}$ 和 $\hat{\theta}_{22}$ 的自适应律:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\theta}}_{21} &= \gamma_{21} f_2 (x_2 - \alpha_1)^4, \\ \dot{\hat{\theta}}_{22} &= \gamma_{22} f_2 \hat{\theta}_{21} (x_2 - \alpha_1)^4, \end{aligned}$$

以及光滑的、在原点 ($x_{[2]} = 0_{[2]}, \hat{\theta}_{21} = 0, \hat{\theta}_{22} = 0$) 处保持平衡性的状态反馈自适应控制器:

$$u(x, \hat{\theta}_{21}, \hat{\theta}_{22}) = z_2 (1 + f_2 \sqrt{1 + \hat{\theta}_{21}^2 \hat{\theta}_{22}^2})^{\frac{1}{3}},$$

$$\text{其中 } f_2 = 1 + \sum_{i=0}^2 \frac{(i+1)C_3^i}{4\varepsilon_2^{\frac{i+1}{2}}} + \sum_{i=1}^3 \frac{iC_3^i}{4\varepsilon_2^{\frac{i}{2}}}.$$

此处 $\gamma_{21} = 0.09, \gamma_{22} = 0.09$ 分别为相应自适应律的增益; $\varepsilon_2 = \frac{1}{2}$ 为设计参数.

根据定理1可知所设计的状态反馈自适应控制器使得系统 (6) 的状态全局渐近稳定, 其余信号一致有界. 如下图1显示了当闭环系统初值为 $x_1(0) = -1.5, x_2(0) = 3, \hat{\theta}_{21}(0) = 10, \hat{\theta}_{22}(0) = 0.2$ 时闭环系统的动态行为, 并验证了本文方法的有效性和结论的正确性. 从图2可以看到: 闭环系统的状态从初始时刻开始在较短的时间内迅速衰减到平衡点附近, 例如, 状态 x_1 在 $[0, 10]$ 内从 -1.5 衰减到 -0.05 . 但是, 此后闭环系统状态的衰减速度很慢, 例如, 状态 x_1 在 $[10, 50]$ 内从 -0.05 衰减到 -0.02 . 该现象说明闭环系统虽渐近稳定但非指数稳定.

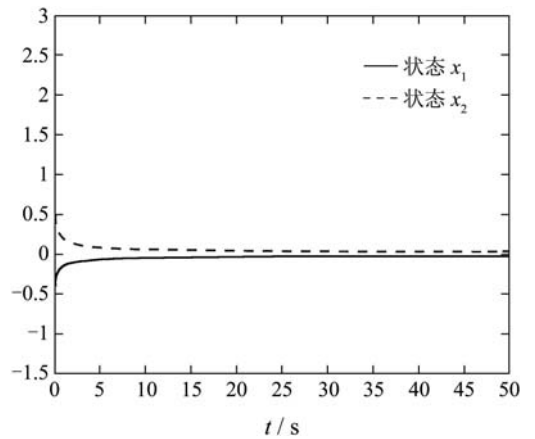


图1 状态 x_1 和 x_2 的轨迹

Fig. 1 The trajectories of the states x_1 and x_2

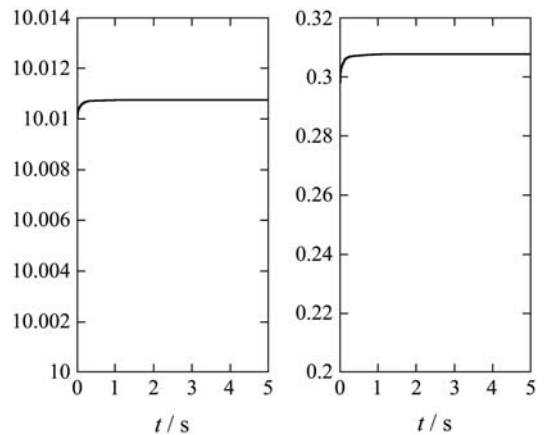


图2 参数估计 $\hat{\theta}_{21}$ 和 $\hat{\theta}_{22}$ 的轨迹

Fig. 2 The trajectories of the parameter estimates $\hat{\theta}_{21}$ and $\hat{\theta}_{22}$

参考文献(References):

- [1] ARTSTEIN Z. Stabilizations with relaxed controls[J]. *Nonlinear Analysis*, 1983, 7(11): 1163 – 1173.
- [2] EZAL K, PAN Z, KOKOTOVIC P V. Locally optimal backstepping design[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2000, 45(2): 260 – 271.
- [3] ISIDORI A. *Nonlinear Control Systems*[M]. 3rd ed. London: Springer-Verlag, 1995.
- [4] KANELAKOPOULOS I, KOKOTOVIC P V, MORSE S. Systematic design of adaptive controllers for feedback linearizable systems[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1991, 36(11): 1241 – 1253.
- [5] KRISTIC M, KANELAKOPOULOS I, KOKOTOVIC P V. *Nonlinear and Adaptive Control Design*[M]. New York: John Wiley and Sons, 1995.
- [6] ISIDORI A. *Nonlinear Control Systems II*[M]. New York: Springer-Verlag, 1999.
- [7] LIN W, QIAN C. Adding one power integrator: a tool for global stabilization of high-order lower-triangular systems[J]. *Systems & Control Letters*, 2000, 39(5): 339 – 351.
- [8] LIN W, QIAN C. Adaptive regulation of high-order lower-triangular systems: an adding a power integrator technique[J]. *Systems and Control Letters*, 2000, 39(5): 353 – 364.
- [9] QIAN C, LIN W. A continuous feedback approach to global strong stabilization of nonlinear systems[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2001, 46(7): 1061 – 1079.
- [10] QIAN C, LIN W. Practical output tracking of nonlinearly systems with uncontrollable unstable linearization[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2002, 47(1): 21 – 37.
- [11] LIN W, QIAN C. Adaptive control of nonlinear parameterized systems: the nonsmooth feedback framework[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2002, 47(5): 757 – 774.
- [12] LIN W, QIAN C. Adaptive control of nonlinear parameterized systems: the smooth feedback case[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2002, 47(8): 1249 – 1266.
- [13] QIAN C, LIN W. Recursive observer design, homogeneous approximation, and nonsmooth output feedback stabilization of nonlinear system[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2006, 51(9): 1457 – 1471.
- [14] 洪奕光, 王剑魁. 一类非线性系统的非光滑有限时间镇定[J]. 中国科学E辑, 2005, 35(6): 663 – 672.
(HONG Yiguang, WANG Jiankui. Non-smooth finite time stabilization for a class of nonlinear systems[J]. *Science in China Series E*, 2005, 35(6): 663 – 672.)
- [15] 孙宗耀, 刘允刚. 一类虚拟控制系数未知但等同高阶非线性系统的状态反馈稳定控制设计[J]. 自动化学报, 2007, 33(3): 331 – 334.
(SUN Zongyao, LIU Yungang. Stabilizing control design for a class of high-order nonlinear systems with unknown but identical control coefficients[J]. *Acta Automatica Sinica*, 2007, 33(3): 331 – 334.)

