第 25 卷第 1 期
2008 年 2 月

控 制 理 论 与 应 用
Control Theory & Applications

Vol. 25 No. 1
Feb. 2008

文章编号: 1000−8152(2008)01−0105−06

不确定系统的网络化保性能控制

唐 斌[1], 刘国平[1,2], 桂卫华[1]

(1. 中南大学 自信息科学与工程学院, 湖南 长沙 410083;

2. Department of Engineering, University of Glamorgan, Pontypridd CF37 1DL, UK)

摘要: 本文针对控制网络中存在着随机传输时延和数据包丢失的现象, 考虑了网络化控制系统的状态反馈保性能控制器设计问题.首先采用时滞相关方法并引入自由权矩阵, 给出了基于矩阵不等式的网络化二次型保性能控制器存在的充分条件, 然后基于该充分条件获得了基于线性矩阵不等式的控制器设计方法, 相应的网络化保性能控制律可以通过求解线性矩阵不等式来构造, 并采用锥互补线性化算法给出了网络化次优保性能控制器的设计方法.最后数值示例演示了所得控制器设计结果的应用方法和有效性, 并通过仿真比较了传统保性能控制器和网络化保性能控制器在网络化控制系统中的控制性能.

关键词: 网络化控制系统; 状态反馈; 保性能控制; 时滞相关方法; 线性矩阵不等式

中图分类号: TP273   **文献标识码**: A

Networked guaranteed cost control of uncertain systems

TANG Bin[1], LIU Guo-ping[1,2], GUI Wei-hua[1]

(1. School of Information Science and Engineering, Central South University, Changsha Hunan 410083, China;
2. School of Electronics, University of Glamorgan, Pontypridd CF37 1DL, UK)

Abstract: This paper is concerned with the problem of state-feedback guaranteed cost controller design for uncertain networked control systems with both network-induced delay and data dropout taken into consideration. First, the sufficient condition for the existence of the networked guaranteed quadratic cost controller is obtained in terms of matrix inequalities by employing the delay-dependent approach and introducing free weighting matrices. Then based on this sufficient condition, the controller design method is deduced in terms of linear matrix inequalities. The solution of the linear matrix inequalities can be used to construct the corresponding guaranteed cost control law. Furthermore the suboptimal networked guaranteed cost controller design method is obtained with cone complementarity linearization algorithm. Finally a numerical example demonstrates the application and effectiveness of the proposed controller design method. The control performance of the traditional guaranteed cost controller and the NCS are compared by simulations.

Key words: networked control system; state feedback; guaranteed cost control; delay-dependent approach; linear matrix inequality

1 引言(Introduction)

近年网络化控制系统(networked control systems, NCSs)的稳定性分析和控制器设计获得很多的关注[1~3]. 伴随着时滞相关方法有效性的提高[4,5], 文献[2, 3]采用时滞相关方法考虑了NCSs控制器设计问题. 作者对于NCSs中存在的网络诱导时延和数据包丢失, 提出了连续时间NCSs 模型, 基于时滞相关方法研究了具有无记忆特性的增益控制器设计方法, 大大减少了控制器对过去时刻反馈信号和控制信号的依赖, 节省了存储空间, 且网络诱导时延的最大容许值可以通过LMIs求解, 但是作者没有说明网络时延对闭环不确定系统指标的影响, 给出在各个控制律下闭环不确定系统的保性能指标.

不确定系统的保性能控制的目标是设计一个使得不确定系统鲁棒镇定且保证一定性能指标的控制器. 文献[6,7]研究了时滞无关的保性能控制器设计方法. 然而由于保性能指标依赖于系统的时滞, 因此时滞相关方法能够获得比时滞无关方法更好的保性能指标[8]. 文献[2,3]把时滞相关方法引入到NCSs的控制器设计和稳定性分析, 从而为不确定系统的网络化时滞相关保性能控制提供了重要参考. 然而NCSs本质上是一种混杂系统, 网络时延的特性不

收稿日期: 2006−01−09; 收修改稿日期: 2006−12−20.
基金项目: 博士点基金资助项目(20050533028); 国家自然科学基金重点资助项目(60634020).

同于传统连续时间系统或离散时间系统的时滞特性, 使得NCSs的保性能控制设计方法与传统的存在着一定的区别, 传统保性能控制器设计方法必须通过重新的评估才能应用于NCSs.

本文采用保性能控制的思想, 研究了基于连续时间模型的线性不确定性系统的网络化保性能控制器设计问题. 对于NCSs中存在的随机网络诱导时延和数据包丢失, 基于与文献[2,3]相似的连续时间系统描述模型, 采用时滞相关方法给出了基于LMI的无记忆保性能控制器存在的充分条件, 进而推导了网络化保性能控制器和次优保性能控制器的设计方法及其闭环保性能指标的求解方法, 通过数值实例验证了网络化保性能控制器设计方法的有效性, 通过仿真比较了考虑网络和不考虑网络时的二次型性能指标.

