文章编号: 1000−8152(2008)02−0210−07

基于分散动态补偿的矩形广义系统的正则化与镇定

张国山

(天津大学 电气与自动化工程学院, 天津 300072)

摘要: 采用代数方法研究基于分散动态补偿的矩形广义系统的正则化、无脉冲, 以及镇定问题. 首先给出了补偿后闭环系统正则与无脉冲的充要条件, 进而给出矩形广义系统能通过分散动态补偿镇定的充要条件. 这些条件涉及一系列简单不等式与等式是否存在正整数解问题. 所得结果揭示矩形系统及其动态补偿器的许多新的性质, 而且进一步说明对应方形系统与方形或矩形补偿器的结果仍是矩形系统结果的特例. 因而, 本文结果可以认为是方形系统相应结果的自然推广. 另外, 给出几个数字例子说明所得结果.

关键词: 矩形广义系统; 动态补偿; 正则化; 镇定

中图分类号: TP273　　　**文献标识码**: A

Regularization and stabilization of rectangular descriptor systems by decentralized dynamic compensation

ZHANG Guo-shan

(School of Electrical Engineering and Automation, Tianjin University, Tianjin 300072, China)

Abstract: An algebraic approach is proposed to study the problems of regularization, impulse-elimination and stabilization of rectangular descriptor systems by decentralized dynamic compensation. A necessary and sufficient condition for making the closed-loop system both regular and impulse-free is given first. Then, a necessary and sufficient condition to stabilize the closed-loop system by decentralized dynamic compensation is presented. The conditions involve a series of simple inequalities and equalities with solutions of positive integers, and the proposed results reveal some new properties of rectangular systems and their dynamic compensators. It further demonstrates that the results on square systems and square or rectangular compensators are the special cases of the corresponding ones on rectangular systems. Hence these results are natural generalization for that of square systems. Finally, some numerical examples are given to illustrate the results.

Key words: rectangular descriptor systems; dynamic compensation; regularization; stabilization.

1 引言(Introduction)

众所周知, 广义系统是比正常系统更自然的描述. 经过20余年的发展, 广义系统理论已经日趋成熟, 而且已经应用于越来越多的领域, 如经济系统、电力系统、电网络、模拟VLSI电路设计[1~4]等. 近年来, 人们开始注意到矩形广义系统或非正则广义系统的研究. 所谓矩形广义系统, 这里指系统状态方程个数与状态变量数不相等的系统, 即非方形广义系统. 当系统建模不完全, 部分未知或产生部分故障时, 其模型通常具有矩形的结构. 正则性与脉冲行为是研究广义系统包括矩形广义系统不可回避的两个基本问题, 由于矩形广义系统的非正则性, 其方程的解可能具有任意性(无穷多解)或矛盾性(无解), 因而该类系统不能直接应用于实际. 另一方面, 即使系统满足了正则性条件, 即其解存在且唯一, 脉冲行为也会使系统不能正常工作或破坏系统. 因此研究矩形广义系统应该首先解决这两个基本问题, 进而才能考虑系统的镇定以及其他设计问题. 在正则性、无脉冲性,以及脉冲模的研究方面, 已有许多研究结果[5~9]. 对于矩形广义系统的研究, 原有的关于广义系统的(脉冲)能控能观性等定义已不适用, 需要给出新的定义, 否则进一步的研究将受到限制. 因而文[10]给出了矩形系统无脉冲定义及脉冲能控能观性定义, 并利用这些定义证明矩形广义系统脉冲能控性(能观性)和存在消除脉冲的状态反馈增益(输出内射增益output injection gain)之间的等价性不成立. 文[11]进一步研究了这个问题, 该文对系统容许初始条件、脉冲模, 及无脉冲给出与文[10]不相矛盾

收稿日期: 2006−07−31; 收修改稿日期: 2007−04−05.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(60674019).