附录(Appendix):

该附录是本文的核心内容. 通过应用反推设计方法给出了状态反馈自适应控制器的设计步骤.

第 1 步 选择 $V_1(z_1) = \frac{1}{2}z_1^2$, 则沿着式(4)的所有可能解求 V_1 的导数, 得到

$$\dot{V}_1 = d_1 z_1 (\alpha_1^p + \sum_{i=1}^p C_p^i z_2^i \alpha_1^{p-i}). \quad (A1)$$

选择如下光滑的、在 $x_1 = 0$ 处为零的虚拟控制:

$$\alpha_1(x_1) = -z_1 \operatorname{sgn} d_1 = -x_1 \operatorname{sgn} d_1, \quad (A2)$$

并将其代入式(A1), 从而得到

$$\dot{V}_1 = -|d_1|z_1^{p+1} + d_1 \sum_{i=1}^p C_p^i z_2^i (-\operatorname{sgn} d_1)^{p-i} z_1^{p+1-i}. \quad (A3)$$

注 A1 显而易见, 如果 x_2 为实际控制 u , 即系统 (1) 为一阶系统, 从而可令 $z_2 = 0$, 那么由 (A3) 知 V_1 的导数负定, 即 z_1 渐近稳定. 如果 x_2 不是实际控制 u , 即系统 (1) 高于一阶, 则 $z_2 \neq 0$, 那么由于式 (A3) 右边存在正负未定项“ $d_1 \sum_{i=1}^p C_p^i z_2^i (-\operatorname{sgn} d_1)^{p-i} z_1^{p+1-i}$ ”, 所以不能得到子系统 z_1 渐近稳定或有界的结论. 关于该项的有效控制, 将在下面的设计步骤(即第2步)中通过选择恰当的虚拟控制 α_2 来实现.

第 2 步 令 $\tilde{\theta}_{21} = \theta_{21} - \hat{\theta}_{21}$ 和 $\tilde{\theta}_{22} = \theta_{22} - \hat{\theta}_{22}$. 选择 $V_2 = V_1 + \frac{1}{2}z_2^2 + \frac{1}{2}\tilde{\theta}_{21}^2 + \frac{|d_2|}{2}\tilde{\theta}_{22}^2$. 则沿着 (4) 的所有可能解求 V_2 的导数, 并将 (A3) 代入, 整理后得到:

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 = & -|d_1|z_1^{p+1} + d_2 z_2 \alpha_2^p + d_2 \sum_{i=1}^p C_p^i z_3^i \alpha_2^{p-i} z_2 - \tilde{\theta}_{21} \dot{\hat{\theta}}_{21} - \\ & |d_2| \tilde{\theta}_{22} \dot{\hat{\theta}}_{22} - d_1 \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} \sum_{i=0}^p C_p^i z_2^{i+1} (-\operatorname{sgn} d_1)^{p-i} z_1^{p-i} + \\ & d_1 \sum_{i=1}^p C_p^i z_2^i (-\operatorname{sgn} d_1)^{p-i} z_1^{p+1-i}. \end{aligned} \quad (A4)$$

要实现上式各项的稳定控制, 需首先估计 (A4) 右边最后两项的光滑上界. 如此, 利用 **Young's** 不等式, 并由 (A2) 易知: $\frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} = -\operatorname{sgn} d_1$, 分别得到如下两估计:

$$\begin{aligned} -d_1 \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} \sum_{i=0}^p C_p^i z_2^{i+1} (-\operatorname{sgn} d_1)^{p-i} z_1^{p-i} \leq \\ |d_1| \left(1 + \sum_{i=0}^{p-1} \frac{(i+1)C_p^i}{(p+1)\varepsilon_2^{\frac{p+1}{i+1}}} \right) z_2^{p+1} + \\ |d_1| \sum_{i=0}^{p-1} \frac{(p-i)\varepsilon_2^{\frac{p+1}{p-i}} C_p^i}{p+1} z_1^{p+1}, \end{aligned} \quad (A5)$$

$$\begin{aligned} z_2^i (-\operatorname{sgn} d_1)^{p-i} z_1^{p+1-i} \leq \\ \frac{i}{(p+1)\varepsilon_2^{\frac{p+1}{i}}} z_2^{p+1} + \frac{(p+1-i)\varepsilon_2^{\frac{p+1}{p+1-i}}}{p+1} z_1^{p+1}, \end{aligned} \quad (A6)$$

其中设计参数 ε_2 大于零且小于等于 $(\frac{p+1}{4 \sum_{i=1}^p (p+1-i)C_p^i})^{\frac{1}{p+1}}$

和 $(\frac{p+1}{4 \sum_{i=0}^{p-1} (p-i)C_p^i})^{\frac{1}{p+1}}$ 之间最小值, 由此易知 $\varepsilon_2 < 1$.