2 问题的描述(Problem description)

考虑如下线性不确定系统

$$\dot{x}(t)=[A+\Delta A(t)]x(t)+[B+\Delta B(t)]u(t). \tag{1}$$

其中: $x(t)\in\mathbb{R}^n$和$u(t)\in\mathbb{R}^m$分别是状态向量和控制输入向量, A和B是适当维数的常数矩阵, ΔA和ΔB表示参数的不确定性, 它们满足如下条件:

$$\begin{bmatrix}\Delta A(t)\ \Delta B(t)\end{bmatrix}=GF(t)\begin{bmatrix}E_a\ E_b\end{bmatrix}. \tag{2}$$

其中: G, E_a和E_b是适当维数的常数矩阵, $F(t)$是未知的时变矩阵, 在时间t上是Lebesque可观测的, 且满足

$$F^{\mathrm{T}}(t)F(t)\leqslant I. \tag{3}$$

假定NCS中的传感器是时间驱动的, 控制器和执行器是事件驱动的, 数据采用单包传输. 当存在随机网络诱导时延和数据包丢失时, 基于状态反馈的NCS模型为

$$\begin{aligned}\dot{x}(t)=&[A+\Delta A(t)]x(t)+[B+\Delta B(t)]u(t),\\&t\in[i_kh+\tau_k,i_{k+1}h+\tau_{k+1}),\end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned}u(t^+)=&Kx(t-\tau_k),\\&t\in\{i_kh+\tau_k,k=1,2,\cdots\},\end{aligned} \tag{5}$$

其中: h是采样周期, $i_k(k=1,2,3,\cdots)$是整数, 且$\{i_1,i_2,i_3,\cdots\}\subset\{0,1,2,3,\cdots\}$. τ_k表示i_kh时刻的采样信号作用到被控对象时的时延, 包括传感器到控制器的时延和控制器到执行器的时延. $\{i_1,i_2,i_3,\cdots\}=\{0,1,2,3,\cdots\}$意味着传输中没有数据包丢失, 否则表示发生了数据包丢失. 如果$i_{k+1}=i_k+1$, 表明$h+\tau_{k+1}>\tau_k$, 数据包的次序没有发生混乱. 显然, $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}[i_kh+\tau_k,i_{k+1}h+\tau_{k+1})=[t_0,\infty),t_0\geqslant 0$. 本文假定第1个控制信号到达被控对象之前$u(t)=0$.

假定存在一个常数$\eta>0$, 使得

$$(i_{k+1}-i_k)h+\tau_{k+1}\leqslant\eta,k=1,2,\cdots, \tag{6}$$

则对所有允许的不确定性, NCS的闭环系统模型

$$\begin{aligned}\dot{x}(t)=&[A+\Delta A(t)]x(t)+[B+\Delta B(t)]Kx(i_kh),\\&t\in[i_kh+\tau_k,i_{k+1}h+\tau_{k+1}),\end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned}x(t)=&\Phi(t,t_0-\eta)x(t_0-\eta)\triangleq\varphi(t),\\&t\in[t_0-\eta,t_0),\end{aligned} \tag{8}$$

其中$\dot{\Phi}(t,t_0-\eta)=[A+\Delta A(t)]\Phi(t,t_0-\eta),t\in[t_0-\eta,t_0)$.

定义系统的性能指标为

$$J=\int_{t_0}^{\infty}[x^{\mathrm{T}}(t)Rx(t)+u^{\mathrm{T}}(t)Su(t)]\mathrm{d}t, \tag{9}$$

其中R和S是给定的对称正定加权矩阵. 则闭环系统的性能指标为

$$\begin{aligned}J=&\int_{t_0}^{\infty}x^{\mathrm{T}}(t)Rx(t)\mathrm{d}t+\int_{t_0}^{\infty}u^{\mathrm{T}}(t)Su(t)\mathrm{d}t=\\&\int_{t_0}^{\infty}x^{\mathrm{T}}(t)Rx(t)\mathrm{d}t+\\&\sum_{k=1}^{\infty}\int_{i_kh+\tau_k}^{i_{k+1}h+\tau_{k+1}}x^{\mathrm{T}}(i_kh)K^{\mathrm{T}}SKx(i_kh)\mathrm{d}t.\end{aligned} \tag{10}$$

对于网络化保性能控制, 引入如下定义:

定义 1 考虑不确定性系统(1)和性能指标(9), 如果存在一个控制律$u^*(t)$和一个正的标量J^*, 使得对于所有允许的不确定性, 闭环系统(7)是指数渐近稳定的, 且闭环性能指标(10)满足$J\leqslant J^*$, 那么J^*是不确定系统(7)(8)的一个性能上界, $u^*(t)$是不确定性系统(1)的一个网络化保性能控制律.