的更细致的定义, 并且对其相互关系进行了详细的讨论. 但是, 文[10,11]并没有解决矩形广义系统的正则性问题. 实际上对于矩形广义系统, 通过静态反馈补偿, 包括状态反馈, 输出反馈, 输出内射(output injection)等均不能使系统实现正则与无脉冲要求. 文[12]采用动态输出反馈补偿解决了这个问题, 给出了系统通过动态补偿实现正则与无脉冲的充要条件, 而且进一步考虑了极点配置问题. 文[13]研究了系统的镇定问题, 并给出基于动态补偿的矩形广义系统(脉冲)能控能观的新定义, 这些定义使矩形系统的研究更为方便, 而且所得结论与方形系统相应结论在形式上保持一致.

正常系统与广义系统分散控制问题的研究已有许多有意义的工作[14~21], 关于有限与脉冲分散固定模概念的提出[14,15]大大促进了分散控制理论的研究进展[16~20]. 近年来, 对广义分散控制系统的正则性与无脉冲性, 以及镇定问题的研究也已取得很多成果, 如文[21~24]. 文[21]给出广义系统可通过正常分散补偿器镇定的充要条件, 文[22,23]考虑了广义分散控制系统的正则性问题, 文[24]考虑了分散镇定与伺服问题.

本文采用代数方法研究基于动态补偿的矩形广义系统的分散正则化、无脉冲以及镇定问题. 通过设计矩形分散动态补偿器使闭环系统实现正则, 无脉冲且稳定的要求. 首先给出实现正则无脉冲的充要条件, 进而给出系统通过矩形补偿器镇定的充要条件. 这些条件涉及一系列简单不等式与等式是否存在正整数解问题, 对于N通道的分散控制系统, 正则无脉冲, 以及镇定问题的解存在等价于对应的2^{N+1}个简单不等式与几个等式的正整数解存在. 考虑矩形广义系统的一种特殊情况, 如果存在一个矩形补偿器首先将其补偿成方形系统, 再通过方形补偿器补偿使其正则无脉冲且稳定, 这时条件变强了, 但结果的形式得到了简化. 本文所得结果揭示矩形系统及其动态补偿器的许多新的性质, 如即使方形广义系统含有不稳定有限固定模或脉冲固定模, 如采用矩形补偿器, 仍可能镇定该系统, 这个结论颠覆了传统意义上有不稳定固定模的系统即不能被镇定的结论. 如果系统与补偿器均为方形, 则结果转化为大家熟知的方形系统及方形补偿器相应的结果. 本文也给出几个数字例子说明所得的结果.

2 基本知识与问题描述(Preliminaries and problem statements)

考虑具有N个控制站的广义分散控制系统

$$\begin{cases} E\dot{x}(t) = Ax(t) + \sum\limits_{i=1}^{N} B_i u_i(t), \\ y_i(t) = C_i x(t),\ i \in \underline{N}. \end{cases} \tag{1}$$

这里: $x \in \mathbb{R}^n$为状态向量, $u_i \in \mathbb{R}^{q_i}$和$y_i \in \mathbb{R}^{p_i}$分别为第i个子系统的局部控制输入和局部测量输出, $E, A \in \mathbb{R}^{m\times n}, B_i \in \mathbb{R}^{m\times q_i}, C_i \in \mathbb{R}^{p_i\times n}$为常量矩阵, $i \in \underline{N} := \{1, 2, \cdots, N\}$. 假设矩阵$B_i, C_i$都是满秩的, 并设矩阵$E$的秩为$\mathrm{rank}\, E = r$, 显然$0 \leqslant r \leqslant \min\{m, n\}$. 如果$m = n$且存在$s \in \mathbb{C}$, 使$\det(sE - A) \neq 0$, 则称系统(1)是正则的(regular), 否则对于$m \neq n$或者$\det(sE - A) = 0$ 时, 均称系统(1)是非正则的. 当$m = n$时, 也称系统(1)为方形系统, 否则称系统(1)为非方形(或矩形)系统.