为简便起见, 约定 $f_1 = 0$, 并分别定义:

$$\begin{cases} f_2 = n - 2 + \sum_{i=0}^{p-1} \frac{(i+1)C_p^i}{(p+1)\varepsilon_2^{\frac{p+1}{i+1}}} + \sum_{i=1}^p \frac{iC_p^i}{(p+1)\varepsilon_2^{\frac{p+1}{i}}}, \\ c_{21} = \sum_{i=0}^{p-1} \frac{(p-i)\varepsilon_2^{\frac{p+1}{p-i}} C_p^i}{p+1} + \sum_{i=1}^p \frac{(p+1-i)\varepsilon_2^{\frac{p+1}{p+1-i}} C_p^i}{p+1}. \end{cases} \quad (A7)$$

易于验证设计参数 ε_2 使得 $0 < c_{21} \leq \frac{1}{2}$.

将(A5)(A6)和(A7)代入(A4), 且在不等式右边加减“ $-(|d_2| + (n-2)(|d_1| + 2))z_2^{p+1}$ ”, 整理后得到

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 \leq & -\frac{|d_1|}{2} z_1^{p+1} - (|d_2| + (n-2)(|d_1| + 2)) z_2^{p+1} - \tilde{\theta}_{21} \dot{\theta}_{21} - \\ & |d_2| \tilde{\theta}_{22} \dot{\theta}_{22} + d_2 \sum_{i=1}^p C_p^i z_3^i \alpha_2^{p-i} z_2 + |d_2| (\alpha_2^p \operatorname{sgn} d_2 + \\ & z_2^p (1 + f_2 \theta_{21} \theta_{22} + 2(n-2) \theta_{22})) z_2. \end{aligned} \quad (\text{A8})$$

在上式中用到 $|d_2| \theta_{22} = 1$. 进一步应用 $\theta_{21} \theta_{22} = \hat{\theta}_{21} \hat{\theta}_{22} + \frac{\tilde{\theta}_{21}}{|d_2|} + \hat{\theta}_{21} \tilde{\theta}_{22}$, 可以得到:

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 \leq & -\frac{|d_1|}{2} z_1^{p+1} - (|d_2| + (n-2)(|d_1| + 2)) z_2^{p+1} + \\ & d_2 \sum_{i=1}^p C_p^i z_3^i \alpha_2^{p-i} z_2 + \tilde{\theta}_{21} (f_2 z_2^{p+1} - \dot{\theta}_{21}) + \\ & |d_2| \tilde{\theta}_{22} ((f_2 \hat{\theta}_{21} + 2(n-2)) z_2^{p+1} - \dot{\theta}_{22}) + \\ & |d_2| (\alpha_2^p \operatorname{sgn} d_2 + z_2^p (1 + f_2 \hat{\theta}_{21} \hat{\theta}_{22} + \\ & 2(n-2) \hat{\theta}_{22})) z_2. \end{aligned} \quad (\text{A9})$$

下面通过选择虚拟控制 $\alpha_2(x_{[2]}, \hat{\Theta}_2)$, 来实现上式右边最后一项的有效控制, 即使得该项等于或小于零.

如果选择 α_2 为如下形式:

$$\alpha_2 = \operatorname{sgn} d_2 (-(x_2 - \alpha_1)(g_2'(\hat{\Theta}_2))^{\frac{1}{p}}), \quad (\text{A10})$$

其中 $g_2' = 1 + f_2 \hat{\theta}_{21} \hat{\theta}_{22} + 2(n-2) \hat{\theta}_{22}$. 这样的选取使得(A9)右边最后一项为零. 但是, 由于 $(g_2')^{\frac{1}{p}}, p > 1$ 不是连续可导函数, 从而 α_2 也不是连续可导的函数, 故这样的选择将导致后面的设计步骤无法进行下去. 鉴于此, 可参照 g_2' 得到 $g_2(\hat{\Theta}_2)$:

$$g_2 = 1 + f_2 \sqrt{1 + \hat{\theta}_{21}^2 \hat{\theta}_{22}^2} + 2(n-2) \sqrt{1 + \hat{\theta}_{22}^2},$$

并约定 $g_1 = 1$. 显而易见, $g_2^{\frac{1}{p}}, p \geq 1$ 是光滑函数, 且 $z_2^{p+1} g_2 \geq z_2^{p+1} g_2'$. 由此可选择如下光滑的、在原点处为零的虚拟控制 α_2 :

$$\alpha_2(x_{[2]}, \hat{\Theta}_2) = \operatorname{sgn} d_2 (-(x_2 - \alpha_1) g_2^{\frac{1}{p}}), \quad (\text{A11})$$

且易于验证该虚拟控制实现了使得(A9)右边倒数第1项小于或等于零的既定目标.

将(A11)和(A13)代入(A9), 整理后得到:

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 \leq & -\frac{|d_1|}{2} z_1^{p+1} - (|d_2| + (n-2)(|d_1| + 2)) z_2^{p+1} + \\ & \tilde{\theta}_{21} (\sigma_{211} - \dot{\theta}_{21}) + |d_2| \tilde{\theta}_{22} (\sigma_{221} - \dot{\theta}_{22}) + \\ & d_2 \sum_{i=1}^p C_p^i z_3^i g_2^{\frac{p-i}{p}} (-\operatorname{sgn} d_2)^{p-i} z_2^{p-i+1}, \end{aligned} \quad (\text{A12})$$

其中 σ_{211} 和 σ_{221} 由下式定义, 并称之为调节函数^[5]

$$\begin{cases} \sigma_{211} = \tau_{211} (x_2 - \alpha_1)^{p+1}, \tau_{211} = f_2, \\ \sigma_{221} = \tau_{221} (\hat{\theta}_{21}) (x_2 - \alpha_1)^{p+1}, \tau_{221} = f_2 \hat{\theta}_{21} + 2n - 4. \end{cases} \quad (\text{A13})$$

由 f_2 的定义式(A7)易知 τ_{211} 为常数, σ_{211} , σ_{221} 和 τ_{221} 是光滑函数.