3 主要结果(Main results)

定理 1 对于不确定系统(1), 性能指标(9)和给定标量η, 如果存在对称正定矩阵P和Q, 适当维数的任意矩阵N_i和$M_i(i=1,2,3)$, 使得对于所有满足式(3)的不确定性矩阵$F(t)$, 式(6)和如下不等式成立

$$\begin{bmatrix}\Xi_{11}+\mathrm{diag}\{R\ \ K^{\mathrm{T}}SK\ \ 0\} & *\\ \Xi_{21} & \Xi_{22}\end{bmatrix}<0, \tag{11}$$

其中:

$$\Xi_{11}=\begin{bmatrix}\Gamma_{11} & * & *\\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} & *\\ \Gamma_{31} & \Gamma_{32} & \Gamma_{33}\end{bmatrix},$$

$$\Xi_{21}=\begin{bmatrix}\eta N_1^{\mathrm{T}}\ \eta N_2^{\mathrm{T}}\ \eta N_3^{\mathrm{T}}\end{bmatrix},\Xi_{22}=\begin{bmatrix}-\eta Q\end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{11}=&N_1+N_1^{\mathrm{T}}-M_1[A+\Delta A(t)]-\\&[A+\Delta A(t)]^{\mathrm{T}}M_1^{\mathrm{T}},\end{aligned}$$

$$\Gamma_{21}=N_2-N_1^{\mathrm{T}}-M_2[A+\Delta A(t)]-K^{\mathrm{T}}[B+\Delta B(t)]^{\mathrm{T}}M_1^{\mathrm{T}},$$
$$\Gamma_{22}=N_2-N_2^{\mathrm{T}}-M_2[B+\Delta B(t)]K-K^{\mathrm{T}}[B+\Delta B(t)]^{\mathrm{T}}M_2^{\mathrm{T}},$$
$$\Gamma_{31}=P+N_3-M_3[A+\Delta A(t)]+M_1^{\mathrm{T}},$$
$$\Gamma_{32}=-N_3-M_3[B+\Delta B(t)]K+M_2^{\mathrm{T}},$$
$$\Gamma_{33}=\eta Q+M_3+M_3^{\mathrm{T}},$$

则控制器(5)是不确定系统(1)的网络化保性能控制器, 且闭环性能指标(10)满足

$$J^*=x^{\mathrm{T}}(t_0)Px(t_0)+\int_{-\eta}^{0}\int_{t_0+\theta}^{t_0}\dot\varphi^{\mathrm{T}}(s)Q\dot\varphi(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}\theta. \tag{12}$$

证　根据式(7)和公式$x(t)-x(i_kh)-\int_{i_kh}^{t}\dot x(s)\mathrm{d}s=0$, 对于适当维数的任意矩阵$N_i$和$M_i(i=1,2,3)$, 有

$$2\left[x^{\mathrm{T}}(t)N_1+x^{\mathrm{T}}(i_kh)N_2+\dot x^{\mathrm{T}}(t)N_3\right]\cdot[x(t)-x(i_kh)-\int_{i_kh}^{t}\dot x(s)\mathrm{d}s]=0, \tag{13}$$

$$2\left[x^{\mathrm{T}}(t)M_1+x^{\mathrm{T}}(i_kh)M_2+\dot x^{\mathrm{T}}(t)M_3\right]\cdot[-(A+\Delta A(t))x(t)-(B+\Delta B(t))Kx(i_kh)+\dot x(t)]=0. \tag{14}$$

选取Lyapunov泛函

$$V(t)=x^{\mathrm{T}}(t)Px(t)+\int_{-\eta}^{0}\int_{t+\theta}^{t}\dot x^{\mathrm{T}}(s)Q\dot x(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}\theta.$$

对于$t\in[i_kh+\tau_k,i_{k+1}h+\tau_{k+1})$, 沿(7)的轨迹求$V(t)$的时间导数, 并结合式(13)(14)可得

$$\begin{aligned}
&\dot V(t)=\\
&2x^{\mathrm{T}}(t)P\dot x(t)+\eta\dot x^{\mathrm{T}}(t)Q\dot x(t)-\int_{t-\eta}^{t}\dot x^{\mathrm{T}}(s)Q\dot x(s)\mathrm{d}s=\\
&2x^{\mathrm{T}}(t)P\dot x(t)+\eta\dot x^{\mathrm{T}}(t)Q\dot x(t)-\int_{t-\eta}^{t}\dot x^{\mathrm{T}}(s)Q\dot x(s)\mathrm{d}s+\\
&2e^{\mathrm{T}}(t)N[x(t)-x(i_kh)-\int_{i_kh}^{t}\dot x(s)\mathrm{d}s]+\\
&2e^{\mathrm{T}}(t)M[-(A+\Delta A(t))x(t)-\\
&(B+\Delta B(t))Kx(i_kh)+\dot x(t)]\leqslant\\
&2x^{\mathrm{T}}(t)P\dot x(t)+\eta\dot x^{\mathrm{T}}(t)Q\dot x(t)+\\
&2e^{\mathrm{T}}(t)N[x(t)-x(i_kh)]+\\
&2e^{\mathrm{T}}(t)M[-(A+\Delta A(t))x(t)-\\
&B+\Delta B(t))Kx(i_kh)+\dot x(t)]+\\
&\eta e^{\mathrm{T}}(t)NQ^{-1}N^{\mathrm{T}}e(t)+\int_{i_kh}^{\mathrm{t}}\dot x^{\mathrm{T}}Q\dot x(s)\mathrm{d}s-\\
&\int_{t-\eta}^{\mathrm{t}}\dot x^{\mathrm{T}}Q\dot x(s)\mathrm{d}s\leqslant e^{\mathrm{T}}(t)\varOmega e(t).
\end{aligned}$$