引理 1[25]　方形广义系统$E\dot{x} = Ax$正则且无脉冲的充要条件是

$$\mathrm{rank}\begin{bmatrix} 0 & E \\ E & A \end{bmatrix} = n + \mathrm{rank}[E]. \tag{2}$$

引理 2[26]　设$A \in \mathbb{R}^{m\times n}, B \in \mathbb{R}^{m\times q}$和$C \in \mathbb{R}^{p\times n}$是固定矩阵, $K \in \mathbb{R}^{q\times p}$是变矩阵, 则有

$$\underset{K}{\mathrm{g.r}}[A + BKC] = \min\{\mathrm{rank}[A, B], \mathrm{rank}\begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix}\}. \tag{3}$$

其中$\underset{K}{\mathrm{g.r}}$表示矩阵$[\cdot]$的类秩, 即对几乎所有的$K$变动时方括号内矩阵所能取得的秩.

设分散控制系统(1)的N个局部动态补偿器具有如下结构:

$$\begin{cases} E_i\dot{z}_i(t) = S_i z_i(t) + R_i y_i(t), \\ u_i(t) = Q_i z_i(t) + K_i y_i(t), i \in \underline{N}. \end{cases} \tag{4}$$

式中: $z_i(t) \in \mathbb{R}^{n_{c_i}}$是第$i$个补偿器的状态, 矩阵$E_i, S_i, R_i, Q_i, K_i$的维数分别为$m_i \times n_i, m_i \times n_i, m_i \times p_i, q_i \times n_i, q_i \times p_i$的实矩阵. 记$\mathrm{rank}\, E_i = r_i$, 并简记式(4)为$(E_i, S_i, R_i, Q_i, K_i), i \in \underline{N}$. 将式(4)写成更紧凑的形式:

$$\begin{cases} E_c\dot{z}(t) = Sz(t) + Ry(t), \\ u(t) = Qz(t) + Ky(t). \end{cases} \tag{5}$$

式中:

$$\begin{aligned} &E_c := \mathrm{blockdiag}\{E_1, E_2, \cdots, E_N\}, \\ &S := \mathrm{blockdiag}\{S_1, S_2, \cdots, S_N\}, \\ &R := \mathrm{blockdiag}\{R_1, R_2, \cdots, R_N\}, \\ &Q := \mathrm{blockdiag}\{Q_1, Q_2, \cdots, Q_N\}, \\ &K := \mathrm{blockdiag}\{K_1, K_2, \cdots, K_N\}, \\ &z := [z_1^{\mathrm{T}}, z_2^{\mathrm{T}}, \cdots, z_N^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}. \end{aligned}$$

动态输出反馈律(5)与系统(1)构成的闭环系统可以表示为

$$\begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & E_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{z}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A + BKC & BQ \\ RC & S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ z(t) \end{bmatrix}. \tag{6}$$

式中:

$$C^{\mathrm{T}} = [C_1^{\mathrm{T}}, C_2^{\mathrm{T}}, \cdots, C_N^{\mathrm{T}}], B = [B_1, B_2, \cdots, B_N].$$

记

$$m_c=\sum_{i=1}^{N}m_i,n_c=\sum_{i=1}^{N}n_i,r_c=\sum_{i=1}^{N}r_i. \tag{7}$$

本文研究如下两个问题:

分散正则化与无脉冲问题 找出N个分散动态补偿器(4), 使得闭环系统(6)是正则与无脉冲的.

分散镇定问题 找出N个分散动态补偿器(4), 使得闭环系统(6)在正则与无脉冲基础上, 又能进一步保持系统稳定.

3 主要结果(Main results)

3.1 正则化与无脉冲问题 (Regularization and freeness of impulse)

这里要解决的是闭环系统(6)正则且无脉冲的问题, 首先闭环系统(6)应该是一个方形系统, 因而假设其维数满足

$$n+n_c=m+m_c. \tag{8}$$

根据这个假设及引理1, 引理2可以得到下面定理:

定理 1 给定矩形广义系统(1), 存在动态补偿器(4)使闭环系统(6)正则且无脉冲的充要条件为: 对于集合$\underline{N}$的任意不相交分划$P=\{i_1,\cdots,i_k\}$和$\overline{P}=\{i_{k+1},\cdots,i_N\}$, 都有