为了使读者更好地理解下面的设计步骤, 本文给出了如下3个注记:

注A2 有必要指出的是, 在导出(A8)时在不等式右边进行了加减项“ $-(|d_2| + (n-2)(|d_1| + 2)) z_2^{p+1}$ ”的处理. 其中正定项通过选取虚拟控制 α_2 和自适应律实现有效控制. 负定项给 z_2 留有充分的“稳定裕度”以控制在剩余设计步骤中将要出现的某些以 z_2^{p+1} 为因子的项. 又因为在随后的每一设计步骤中, 都将出现 $(|d_1| + 2) z_2^{p+1}$, 且此后还有 $n-2$ 步.

注A3 如果 x_3 是实际控制 u , 可令 $z_3 = 0$, 那么为了消除 $\dot{V}_2$ 的估计式(A12)中含有 $\tilde{\theta}_{21}$, $\tilde{\theta}_{22}$ 的项, 可选择自适应律 $\dot{\hat{\theta}}_{21} = \sigma_{211}$, $\dot{\hat{\theta}}_{22} = \sigma_{221}$. 如此由(A12), 可以得到 V_2 的导数为负定的. 这意味着子系统 z_1, z_2 全局渐近稳定. 如果 x_3 不是实际控制 u , 则 $z_3 \neq 0$. 显然, 假如已经选定 $\hat{\theta}_{21}$ 和 $\hat{\theta}_{22}$ 的自适应律, 则在随后设计步骤(即第3步)再次出现的以 $\tilde{\theta}_{21}$ 和 $\tilde{\theta}_{22}$ 为因子的项将没有办法实现有效的控制. 对这样的问题, 通常的处理方法是把 σ_{211} , σ_{221} 看作调节函数, 并保留估计式(A12)中含有 $\tilde{\theta}_{21}$ 和 $\tilde{\theta}_{22}$ 的项留待后用. 如果已知某步的随后设计步骤中不再出现以 $\tilde{\theta}_{21}$ (或 $\tilde{\theta}_{22}$) 为因子的项, 那么就可在该步给出 $\hat{\theta}_{21}$ (或 $\hat{\theta}_{22}$) 的自适应律. 从下面的设计中可以看出, 在第3步起到最后一步中, 都将出现含有 $\tilde{\theta}_{21}$ 的项, 因此 $\hat{\theta}_{21}$ 的自适应律应在最后一步给出, 而含有 $\tilde{\theta}_{22}$ 的项仅出现在第2和第3步中, 因此在第3步就能够给出 $\hat{\theta}_{22}$ 的自适应律. 在下面的设计步骤还将涉及到其它未知参数的自适应律的设计问题, 但因处理方法类似, 不再详细论述.

注A4 式(A12)右边最后一项正负未定, 它的有效控制将在随后设计步骤(即第3步)中通过选择恰当的虚拟控制 α_3 来实现.

第 k ($k = 3, 4, \dots, n-1$) 步: 假设前 $k-1$ 步已经设计完毕, 且第 $k-1$ 步的 Lyapunov 候选函数 $V_{k-1}(z_{[k-1]}, \hat{\Theta}_{k-1})$ 满足如下不等式:

$$\begin{aligned} \dot{V}_{k-1} \leq & -\sum_{i=1}^{k-1} \frac{|d_i|}{2^{k-1-i}} z_i^{p+1} - (n-k+1) \sum_{i=1}^{k-2} |d_i| z_{i+1}^{p+1} - \\ & 2(n-k+1) z_2^{p+1} - \sum_{i=3}^{k-1} (i+1)(n-k+1) z_i^{p+1} + \\ & \sum_{j=2}^{k-1} \tilde{\theta}_{j1} (\sigma_{j1,k-j} - \dot{\theta}_{j1}) + |d_{k-1}| \tilde{\theta}_{k-1,2} \times \\ & (\sigma_{k-1,21} - \dot{\theta}_{k-1,2}) + \sum_{i=3}^{k-1} \sum_{j=2}^{i-1} z_i \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial \hat{\theta}_{j1}} (\sigma_{j1,k-j} - \\ & \dot{\theta}_{j1}) + d_{k-1} \sum_{i=1}^p C_p^i g_{k-1}^{\frac{p-i}{p}} z_k^i (-\operatorname{sgn} d_{k-1})^{p-i} z_{k-1}^{p-i+1}. \end{aligned} \quad (\text{A14})$$

其中

$$\begin{aligned} \tilde{\Theta}_{k-1} = & [\theta_{21} - \hat{\theta}_{21}, \theta_{22} - \hat{\theta}_{22}, \theta_{31} - \hat{\theta}_{31}, \theta_{32} - \hat{\theta}_{32}, \dots, \\ & \theta_{k-1,1} - \hat{\theta}_{k-1,1}, \theta_{k-1,2} - \hat{\theta}_{k-1,2}]^\top \in \mathbb{R}^{2k-4}; \end{aligned}$$

对 $j = 2, 3, \dots, k-1$, 调节函数 $\sigma_{j1,k-j}$ 和 $\sigma_{k-1,21}$ 分别为:

$$\begin{cases} \sigma_{j1,k-j} = \sigma_{j1,k-1-j} + \tau_{j1,k-j} z_{k-1}^{p+1}, \\ \sigma_{k-1,21} = \tau_{k-1,21} z_{k-1}^{p+1}; \end{cases} \quad (\text{A15})$$

相应未知参数估计的自适应律分别为

$$\dot{\theta}_{j2} = \sigma_{j22} =: \tau_{j21} z_j^{p+1} + \tau_{j22} z_{j+1}^{p+1}; \quad (\text{A16})$$

对 $j = 3, 4, \dots, k-1$, 相应的虚拟控制律分别为

$$\alpha_j(x_{[j]}, \hat{\theta}_j) = \text{sgn } d_j (-x_j - \alpha_{j-1}) g_j^{\frac{1}{p}}, \quad (\text{A17})$$

并且在 (A14)~(A17) 中的 $g_j, \tau_{j1,k-j}, \tau_{j21}, \tau_{j22}, \tau_{k-1,21}$ 是有适当定义的光滑函数。