其中:

$$e^{\mathrm{T}}=[x^{\mathrm{T}}(t)\ \ x^{\mathrm{T}}(i_kh)\ \ \dot x^{\mathrm{T}}(t)],$$
$$N^{\mathrm{T}}=[N_1^{\mathrm{T}}\ \ N_2^{\mathrm{T}}\ \ N_3^{\mathrm{T}}],$$
$$M^{\mathrm{T}}=[M_1^{\mathrm{T}}\ \ M_2^{\mathrm{T}}\ \ M_3^{\mathrm{T}}],$$
$$\varOmega=\varXi_{11}+\eta NQ^{-1}N^{\mathrm{T}}.$$

根据式(11)和矩阵Schur补性质可得, 对于$t\in[i_kh+\tau_k,i_{k+1}h+\tau_{k+1})$,

$$\dot V(t)<e^{\mathrm{T}}(t)\mathrm{diag}\{-R\ \ -K^{\mathrm{T}}SK\ \ 0\}e(t)\leqslant 0, \tag{15}$$

进而对于$t\in[i_kh+\tau_k,i_{k+1}h+\tau_{k+1})$,

$$\dot V(t)\leqslant-\lambda\|x(t)\|^2-\lambda\|x(i_kh)\|^2,$$

其中$\lambda=\min\{\lambda_{\min}(R),\lambda_{\min}(K^{\mathrm{T}}SK)\}$. 定义一个新的函数$W(t)=e^{\varepsilon t}V(t)$, 采用与文[2]相似的分析方法, 可得闭环系统(7)是指数渐近稳定的.

从$i_kh+\tau_k$到$t\in[i_kh+\tau_k,i_{k+1}h+\tau_{k+1})$, 对式(15)两边积分可得

$$\begin{aligned}
&V(t)-V(i_kh+\tau_k)<\\
&-\int_{i_kh+\tau_k}^{t}x^{\mathrm{T}}(s)Rx(s)\mathrm{d}s-\\
&\int_{i_kh+\tau_k}^{t}x^{\mathrm{T}}(i_kh)K^{\mathrm{T}}SKx(i_kh)\mathrm{d}s,
\end{aligned}$$

由于$x(t)$对于时间t是连续的, 所以$V(t)$是连续的. 假设$t\in[i_lh+\tau_l,i_{l+1}h+\tau_{l+1})$, 其中$l$为正整数. 由$\bigcup\limits_{k=1}^{l}[i_kh+\tau_k,i_{k+1}h+\tau_{k+1})=[t_0,i_{l+1}h+\tau_{l+1})$可得

$$\begin{aligned}
&V(t)-V(t_0)\leqslant\\
&-\int_{t_0}^{t}x^{\mathrm{T}}(s)Rx(s)\mathrm{d}s-\\
&\sum_{k=1}^{l}\int_{i_kh+\tau_k}^{i_{k+1}h+\tau_{k+1}}x^{\mathrm{T}}(i_kh)K^{\mathrm{T}}SKx(i_kh)\mathrm{d}s,
\end{aligned}$$

当$l\to\infty$时, 可得

$$\begin{aligned}
&V(\infty)-V(t_0)\leqslant\\
&-\int_{t_0}^{\infty}x^{\mathrm{T}}(s)Rx(s)\mathrm{d}s-\\
&\sum_{k=1}^{\infty}\int_{i_kh+\tau_k}^{i_{k+1}h+\tau_{k+1}}x^{\mathrm{T}}(i_kh)K^{\mathrm{T}}SKx(i_kh)\mathrm{d}s,\\
&V(\infty)\to 0.
\end{aligned}$$

由此, 根据式(10)可得式(12). 定理1得证.

定理1给出了网络化保性能控制器存在的条件, 但是不等式(11)包含系统的时变不确定性参数$\Delta A(t)$ 和$\Delta B(t)$, 且是一个非线性矩阵不等式, 无法通过LMI求解. 因此基于定理1给出的保性能控制律的存在条件, 以下给出基于LMI的保性能控制律的设计方法.