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix}0&E&0\\E&A&B_P\\0&C_{\overline{P}}&0\end{bmatrix}\geqslant n+n_c+r-m_P-n_{\overline{P}}. \tag{9}$$

成立. 其中

$$\begin{cases}m_P=\sum\limits_{i\in P}m_i,\ n_{\overline{P}}=\sum\limits_{i\in\overline{P}}n_i,\\ P\bigcup\overline{P}=\underline{N},\ P\bigcap\overline{P}=\varnothing.\end{cases} \tag{10}$$

证 由引理1, 系统(6)是正则且无脉冲的充要条件是

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix}0&0&E&0\\0&0&0&E_c\\E&0&A+BKC&BQ\\0&E_c&RC&S\end{bmatrix}=n+n_c+r+r_c. \tag{11}$$

令

$$\begin{cases}\tilde{E}_c:=\text{blockdiag}\{E_1,E_2,\cdots,E_{N-1}\},\\ \tilde{S}:=\text{blockdiag}\{S_1,S_2,\cdots,S_{N-1}\},\\ \tilde{R}:=\text{blockdiag}\{R_1,R_2,\cdots,R_{N-1}\},\\ \tilde{Q}:=\text{blockdiag}\{Q_1,Q_2,\cdots,Q_{N-1}\},\\ \tilde{K}:=\text{blockdiag}\{K_1,K_2,\cdots,K_{N-1}\},\\ \tilde{C}^{\mathrm{T}}:=[C_1^{\mathrm{T}},C_2^{\mathrm{T}},\cdots,C_{N-1}^{\mathrm{T}}],\\ \tilde{B}:=[B_1,B_2,\cdots,B_{N-1}],\end{cases} \tag{12}$$

则等式(11)左边可以表示为

$$\begin{bmatrix}0&0&E&0\\0&0&0&E_c\\E&0&A+BKC&BQ\\0&E_c&RC&S\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0&E&0&0\\0&0&0&0&\tilde{E}_c&0\\0&0&0&0&0&E_N\\E&0&0&A+\tilde{B}\tilde{K}\tilde{C}&\tilde{B}\tilde{Q}&0\\0&\tilde{E}_c&0&\tilde{R}\tilde{C}&\tilde{S}&0\\0&0&E_N&0&0&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0\\0&0\\0&0\\B_N&0\\0&0\\0&I_{m_N}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}K_N&Q_N\\R_N&S_N\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&0&C_N&0&0\\0&0&0&0&0&I_{n_N}\end{bmatrix}. \tag{13}$$

应用引理2, 式(11)成立的充要条件是

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix}0&0&E&0\\0&0&0&E_c\\E&0&A+BKC&BQ\\0&E_c&RC&S\end{bmatrix}=\min\left\{\begin{aligned}&\operatorname{rank}\begin{bmatrix}0&0&0&E&0&0&0\\0&0&0&0&\tilde{E}_c&0&0\\0&0&0&0&0&E_N&0\\E&0&0&A+\tilde{B}\tilde{K}\tilde{C}&\tilde{B}\tilde{Q}&0&B_N\\0&\tilde{E}_c&0&\tilde{R}\tilde{C}&\tilde{S}&0&0\end{bmatrix}+m_N,\\&\operatorname{rank}\begin{bmatrix}0&0&0&E&0\\0&0&0&0&\tilde{E}_c\\E&0&0&A+\tilde{B}\tilde{K}\tilde{C}&\tilde{B}\tilde{Q}\\0&\tilde{E}_c&0&\tilde{R}\tilde{C}&\tilde{S}\\0&0&E_N&0&0\\0&0&0&C_N&0\end{bmatrix}+n_N\end{aligned}\right\}=n+n_c+r+r_c. \tag{14}$$

进而, 式(14)成立的充要条件是

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix}0&0&E&0&0\\0&0&0&\tilde{E}_c&0\\E&0&A+\tilde{B}\tilde{K}\tilde{C}&\tilde{B}\tilde{Q}&B_N\\0&\tilde{E}_c&\tilde{R}\tilde{C}&\tilde{S}&0\end{bmatrix}+m_N+r_N\geqslant n+n_c+r+r_c \tag{15}$$