令 $\tilde{\theta}_{k1} = \theta_{k1} - \hat{\theta}_{k1}$, $\tilde{\theta}_{k2} = \theta_{k2} - \hat{\theta}_{k2}$. 选择 $V_k = V_{k-1} + \frac{1}{2} z_k^2 + \frac{1}{2} \tilde{\theta}_{k1}^2 + \frac{|d_k|}{2} \tilde{\theta}_{k2}^2$. 则沿着 (4) 的所有可能解求 V_k 的导数并将 (A14) 代入, 得到:

$$\begin{aligned} \dot{V}_k \leq & - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{|d_i|}{2^{k-1-i}} z_i^{p+1} - (n-k+1) \sum_{i=1}^{k-2} |d_i| z_{i+1}^{p+1} - \\ & 2(n-k+1) z_2^{p+1} - \sum_{i=3}^{k-1} (i+1)(n-k+1) z_i^{p+1} + \\ & \sum_{j=2}^{k-1} \tilde{\theta}_{j1} (\sigma_{j1,k-j} - \dot{\theta}_{j1}) - \tilde{\theta}_{k1} \dot{\theta}_{k1} - |d_k| \tilde{\theta}_{k2} \dot{\theta}_{k2} + \\ & |d_{k-1}| \tilde{\theta}_{k-1,2} (\sigma_{k-1,21} - \dot{\theta}_{k-1,2}) + d_k z_k \alpha_k^p + \\ & d_k \sum_{i=1}^p C_p^i z_{k+1}^i \alpha_k^{p-i} z_k - z_k \sum_{i=1}^{k-1} d_i \frac{\partial \alpha_{k-1}}{\partial x_i} x_{i+1}^p + \\ & \sum_{i=3}^{k-1} \sum_{j=2}^{i-1} z_i \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial \hat{\theta}_{j1}} (\sigma_{j1,k-j} - \dot{\theta}_{j1}) - \\ & z_k \sum_{j=2}^{k-1} \left(\frac{\partial \alpha_{k-1}}{\partial \hat{\theta}_{j1}} \dot{\theta}_{j1} + \frac{\partial \alpha_{k-1}}{\partial \hat{\theta}_{j2}} \dot{\theta}_{j2} \right) + \\ & d_{k-1} \sum_{i=1}^p C_p^i g_{k-1}^{\frac{p-i}{p}} z_k^i (-\text{sgn } d_{k-1})^{p-i} z_{k-1}^{p-i+1}. \end{aligned} \quad (\text{A18})$$

类似于前面的分析方法, 首先 (A18) 右边倒数第 1 项满足:

$$\begin{aligned} g_{k-1}^{\frac{p-i}{p}} z_k^i (-\text{sgn } d_{k-1})^{p-i} z_{k-1}^{p-i+1} \leq \\ \frac{i g_{k-1}^{\frac{p-i}{p}} z_k^{\frac{p+1}{i}}}{(p+1) \varepsilon_k^{\frac{p+1}{i}}} z_k^{p+1} + \frac{(p+1-i) \varepsilon_k^{\frac{p+1}{p+1-i}}}{p+1} z_{k-1}^{p+1}, \end{aligned} \quad (\text{A19})$$

其中 $\varepsilon_k > 0$ 是设计参数, 在本文中其将在如下范围内取值:

$$0 < \varepsilon_k \leq \left(\frac{p+1}{4 \sum_{i=1}^p (p+1-i) C_p^i} \right)^{\frac{1}{p+1}}. \quad (\text{A20})$$

其次 (A18) 右边倒数第 4 项满足:

$$\begin{aligned} -z_k \sum_{i=1}^{k-1} d_i \frac{\partial \alpha_{k-1}}{\partial x_i} x_{i+1}^p \leq \\ \sum_{i=1}^{k-1} |d_i| \left| \frac{\partial \alpha_{k-1}}{\partial x_i} \right| (|g_i| z_i^p z_k + \\ |z_{i+1}^p z_k| + \sum_{j=1}^{p-1} C_p^j g_i^{\frac{p-j}{p}} |z_i^{p-j} z_{i+1}^j z_k|) \leq \\ \sum_{i=1}^{k-1} |d_i| (\omega_{ki1} |z_i^p z_k| + \omega_{ki2} |z_{i+1}^p z_k|), \end{aligned} \quad (\text{A21})$$

其中, 对 $i = 1, \dots, k-1$, 定义

$$\begin{cases} \omega_{ki1} := g_i \sqrt{1 + \left(\frac{\partial \alpha_{k-1}}{\partial x_i} \right)^2} + \sum_{j=1}^{p-1} C_p^j \frac{p-j}{p}, \\ \omega_{ki2} := \sqrt{1 + \left(\frac{\partial \alpha_{k-1}}{\partial x_i} \right)^2} + \sum_{j=1}^{p-1} \frac{j C_p^j (g_i)^{\frac{p-j}{p}}}{p} \times \\ \quad \left(\sqrt{1 + \left(\frac{\partial \alpha_{k-1}}{\partial x_i} \right)^2} \right)^{\frac{p}{j}}. \end{cases}$$

易知, ω_{ki1} 和 ω_{ki2} 是非负的、光滑函数。

式 (A21) 并没有得到 (A18) 右边倒数第四项的光滑上界估计. 为了得到其光滑的上界估计, 再次应用 **Young's** 不等式, 对 $i = 1, \dots, k-1$, 得到

$$\omega_{ki1} |z_i^p z_k| \leq \frac{\omega_{ki1}^{p+1}}{(p+1) \varepsilon_{ki1}^{p+1}} z_k^{p+1} + \frac{p \varepsilon_{ki1}^{\frac{p+1}{p}}}{p+1} z_i^{p+1}, \quad (\text{A22})$$

对 $i = 1, \dots, k-2$, 得到

$$\omega_{ki2} |z_{i+1}^p z_k| \leq \frac{\omega_{ki2}^{p+1}}{(p+1) \varepsilon_{ki2}^{p+1}} z_k^{p+1} + \frac{p \varepsilon_{ki2}^{\frac{p+1}{p}}}{p+1} z_{i+1}^{p+1}, \quad (\text{A23})$$