定理 2 对于不确定系统(1), 性能指标(9), 和给定的标量$\rho_l(l=2,3)$和η, 如果存在对称正定矩阵$\tilde{P}$和$\tilde{Q}$, 非奇异矩阵$X=X^{\mathrm{T}}$, 矩阵Z, 适当维数的任意矩阵$\tilde{N}_i\ (i=1,2,3)$和一个标量$\varepsilon>0$, 使得式(6)和如下LMI成立:

$$\begin{bmatrix}\tilde{\Xi}_{11} & * \\ \tilde{\Xi}_{21} & \tilde{\Xi}_{22}\end{bmatrix}<0. \tag{16}$$

其中:

$$\tilde{\Xi}_{11}=\begin{bmatrix}\tilde{\Gamma}_{11} & * & * \\ \tilde{\Gamma}_{21} & \tilde{\Gamma}_{22} & * \\ \tilde{\Gamma}_{31} & \tilde{\Gamma}_{32} & \tilde{\Gamma}_{33}\end{bmatrix},$$

$$\tilde{\Xi}_{21}=\begin{bmatrix}\eta\tilde{N}_1^{\mathrm{T}} & \eta\tilde{N}_2^{\mathrm{T}} & \eta\tilde{N}_3^{\mathrm{T}} \\ E_aX^{\mathrm{T}} & E_bZ & 0 \\ X^{\mathrm{T}} & 0 & 0 \\ 0 & Z & 0\end{bmatrix},$$

$$\tilde{\Xi}_{22}=\mathrm{diag}\{-\eta\tilde{Q}\ \ -\varepsilon I\ \ -R^{-1}\ \ -S^{-1}\},$$

$$\tilde{\Gamma}_{11}=\tilde{N}_1+\tilde{N}_1^{\mathrm{T}}-AX^{\mathrm{T}}-XA^{\mathrm{T}}+\varepsilon GG^{\mathrm{T}},$$

$$\tilde{\Gamma}_{21}=\tilde{N}_2-\tilde{N}_1^{\mathrm{T}}-\rho_2AX^{\mathrm{T}}-Z^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}+\varepsilon\rho_2GG^{\mathrm{T}},$$

$$\tilde{\Gamma}_{22}=\tilde{N}_2-\tilde{N}_2^{\mathrm{T}}-\rho_2BZ-\rho_2Z^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}+\varepsilon\rho_2GG^{\mathrm{T}}\rho_2,$$

$$\tilde{\Gamma}_{31}=\tilde{P}+\tilde{N}_3-\rho_3AX^{\mathrm{T}}+X+\varepsilon\rho_3GG^{\mathrm{T}},$$

$$\tilde{\Gamma}_{32}=-\tilde{N}_3-\rho_3BZ+\rho_2X+\varepsilon\rho_3GG^{\mathrm{T}}\rho_2,$$

$$\tilde{\Gamma}_{33}=\eta\tilde{Q}+\rho_3X^{\mathrm{T}}+\rho_3X+\varepsilon\rho_3GG^{\mathrm{T}}\rho_3,$$

则控制器(5)是不确定系统(1)的网络化保性能控制器. 进而, 如果LMI(16)存在一组可行解$\tilde{P}$, $\tilde{Q}$, X, Z, $\tilde{N}_i(i=1,2,3)$和ε, 则网络化保性能控制律为

$$u^*(t^+)=X^{-\mathrm{T}}x(t-\tau_k),t\in\{i_kh+\tau_k,k=1,2,\cdots\}, \tag{17}$$

且闭环性能指标满足

$$J^*=x^{\mathrm{T}}(t_0)X^{-1}\tilde{P}X^{-\mathrm{T}}x(t_0)+\int_{-\eta}^{0}\int_{t_0+\theta}^{t_0}\dot{\varphi}^{\mathrm{T}}(s)X^{-1}\tilde{Q}X^{-\mathrm{T}}\dot{\varphi}(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}\theta. \tag{18}$$

证 定义

$$Y=\begin{bmatrix}Y_{11} & * & * \\ Y_{21} & Y_{22} & * \\ Y_{31} & Y_{32} & Y_{33}\end{bmatrix}+\mathrm{diag}\{R\ \ K^{\mathrm{T}}SK\ \ 0\},$$

其中:

$$Y_{11}=N_1+N_1^{\mathrm{T}}-M_1A-A^{\mathrm{T}}M_1^{\mathrm{T}},$$

$$Y_{21}=N_2-N_1^{\mathrm{T}}-M_2A-K^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}M_1^{\mathrm{T}},$$

$$Y_{22}=-N_2-N_2^{\mathrm{T}}-M_2BK-K^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}M_2^{\mathrm{T}},$$

$$Y_{31}=P+N_3-M_3A+M_1^{\mathrm{T}},$$

$$Y_{32}=-N_3-M_3BK+M_2^{\mathrm{T}},$$

$$Y_{33}=\eta Q+M_3+M_3^{\mathrm{T}}.$$

如果存在$\varepsilon>0$, 使得以下不等式成立

$$Y+\eta NQ^{-1}N^{\mathrm{T}}-\begin{bmatrix}M_1G \\ M_2G \\ M_3G\end{bmatrix}F\begin{bmatrix}E_a & E_bK & 0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}E_a & E_bK & 0\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}F^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}M_1G \\ M_2G \\ M_3G\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}<$$

$$Y+\eta NQ^{-1}N^{\mathrm{T}}+\varepsilon\begin{bmatrix}M_1G \\ M_2G \\ M_3G\end{bmatrix}\begin{bmatrix}M_1G \\ M_2G \\ M_3G\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}+\varepsilon^{-1}\begin{bmatrix}E_a & E_bK & 0\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}E_a & E_bK & 0\end{bmatrix}<0, \tag{19}$$