与

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix}0&0&E&0\\0&0&0&\tilde{E}_c\\E&0&A+\tilde{B}\tilde{K}\tilde{C}&\tilde{B}\tilde{Q}\\0&\tilde{E}_c&\tilde{R}\tilde{C}&\tilde{S}\\0&0&C_N&0\end{bmatrix}+n_N+r_N\geqslant n+n_c+r+r_c \tag{16}$$

皆成立.

对式(15)(16)两式再反复运用形如式(13)的分解和引理2, 可以进一步推得式(11)成立的充要条件是(9)成立.

证毕.

注 1　由式(7)~式(10)可知, 式(9)右端的表达式显然满足

$$\begin{aligned}&n+n_c+r-m_P-n_{\overline{P}}=\\&n+r+n_P-m_P=m+r+m_{\overline{P}}-n_{\overline{P}}.\end{aligned}\tag{17}$$

式(17)方便用于补偿器维数的计算.

注 2　式(9)可以看成一系列不等式(共2^N个), 因而矩形广义系统(1)通过分散动态补偿(4)使其正则与无脉冲问题转化为系列不等式及等式(7)~(10)求正整数解(m_i,n_i), $i\in\underline{N}$的问题. 由引理2及式(14)知, 式(15)(16)至少有一个为等式. 由此推得, 如果系列不等式(9)及等式(7)~(10)有解, 则不等式中至少有一个是等式. 另一方面, 从定理1证明过程与式(17)可以看出, 不等式(9)仅对维数差$\delta_i:=m_i-n_i$, $i\in\underline{N}$有整数解即可; 而且, 解δ_i也可以不唯一, 只要m_i,n_i为正整数. 因此, 如果只考虑系统满足正则与无脉冲条件, m_i,n_i可以同时取大一些或小一些.

注 3　如果系统(1)为方形系统, 即$m=n$时, 也取$m_i=n_i$, 即补偿器也为方形, 则有$n_c=m_P+n_{\overline{P}}$, 这时式(9)右边为$n+r$, 恰为方形系统与方形补偿器构成闭环系统正则与无脉冲条件, 该条件与正常动态补偿器及静态输出反馈补偿结果一致[14,15,19,21].这表明定理1是方形系统正则无脉冲条件的推广形式, 注意这里没有要求补偿器是正常补偿器.

3.2　分散镇定问题(Decentralized stabilization)

由于正则与无脉冲特性具有通有性(genericity)[13,27], 即如果存在式(5)中的一组参数(E_{c0},S_0,R_0,Q_0,K_0)使闭环系统(6)正则与无脉冲, 则对几乎所有的式(5)的参数(E_c,S,R,Q,K)都使得闭环系统(6)正则与无脉冲. 因而可以在保证闭环系统正则与无脉冲条件下, 考虑镇定问题, 通过调整补偿器维数, 实现闭环系统稳定.

定理 2　矩形广义分散系统(1)能通过适当维数的广义动态补偿器(4)镇定的充要条件是, 对于集合$\underline{N}$的任意不相交分划$P=\{i_1,\cdots,i_k\}$和$\overline{P}=\{i_{k+1},\cdots,i_N\}$, 都有式(9)和下式同时成立:

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix}sE-A & B_P\\ C_{\overline{P}} & 0\end{bmatrix}\geqslant n+n_c-m_P-n_{\overline{P}},\tag{18}$$

对任意$s\in C_+$.

这里C_+表示闭右半复平面.