其中 $\varepsilon_{ki1}, i = 1, \dots, k-1, \varepsilon_{kj2} > 0, j = 1, \dots, k-2$ 是设计参数. 这些设计参数在本文中将在如下范围内取值:

$$\begin{cases} 0 < \varepsilon_{ki1} \leq \left(\frac{p+1}{2^{k-i} p} \right)^{\frac{p}{p+1}}, & i = 1, \dots, k-2, \\ 0 < \varepsilon_{k,k-1,1} \leq \left(\frac{p+1}{4p} \right)^{\frac{p}{p+1}}, \\ 0 < \varepsilon_{ki2} \leq \left(\frac{p+1}{p} \right)^{\frac{p}{p+1}}, & i = 1, \dots, k-2. \end{cases} \quad (\text{A24})$$

并定义如下得光滑函数:

$$\begin{cases} r_{ki} = \frac{1}{p+1} \left(\frac{\omega_{ki1}^{p+1}}{\varepsilon_{ki1}^{p+1}} + \frac{\omega_{ki2}^{p+1}}{\varepsilon_{ki2}^{p+1}} \right), & i = 1, \dots, k-2, \\ r_{k,k-1} = \omega_{k,k-1,2} + \frac{\omega_{k,k-1,1}^{p+1}}{(p+1) \varepsilon_{k,k-1,1}^{p+1}}. \end{cases} \quad (\text{A25})$$

将 (A22)~(A25) 代入 (A21), 整理后可得:

$$\begin{aligned} -z_k \sum_{i=1}^{k-1} d_k \frac{\partial \alpha_{k-1}}{\partial x_i} x_{i+1}^p \leq \\ \left(\sum_{i=1}^{k-2} |d_i| r_{ki} + |d_{k-1}| r_{k,k-1} \right) z_k^{p+1} + \\ \sum_{i=1}^{k-1} |d_i| \frac{p \varepsilon_{ki1}^{\frac{p}{p+1}}}{p+1} z_i^{p+1} + \sum_{i=2}^{k-1} |d_{i-1}| \frac{p \varepsilon_{k,i-1,2}^{\frac{p}{p+1}}}{p+1} z_i^{p+1} \leq \\ |d_{k-1}| (r_{k,k-1} + \sum_{i=2}^{k-1} r_{ki} \sqrt{1 + \hat{\theta}_{i1}^2 \hat{\theta}_{k-1,2}^2}) z_k^{p+1} + \\ \sum_{i=2}^{k-1} \tilde{\theta}_{i1} r_{ki} z_k^{p+1} + |d_{k-1}| \tilde{\theta}_{k-1,2} \sum_{i=2}^{k-1} \hat{\theta}_{i1} r_{ki} z_k^{p+1} + \\ \sum_{i=1}^{k-1} |d_i| \frac{p \varepsilon_{ki1}^{\frac{p}{p+1}}}{p+1} z_i^{p+1} + \sum_{i=2}^{k-1} |d_{i-1}| \frac{p \varepsilon_{k,i-1,2}^{\frac{p}{p+1}}}{p+1} z_i^{p+1}. \end{aligned} \quad (\text{A26})$$

针对 $j = 2, 3, \dots, k-1$, 分别定义如下调节函数:

$$\begin{cases} \sigma_{j1,k+1-j} = \sigma_{j1,k-j} + r_{kj} z_k^{p+1} =: \\ \sigma_{j1,k-j} + \tau_{j1,k+1-j} z_k^{p+1}, \\ \sigma_{k-1,22} = \sigma_{k-1,21} + \sum_{i=1}^{k-2} \hat{\theta}_{i1} r_{ki} z_k^{p+1} =: \\ \tau_{k-1,21} z_{k-1}^{p+1} + \tau_{k-1,22} z_k^{p+1}. \end{cases} \quad (\text{A27})$$

利用 Young's 不等式以及 σ_{j02} 的表达式, 可以得到:

$$\begin{aligned} -z_k \sum_{j=2}^{k-1} \frac{\partial \alpha_{k-1}}{\partial \hat{\theta}_{j1}} \sigma_{j1,k+1-j} \leq \\ \bar{f}_k z_k^{p+1} + \frac{p}{p+1} \sum_{j=2}^{k-1} \sum_{i=1}^{k-j} z_{i+j-1}^{p+1}, \end{aligned} \quad (\text{A28})$$

以及

$$\begin{aligned} -z_k \sum_{j=2}^{k-1} \frac{\partial \alpha_{k-1}}{\partial \hat{\theta}_{j2}} \sigma_{j22} \leq \\ \bar{f}_k z_k^{p+1} + \frac{p}{p+1} \sum_{j=2}^{k-2} (z_j^{p+1} + z_{j+1}^{p+1}) + \frac{p}{p+1} z_{k-1}^{p+1}. \end{aligned} \quad (\text{A29})$$

其中 $\bar{f}_k, \bar{f}_k$ 均是光滑非负函数. 同时注意到如下不等式:

$$\begin{aligned} -\sum_{i=3}^{k-1} \sum_{j=2}^{i-1} \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial \hat{\theta}_{j1}} \tau_{j1,k+1-j} z_i z_k^{p+1} \leq \\ z_k^{p+1} \sum_{i=3}^{k-1} \sqrt{1 + z_i^2 \left(\sum_{j=2}^{i-1} \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial \hat{\theta}_{j1}} \tau_{j1,k+1-j} \right)^2}. \end{aligned} \quad (\text{A30})$$