则根据矩阵的Schur性质, 矩阵不等式(11)成立. 进而根据矩阵的Schur性质, 式(19)等价于

$$\begin{bmatrix}\hat{\Xi}_{11}+\mathrm{diag}\{R\ \ K^{\mathrm{T}}SK\ \ 0\} & * \\ \hat{\Xi}_{21} & \hat{\Xi}_{22}\end{bmatrix}<0. \tag{20}$$

其中:

$$\hat{\Xi}_{11}=\begin{bmatrix}\hat{\Gamma}_{11} & * & * \\ \hat{\Gamma}_{21} & \hat{\Gamma}_{22} & * \\ \hat{\Gamma}_{31} & \hat{\Gamma}_{32} & \hat{\Gamma}_{33}\end{bmatrix},$$

$$\hat{\Xi}_{21}=\begin{bmatrix}\eta N_1^{\mathrm{T}} & \eta N_2^{\mathrm{T}} & \eta N_3^{\mathrm{T}} \\ E_a & E_bK & 0\end{bmatrix},$$

$$\hat{\Xi}_{22}=\mathrm{diag}\{-\eta Q\ \ -\varepsilon I\},$$

$$\hat{\Gamma}_{11}=N_1+N_1^{\mathrm{T}}-M_1A-A^{\mathrm{T}}M_1^{\mathrm{T}}\varepsilon M_1GG^{\mathrm{T}}M_1^{\mathrm{T}},$$

$$\hat{\Gamma}_{21}=N_2-N_1^{\mathrm{T}}-M_2A-K^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}M_1^{\mathrm{T}}+\varepsilon M_2GG^{\mathrm{T}}M_1^{\mathrm{T}},$$

$$\hat{\Gamma}_{22}=N_2-N_2^{\mathrm{T}}-M_2BK-K^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}M_2^{\mathrm{T}}+\varepsilon M_2GG^{\mathrm{T}}M_2^{\mathrm{T}},$$

$$\hat{\Gamma}_{31}=P+N_3-M_3A+M_1^{\mathrm{T}}+\varepsilon M_3GG^{\mathrm{T}}M_1^{\mathrm{T}},$$

$$\hat{\Gamma}_{32}=-N_3-M_3BK+M_2^{\mathrm{T}}+\varepsilon M_3GG^{\mathrm{T}}M_2^{\mathrm{T}},$$

$$\hat{\Gamma}_{33}=\eta Q+M_3+M_3^{\mathrm{T}}+\varepsilon M_3GG^{\mathrm{T}}M_3^{\mathrm{T}}.$$

定义$M_1=M_0$, $M_2=\rho_2M_0$, $M_3=\rho_3M_0$. 显然, 不等式(20)表明M_0是非奇异的. 式(20)两边分别左乘$\mathrm{diag}\{X,X,X,X,I,I,I,I\}$和右乘其转置, 其中$X=M_0^{-1}$, 利用矩阵的Schur性质并引入新的变量$\tilde{P}=XPX^{\mathrm{T}}$, $\tilde{Q}=XQX^{\mathrm{T}}$, $\tilde{N}_i=XN_iX^{\mathrm{T}}(i=1,2,3)$, $Z=KX^{\mathrm{T}}$, 可得LMI(16).

由式(11)易得式(17). 定理2得证.

注 1 定理2给出了基于LMI的网络化保性能控制器的设计方法, 相应的控制律和闭环保性能值可以通过求解LMIs获得.

以下考虑最优保性能控制律的设计问题, 该控制律使得闭环性能指标的上界J^*最小. 对于闭环性能

指标的上界(18), 由矩阵迹的性质可得

$$
\begin{aligned}
J^* = &\operatorname{tr}(x^{\mathrm T}(t_0)X^{-1}\tilde P X^{-\mathrm T}x(t_0)) + \\
&\operatorname{tr}(\int_{-\eta}^{0}\int_{t_0+\theta}^{t_0}\dot\varphi^{\mathrm T}(s)X^{-1}\tilde Q X^{-\mathrm T}\dot\varphi(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}\theta) = \\
&\operatorname{tr}(x(t_0)x^{\mathrm T}(t_0)X^{-1}\tilde P X^{-\mathrm T}) + \\
&\operatorname{tr}(\int_{-\eta}^{0}\int_{t_0+\theta}^{t_0}\dot\varphi(s)\dot\varphi^{\mathrm T}(s)X^{-1}\tilde Q X^{-\mathrm T}\mathrm{d}s\mathrm{d}\theta) = \\
&\operatorname{tr}(x(t_0)x^{\mathrm T}(t_0)X^{-1}\tilde P X^{-\mathrm T}) + \\
&\operatorname{tr}(\int_{-\eta}^{0}\int_{t_0+\theta}^{t_0}\dot\varphi(s)\dot\varphi^{\mathrm T}(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}\theta X^{-1}\tilde Q X^{-\mathrm T}).
\end{aligned}
$$