证　必要性. 假设闭环系统(6)正则, 无脉冲且稳定, 则对任意$s\in C_+$, 有

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix}sE-A-BKC & -BQ\\ -RC & sE_c-S\end{bmatrix}=m+m_c.\tag{19}$$

由引理2与定理1, 将前$N-1$个动态补偿器的系数矩阵看成相对固定, 仅考虑第N个补偿器, 则由式(19)可得, 存在$(\tilde{E}_c,\tilde{S},\tilde{R},\tilde{Q},\tilde{K})$使得

$$\begin{aligned}&\operatorname{rank}\begin{bmatrix}sE-A-\tilde{B}\tilde{K}\tilde{C} & -\tilde{B}\tilde{Q} & B_N\\ -\tilde{R}\tilde{C} & s\tilde{E}_c-\tilde{S} & 0\end{bmatrix}\geqslant\\&m+m_c-m_N,\ 任意s\in C_+,\end{aligned}\tag{20}$$

$$\begin{aligned}&\operatorname{rank}\begin{bmatrix}sE-A-\tilde{B}\tilde{K}\tilde{C} & -\tilde{B}\tilde{Q}\\ -\tilde{R}\tilde{C} & s\tilde{E}_c-\tilde{S}\\ C_N & 0\end{bmatrix}\geqslant\\&n+n_c-n_N,\ 任意s\in C_+.\end{aligned}\tag{21}$$

这里, 符号$(\tilde{E}_c,\tilde{S},\tilde{R},\tilde{Q},\tilde{K})$同式(12). 由此继续推导即可得式(20)与式(21)等价于式(18).

充分性. 考虑闭环系统(6)当参数S,R,Q,K变化时的固定模问题[15,17,24]. 从式(9)和式(18)容易得到系统(6)不存在不稳定的有限固定模与脉冲固定模. 而非固定模均可以通过选取适当维数的动态补偿器(4)实现极点的任意配置, 即差$\mathrm{delta}_i=m_i-n_i$按式(9)与式(18)的解固定, 而m_i与n_i可以取充分大以设计补偿器(4)使闭环系统(6)稳定.

证毕.

根据线性系统稳定性与极点配置理论(参考文献[12]中定理4的3), 或文献[28])可知, 使闭环系统(6)稳定的补偿器的维数$m_i\times n_i$及E_i的秩r_i理论上不能选取太小, 维数的升高可以使系统的设计有更大的自由度(如相对稳定度或极点配置), 因而容易得到如下推论.

推论 1　如果矩形广义系统(1)能被维数为$m_i\times n_i$, $i\in\underline{N}$的动态补偿器(4)镇定, 则该系统一定能被维数为$(m_i+l_i)\times(n_i+l_i)$, $i\in\underline{N}$的动态补偿器(4)镇定, 这里$l_i\geqslant 0\ (i\in\underline{N})$为任意非负整数.

考虑镇定闭环系统(6)的一种特殊情况:首先通过某个补偿器将系统补偿为方形系统, 其他补偿器为方形补偿器. 显然, 这个问题比定理2条件更强, 但问题的复杂性得到了简化. 有下面推论.

推论 2　矩形广义分散系统(1)能够通过第$j\in\underline{N}$个动态补偿器补偿为方形系统(即$m+m_j=n+n_j$), 且通过其他方形($m_i=n_i,i\in\underline{N},i\neq j$)动态补偿器(4)镇定的充要条件为:对于集合$\underline{N}-\{j\}$的任意不相交分划$\varphi$和$\overline{\varphi}$, 都有

$$\left\{\begin{aligned}&\operatorname{rank}\begin{bmatrix}0 & E & 0 & 0\\ E & A & B_j & B_\varphi\\ 0 & C_{\overline{\varphi}} & 0 & 0\end{bmatrix}\geqslant m+r\ 与\\&\operatorname{rank}\begin{bmatrix}0 & E & 0\\ E & A & B_\varphi\\ 0 & C_j & 0\\ 0 & C_{\overline{\varphi}} & 0\end{bmatrix}\geqslant n+r,\end{aligned}\right.\tag{22}$$

以及

$$\begin{cases}\operatorname{rank}\begin{bmatrix}sE-A & B_j & B_\varphi\\ C_{\overline{\varphi}} & 0 & 0\end{bmatrix}\geqslant m \text{ 与}\\ \operatorname{rank}\begin{bmatrix}sE-A & B_\varphi\\ C_j & 0\\ C_{\overline{\varphi}} & 0\end{bmatrix}\geqslant n,\ \text{任意}s\in C_+\end{cases}\tag{23}$$

同时成立.