定义函数 $f_k, \bar{f}_k$ 和常数 $c_{ki}, \bar{c}_{ki}$:

$$\begin{cases} f_k = n - k + r_{k,k-1} + \sum_{i=1}^p C_p^i \frac{g_{k-1}^{p-i} z_i^{p+1}}{(p+1)\varepsilon_k^{\frac{p+1}{i}}} + \\ \sum_{i=2}^{k-1} r_{ki} \sqrt{1 + \hat{\theta}_{i1}^2 \hat{\theta}_{k-1,2}^2}, \\ \bar{f}_k = \sum_{i=3}^{k-1} \sqrt{1 + z_i^2 \left(\sum_{j=2}^{i-1} \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial \hat{\theta}_{j1}} \tau_{j1,k+1-j} \right)^2} + \\ \bar{f}_k + \bar{f}_k, \\ c_{ki} = \frac{p \varepsilon_{ki1}^{p+1}}{p+1}, \quad i = 1, \dots, k-2, \\ c_{k,k-1} = \frac{p}{p+1} \varepsilon_{k,k-1,1}^{p+1} + \sum_{i=1}^p C_p^i \frac{(p+1-i) \varepsilon_k^{\frac{p+1}{p+1-i}}}{p+1}, \\ \bar{c}_{ki} = \frac{p}{p+1} \varepsilon_{k,i-1,2}^{p+1}, \quad i = 2, 3, \dots, k-1. \end{cases} \quad (\text{A31})$$

易见, $f_k, \bar{f}_k > 0$ 光滑, 而 $c_{ki} > 0, i = 1, \dots, k-2, \bar{c}_{ki} > 0, i = 2, 3, \dots, k-1$ 以及 $c_{k,k-1} > 0$ 分别依赖于设计参数 $\varepsilon_{ki1}, \varepsilon_{k,i-1,2}$ 和 $\varepsilon_k, \varepsilon_{k,k-1,1}$. 由于 $\varepsilon_k, \varepsilon_{ki1}$ 和 ε_{ki2} 的取值分别满足 (A20) 和 (A24), 因此易验证: $c_{ki} \leq \frac{1}{2^{k-i}}, i = 1, \dots, k-1, \bar{c}_{ki} \leq 1, i = 2, 3, \dots, k-1$.

如前面所阐述的那样, 未知参数 $\theta_{k-1,2}$ 的估计 $\hat{\theta}_{k-1,2}$ 的自适应律可在本步设计, 即:

$$\dot{\hat{\theta}}_{k-1,2} = \sigma_{k-1,22} =: \tau_{k-1,21} z_{k-1}^{p+1} + \tau_{k-1,22} z_k^{p+1}. \quad (\text{A32})$$

如此将 (A19) 及 (A26)~(A32) 代入 (A18), 且在不等式右边加减 $-(|d_k| + (n-k)|d_{k-1}| + (k+1)(n-k))z_k^{p+1}$, 整理后得到:

$$\begin{aligned} \dot{V}_k \leq & -\sum_{i=1}^k \frac{|d_i|}{2^{k-i}} z_i^{p+1} - (n-k) \sum_{i=1}^{k-1} |d_i| z_{i+1}^{p+1} - \\ & 2(n-k) z_2^{p+1} - \sum_{i=3}^k (i+1)(n-k) z_i^{p+1} + \\ & \sum_{j=2}^{k-1} \bar{\theta}_{j1} (\sigma_{j1,k+1-j} - \dot{\hat{\theta}}_{j1}) + |d_k| \bar{\theta}_{k2} (\sigma_{k21} - \dot{\hat{\theta}}_{k2}) + \\ & \sum_{i=3}^k \sum_{j=2}^{i-1} z_i \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial \hat{\theta}_{j1}} (\sigma_{j1,k+1-j} - \dot{\hat{\theta}}_{j1}) + \\ & d_k \sum_{i=1}^p C_p^i z_{k+1}^i \alpha_k^{p-i} z_k + \bar{\theta}_{k1} (\sigma_{k11} - \dot{\hat{\theta}}_{k1}) + \\ & |d_k| z_k (\alpha_k^p \operatorname{sgn} d_k + (1 + f_k \hat{\theta}_{k1} \hat{\theta}_{k2} + \\ & (\bar{f}_k + (k+1)(n-k)) \hat{\theta}_{k2}) z_k^p), \end{aligned} \quad (\text{A33})$$

其中 σ_{k11} 和 σ_{k21} 为如下定义的光滑的调节函数:

$$\begin{cases} \sigma_{k11} = f_k z_k^{p+1} =: \tau_{k11} z_k^{p+1}, \\ \sigma_{k21} = (f_k \hat{\theta}_{k1} + (k+1)(n-k) + \bar{f}_k) z_k^{p+1} =: \tau_{k01} z_k^{p+1}. \end{cases}$$

在本步中要设计适当的虚拟控制 $\alpha_k(x_{[k]}, \hat{\Theta}_k)$ 以实现 (A33) 右边最后一项的有效控制. 如下 α_k 可达此目标:

$$\alpha_k = \operatorname{sgn} d_k (-(x_k - \alpha_{k-1})(g_k(z_{[k]}, \hat{\Theta}_k))^{\frac{1}{p}}), \quad (\text{A34})$$

其中

$$g_k = 1 + f_k \sqrt{1 + \hat{\theta}_{k1}^2 \hat{\theta}_{k2}^2} + (\bar{f}_k + (k+1)(n-k)) \sqrt{1 + \hat{\theta}_{k2}^2}.$$

显然 $g_k > 0$ 是光滑函数, 因而 α_k 是光滑的虚拟控制.

将 (A34) 代入 (A33), 得到:

$$\begin{aligned} \dot{V}_k \leq & -\sum_{i=1}^k \frac{|d_i|}{2^{k-i}} z_i^{p+1} - (n-k) \sum_{i=1}^{k-1} |d_i| z_{i+1}^{p+1} - \\ & 2(n-k) z_2^{p+1} - \sum_{i=3}^k (i+1)(n-k) z_i^{p+1} + \\ & \sum_{j=2}^k \bar{\theta}_{j1} (\sigma_{j1,k+1-j} - \dot{\hat{\theta}}_{j1}) + |d_k| \bar{\theta}_{k2} (\sigma_{k21} - \dot{\hat{\theta}}_{k2}) + \\ & \sum_{i=3}^k \sum_{j=2}^{i-1} z_i \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial \hat{\theta}_{j1}} (\sigma_{j1,k+1-j} - \dot{\hat{\theta}}_{j1}) + \\ & d_k \sum_{i=1}^p C_p^i z_{k+1}^i g_k^{\frac{p-i}{p}} (-\operatorname{sgn} d_k)^{p-i} z_k^{p-i+1}. \end{aligned} \quad (\text{A35})$$

至此, 第 k 设计完毕.