定义

$$
\begin{aligned}
&\varPhi_1 = x(t_0)x^{\mathrm T}(t_0),\\
&\varPhi_2 = \int_{-\eta}^{0}\int_{t_0+\theta}^{t_0}\dot\varphi(s)\dot\varphi^{\mathrm T}(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}\theta,
\end{aligned}
$$

则

$$J^* = \operatorname{tr}(\varPhi_1 X^{-1}\tilde P X^{-\mathrm T}) + \operatorname{tr}(\varPhi_2 X^{-1}\tilde Q X^{-\mathrm T}).$$

引入新的变量

$$W_1 = W_1^{\mathrm T}, W_2 = W_2^{\mathrm T},$$

并假定

$$X^{-1}\tilde P X^{-\mathrm T} < W_1, X^{-1}\tilde Q X^{-\mathrm T} < W_2,$$

由矩阵的Schur性质可得

$$\begin{bmatrix} W_1 & X^{-1}\\ X^{-\mathrm T} & \tilde P^{-1}\end{bmatrix} > 0, \begin{bmatrix} W_2 & X^{-1}\\ X^{-\mathrm T} & \tilde Q^{-1}\end{bmatrix} > 0. \tag{21}$$

综合上述, 对于不确定系统(1), 性能指标(9)和给定的标量η, ρ_2和ρ_3, 网络化最优保性能控制设计问题可以转化为以下最优问题

$$\min_{\mathscr A}\operatorname{tr}(V_1\tilde P + V_2\tilde Q + V_3 X)$$

使得

$$\varepsilon > 0, \tilde P > 0, \tilde Q > 0, W_1 > 0, W_2 > 0, (16), (21)$$

成立.

其中

$$\mathscr A = \varepsilon, \tilde P, \tilde Q, X, Z, \tilde N_i(i = 1,2,3), W_1, W_2.$$

以上优化问题是一个非凸优化问题, 以下考虑将该非凸优化问题转化为基于LMI的非线性最小化问题. 为此引入一个常数γ, 满足

$$\operatorname{tr}(\varPhi_1 W_1 + \varPhi_2 W_2)) < \gamma. \tag{22}$$

定理 3 对于不确定系统(1)和性能指标(9), 以及给定的标量η, ρ_2, ρ_3和$\gamma > 0$, 如果最优问题

$$\min_{\mathscr B}\operatorname{tr}(V_1\tilde P + V_2\tilde Q + V_3 X)$$

使得

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon > 0, \tilde P > 0, \tilde Q > 0, X < 0,\\
&W_j(j = 1,2) > 0, V_r(r = 1,2) > 0, V_3 < 0,\\
&(16), (22),\\
&\begin{bmatrix} W_1 & V_3\\ V_3^{\mathrm T} & V_1\end{bmatrix} > 0, \begin{bmatrix} W_2 & V_3\\ V_3^{\mathrm T} & V_2\end{bmatrix} > 0,\\
&\begin{bmatrix} V_1 & I\\ I & \tilde P\end{bmatrix} > 0, \begin{bmatrix} V_2 & I\\ I & \tilde Q\end{bmatrix} > 0, \begin{bmatrix} -V_3 & I\\ I & -X\end{bmatrix} > 0
\end{aligned}
$$

具有可行解ε, $\tilde P$, $\tilde Q$, X, Z, $\tilde N_i(i = 1,2,3)$, $W_j(j = 1,2)$和$V_r(r = 1,2,3)$, 则网络化保性能控制律(17)使得不确定系统的闭环保性能值的上界$J^* < \gamma$. 其中

$$
\begin{aligned}
\mathscr B = &\varepsilon, \tilde P, \tilde Q, X, Z, \tilde N_i(i = 1,2,3),\\
&W_1, W_2, V_r(r = 1,2,3).
\end{aligned}
$$

证 令$V_1 = \tilde P^{-1}$, $V_2 = \tilde Q^{-1}$, $V_3 = X^{-1}$, 采用cone complementarity linearization(CCL)算法易得定理3给出的具有LMIs约束的非线性最小化问题. 定理3得证.

4 数值示例(Numerical example)

考虑不确定系统(1)～(3), 其中系统的参数矩阵:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1\\ 0 & -0.1\end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0\\ 0.1\end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} 1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix},$$

$$E_a = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.1\\ 0.1 & 0.1\end{bmatrix}, E_b = \begin{bmatrix} 0.1\\ 0.1\end{bmatrix};$$

初始条件:

$$x_1(t) = \mathrm{e}^{t+1}, x_2(t) = 0, t \in [-\eta, 0];$$

性能指标的矩阵:

$$R = \begin{bmatrix} 0.5 & 0\\ 0 & 0.5\end{bmatrix}, S = 1;$$

采样周期$h = 0.1$ s.