证 先通过第j个动态补偿器将系统补偿为方形系统, 不失一般性, 设$j=1$. 取第一个矩形动态补偿器形式为

$$\begin{cases}E_1\dot z_1(t)=S_1z_1(t)+R_1y_1(t),\\ u_1(t)=Q_1z_1(t)+K_1y_1(t).\end{cases}\tag{24}$$

相应的闭环系统形式为

$$\begin{cases}\begin{bmatrix}E & 0\\ 0 & E_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot x(t)\\ \dot z(t)\end{bmatrix}=\\ \begin{bmatrix}A+B_1K_1C_1 & B_1Q_1\\ R_1C_1 & S_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x(t)\\ z_1(t)\end{bmatrix}+\sum\limits_{i=2}^{N}\begin{bmatrix}B_i\\ 0\end{bmatrix}u_i(t),\\ y_i=\begin{bmatrix}C_i & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x(t)\\ z_1(t)\end{bmatrix},\ i=\{2,3,\cdots,N\}.\end{cases}\tag{25}$$

由注3与定理2, 式(25)能通过方形分散动态补偿器镇定的充要条件是

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix}0 & 0 & E & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & E_1 & 0\\ E & 0 & A+B_1K_1C_1 & B_1Q_1 & B_\varphi\\ 0 & E_1 & R_1C_1 & S_1 & 0\\ 0 & 0 & C_{\overline{\varphi}} & 0 & 0\end{bmatrix}\geqslant n+n_1+r+r_1,\tag{26}$$

与

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix}sE-A+B_1K_1C_1 & B_1Q_1 & B_\varphi\\ R_1C_1 & sE_1-S_1 & 0\\ C_{\overline{\varphi}} & 0 & 0\end{bmatrix}\geqslant m+m_1,\ \text{任意}s\in C_+\text{同时成立}.\tag{27}$$

进一步推导可以证明式(26)等价于式(22), 式(27)等价于式(23).

证毕.

注 4 式(22)与式(23)形式虽然简单, 但并不总存在某个方形补偿器使其与系统构成方形系统, 而其他补偿器为方形使闭环系统稳定, 见例1.

注 5 当系统(25)为方形, 且$E_i=I_i$(单位阵) $i\in\{2,3,\cdots,N\}$时, 推论2恰是文[21]的结果, 但推论2中的$(N-1)$个方形补偿器没有被要求是正常($E_i=I_i$)补偿器. 由推论2和文[12]的结果可知, 只需要$E_i(i\in\{2,3,\cdots,N\})$的秩足够大(维数$m_i\times n_i$足够大), 且满足式(22)(23), 则可以找到所要求的镇定补偿器. 如果系统(1)本身为方形, 取$E_i=I_i, i\in \underline{N}$则直接得推论2即是文[21]中定理.

注 6 当系统为方形, 同样可以考虑矩形补偿器, 这时, 从式(9)和式(18)可知, 系统能被镇定的条件要比用方形补偿器镇定条件更弱, 该条件突破了系统的有限固定模和脉冲固定模的限制, 即当系统具有不稳定的有限固定模或脉冲固定模时, 系统仍可能通过矩形补偿器镇定. 当然, 这个结论成立仅限于广义系统(从系列不等式的解可知), 见例3.

根据广义系统理论, 脉冲模对应于复平面上点$s=\infty$, 系统不稳定模(不稳定的有限模与脉冲模)对应于扩展右半复平面$C_{+e}:=C_+\bigcup\{\infty\}$. 因此可以将式(9)与式(18)给出一个统一的表示[19,21]. 按文[19]关于无穷秩的概念及引理3, 不难得到下面引理.