第 n 步 第 k 步的结论当 $k = n$ 时仍然成立. 因此根据第 k 步的设计过程, 可容易地构造 $V_n(z, \hat{\Theta}_n), g_n(x, \hat{\Theta}_n)$, 其中 $\hat{\Theta}_n = [\hat{\Theta}_{n-1}^\top, \hat{\theta}_{n1}, \hat{\theta}_{n2}]^\top$, 选择设计参数 ε_n 和 $\varepsilon_{ni1}, \varepsilon_{nj2}, i = 1, \dots, n-1, j = 1, \dots, n-2$, 以及定义其它光滑函数, 并进而给出实际控制:

$$u = \alpha_n = \operatorname{sgn} d_n (-(x_n - \alpha_{n-1}) g_n^{\frac{1}{p}}), \quad (\text{A36})$$

(下转第56页)

- (HUANG Shoudao, Wang Yaonan, et al. Study of the control strategy on rotor field orientation for brushless doubly-fed machine[J]. *Trans of China Electrotechnical Society*, 2002, 17(2): 34 – 39.)
- [3] WILLIAMSON S, FERREIRA A C, WALLACE A. Generalised theory of the brushless doubly-fed machines, Part 1: analysis[J]. *IEEE Proc Electr Power Appl*, 1996, 144(2): 111 – 122.
- [4] WILLIAMSON S, BOGER M S. Impact of inter-bar current on the performance of the brushless doubly fed motor[J]. *IEEE Trans on Industry Applications*, 1999, 35(2): 435 – 460.
- [5] 张凤阁, 王凤翔, 王正. 不同转子结构无刷双馈电机稳态运行特性的对比实验研究[J]. 中国电机工程学报, 2002, 22(4): 52 – 55. (ZHANG Fengge, WANG Fengxiang, WANG Zheng. Comparative experiment study on the performance of doubly-fed brushless machine with different rotor structures[J]. *Proceedings of the CSEE*, 2002, 22(4): 52 – 55.)
- [6] 舒怀林. PID神经网络对强关联带时延多变量系统的解耦控制[J]. 控制理论与应用, 1998, 15(6): 920 – 924. (SHU Huailin. PID neural network for decoupling control of strong coupling multivariable time-delay systems[J]. *Control Theory & Applications*, 1998, 15(6): 920 – 924.)
- [7] SHU Huailin. PID neural network control for complex systems[C]//*Proc of the Int Conf on Computational Intelligence for Modeling, Control and Automation (ICCI'99)*. Vienna, Austria: IOS Press, 1999: 166 – 171.
- [8] SHU Huailin, PI Youguo. PID neural networks for time-delay systems[C]//*Proc of the 7th Symposium on Process Systems Engineering (SPSE'2000)*. Keystone, Colorado, USA: [s.n.], 2000: 859 – 862.
- [9] 舒怀林. PID神经网络多变量控制系统分析[J]. 自动化学报, 1999, 25(1): 105 – 111. (SHU Huailin. Analysis of PID neural network multivariable control systems[J]. *Acta Automatica Sinica*, 1999, 25(1): 105 – 111.)

作者简介:

郭红霞 (1982—), 女, 华南理工大学电力学院硕士研究生, 目前正在从事电力电子与电力传动研究;

杨金明 (1962—), 男, 博士, 华南理工大学电力学院副教授, 目前从事控制理论及其电气传动在新能源中的应用, E-mail: jmyang@scut.edu.cn;

刘文刚 (1981—) 男, 华南理工大学电力电子与电力传动专业硕士研究生, 研究方向为能源与动力系统下的电力电子技术及控制, E-mail: wengangliu123@163.com.

(上接第46页)

以及相应的未知参数估计的自适应律:

$$\begin{cases} \dot{\hat{\theta}}_{j1} = \sigma_{j1,n+1-j} = \sum_{i=1}^{n+1-j} \tau_{j1i} z_{i+j-1}^{p+1}, \\ \dot{\hat{\theta}}_{j2} = \sigma_{j22} = \tau_{j21} z_j^{p+1} + \tau_{j22} z_{j+1}^{p+1}, \\ \dot{\hat{\theta}}_{n2} = \tau_{n21} z_n^{p+1}, \end{cases} \quad (A37)$$

其中 $j = 2, 3, \dots, n-1$. 因在前面已经约定 $z_{n+1} = 0$, 所以实际控制(A36)和自适应律(A37)使得

$$\dot{V}_n \leq - \sum_{i=1}^n \frac{|d_i|}{2^{n-i}} z_i^{p+1}. \quad (A38)$$

至此, 控制器设计过程完毕.

作者简介:

孙宗耀 (1979—), 男, 2002年获聊城大学数学系学士学位, 2005年获曲阜师范大学运筹学与控制论专业硕士学位, 现为山东大学控制科学与工程学院博士研究生, 主要研究方向是非线性控制、自适应理论等, E-mail: sunzongyao@sohu.com;

刘允刚 (1970—), 男, 现为山东大学控制科学与工程学院教授, 博士生导师, 主要研究领域为随机控制、非线性系统分析、自适应控制等, E-mail: lygfr@sdu.edu.cn.

(上接第52页)

- [12] XIE X L, BENI G. A validity measure for fuzzy clustering[J]. *IEEE Trans on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 1991, 13(8): 841 – 847.

作者简介:

袁小芳 (1979—), 男, 博士研究生, 主要研究方向为智能控制

理论与应用、神经网络、优化计算等, E-mail: yuanxiaof@21cn.com;

王耀南 (1957—), 男, 教授, 博士生导师, 主要研究方向为智能控制理论与应用、模式识别与图像处理等, E-mail: yaonan@hnu.cn;

吴亮红 (1978—), 男, 博士研究生, 主要研究方向为智能优化算法理论与应用、智能机器人等, E-mail: lhwu@hnust.edu.cn.