当$\rho_2 = 0.2$, $\rho_3 = 0.45$时, 采用LMI方法求得$\eta_{\max} = 0.78$ s. 取$\eta = 0.5$ s, 由定理2求得式(5)中的控制器增益$K = \begin{bmatrix}-0.97659 & -1.6283\end{bmatrix}$, 相应的闭环保性能指标$J^* = 67.816$. 文献[7]的定理7.1.2给出了不考虑网络时延的传统连续时间系统的保性能控制器设计方法. 由该定理求得控制器增益$K = \begin{bmatrix}-0.99811 & -1.5006\end{bmatrix}$, 相应的闭环保性能指标$J^* = 54.212$. 由数值计算结果可知, 网络诱导时延降低了控制系统的性能, 传统保性能指标要优于网络化保性能指标.

图1所示为当网络时延为$\tau_k = \eta - h = 0.5 - 0.1 = 0.4$ s, $F = \operatorname{diag}\{\sin(0.1t) \ \sin(0.3t)\}$ 时不确定系统示例的传统保性能控制与网络化保性能控制的状态响应仿真曲线, 其中实线表示网络化保性能

控制, 点划线表示传统保性能控制. 由图1可知, 网络化保性能控制状态响应曲线具有更小的振荡, 因而在NCS中的保性能指标更优.

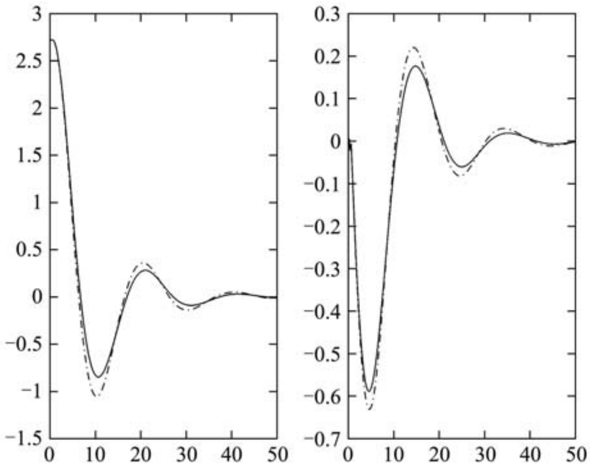

图 1 保性能控制状态响应仿真, 响应时间(s), $h=0.1, \eta=0.5$

Fig. 1 The state response simulation of guaranteed cost controls, response time (s), $h=0.1, \eta=0.5$

5 结论(Conclusion)

本文采用时滞相关方法, 首次研究了不确定性系统的网络化保性能控制问题.基于网络化控制系统的连续时间模型, 通过构造Lyapunov-Krasovskii泛函和引入自由权矩阵, 获得了无记忆网络化保性能控制器存在的充分条件和相应闭环系统的保性能, 并给出了网络化保性能控制器及其次优保性能控制器的设计方法, 数值实例表明了研究结果的有效性, 仿真结果表明了在NCS中网络化保性能控制相对于传统保性能控制的优越性.

参考文献(References):

[1] ZHANG W, BRANICKY M S, PHILLIPS S M. Stability of networked control systems[J]. *IEEE Control Systems Magazine*, 2001, 21(1) : 84 – 99.

[2] YUE D, HAN Q L, PENG C. State feedback controller design of networked control systems[J]. *IEEE Trans on Circuits and Systems*, 2004, 51(11): 640 – 644.

[3] YUE D, HAN Q L, JAMES L. Network-based robust control of systems with uncertainty[J]. *Automatica*, 2005, 41(6): 999 – 1007.

[4] 何勇, 吴敏. 多时变状态和控制时滞系统的绝对稳定性[J]. 控制理论与应用, 2004, 21(4): 595 – 598.
(HE Yong, WU Min. Absolute stability for Lurie control systems with time-varying delays in both state and control input[J]. *Control Theory & Applications*, 2004, 21(4): 595 – 598.)

[5] 何勇, 吴敏. 多时变时滞系统的鲁棒稳定及有界实引理的时滞相关条件[J]. 控制理论与应用, 2004, 21(5): 735 – 740.
(HE Yong, WU Min. Delay-dependent conditions for robust stability and bounded real lemma of systems with multiple time-varying delays[J]. *Control Theory & Applications*, 2004, 21(5): 735 – 740.)

[6] YU L, CHU J. LMI approach to guaranteed cost control of linear uncertain time-delay systems[J]. *Automatica*, 1999, 35(6): 1155 – 1159.

[7] 俞立. 鲁棒控制—线性矩阵不等式处理方法[M]. 北京: 清华大学出版社, 2002: 122 – 127, 174 – 183.
(YU Li. *Robust Control-Linear Matrix Inequality Approach*[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2002: 122 – 127, 174 – 183.)

[8] CHEN W H, GUAN Z H, LU X M. Delay-dependent output feedback guaranteed cost control for uncertain time-delay systems[J]. *Automatica*, 2004, 40(7): 1263 – 1268.

作者简介:

唐　斌　(1979—), 男, 博士生, 研究方向为网络化控制系统, E-mail: tangbin316@163.com;

刘国平　(1964—), 男, 教授, 博士生导师, 主要研究方向为网络化控制和工业燃料电池建模与控制等;

桂卫华　(1950—), 男, 教授, 博士生导师, 主要研究方向为工业大系统递阶和分散控制理论及应用、鲁棒控制、复杂生产过程建模与控制等.