引理 3

$$\operatorname{rank}_\infty\begin{bmatrix}sE-A & B_P\\ C_{\overline{P}} & 0\end{bmatrix}=\operatorname{rank}\begin{bmatrix}0 & E & 0\\ E & A & B_P\\ 0 & C_{\overline{P}} & 0\end{bmatrix}-\operatorname{rank}(E).$$

因此当$s=\infty$时可以定义

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix}sE-A & B_P\\ C_{\overline{P}} & 0\end{bmatrix}:=\operatorname{rank}_\infty\begin{bmatrix}sE-A & B_P\\ C_{\overline{P}} & 0\end{bmatrix}.\tag{28}$$

这时式(9)与式(18)可以统一表示为

$$\begin{cases}\operatorname{rank}\begin{bmatrix}sE-A & B_P\\ C_{\overline{P}} & 0\end{bmatrix}\geqslant n+n_c-m_P-n_{\overline{P}},\\ \text{任意}s\in C_{+e}.\end{cases}\tag{29}$$

同理, 推论2的表达形式也可以简化, 从略.

4 算例(Numerical examples)

例 1 设2通道系统各参数为

$$E=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}, A=\begin{bmatrix}1&\alpha&1&0\\0&0&0&-1\end{bmatrix}, B_1=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},$$

$$B_2=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}, C_1=\begin{bmatrix}1&0&0&0\end{bmatrix}, C_2=\begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}.$$

这里, 参数α为实数. 显然$m=2, n=4, r=1$, 设其满足式(9)得$m_1-n_1=1$, 因而$m_2-n_2=1$. 当$\alpha<0$时, 系统满足条件(18), 而当$\alpha\geqslant 0$时系统不满足条件(18). 因此对于任意实数α, 系统能够通过分散动态补偿使其正则与无脉冲, 而仅当$\alpha<0$时系统能被镇定. 由于$\operatorname{rank}E=1$, 为了简单, 取$m_1=m_2=2, n_1=n_2=1$, 即两个分散动态补偿器均为2×1维, $E_{c_1}, E_{c_2}\in\mathbb{R}^{2\times 1}$几乎可以任意取值, 理论上系统均可以被镇定, 取$\alpha=-1$, 可取

补偿器为

$$(E_1,S_1,R_1,Q_1,K_1)=(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},[1],[1]),$$

$$(E_2,S_2,R_2,Q_2,K_2)=(\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix},[1],[1\ \ 1]).$$

该补偿器与原开环系统形成的闭环系统是正则无脉冲且稳定的, 所配置的极点为$-1,-2$. 另一方面, 如果取一个3×1(或$(3+l)\times(1+l)$)维动态补偿器, 另一个动态补偿器取1×1(或$(1+l)\times(1+l)$)维, 则不难验证闭环系统不能保证正则性, 即此系统不存在形如推论2中的动态补偿器使得闭环系统正则、无脉冲且稳定.

例 2　设2通道系统各参数为

$$E=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\end{bmatrix},\ A=\begin{bmatrix}1&0&1&-1\\0&0&0&0\end{bmatrix},\ B_1=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},$$

$$B_2=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix},\ C_1=\begin{bmatrix}1&0&1&0\\0&0&1&1\end{bmatrix},\ C_2=\begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\end{bmatrix},$$

则$m=2,n=4,r=2$. 设其满足式(9)得$m_1-n_1=2,m_2=n_2$, 此时, $m+m_1=n+n_1$, 该系统满足条件(22)(23). 这样的动态补偿器恰好是形如推论2中的补偿器, 同时可知此系统只存在形如推论2中的动态补偿器使得闭环系统正则、无脉冲、稳定. 构造补偿器为

$$(E_1,S_1,R_1,Q_1,K_1)=$$

$$(\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\-8\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&0\\0&0\\0&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&-1\end{bmatrix}),$$

$$(E_2,S_2,R_2,Q_2,K_2)=$$

$$(\begin{bmatrix}0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1&-2\end{bmatrix}).$$

该补偿器与原开环系统形成的闭环系统是正则、无脉冲且稳定的, 所配置的极点为$-8,-1\pm j$.

例 3　设2通道系统各参数为

$$E=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix},A=\begin{bmatrix}2&1&0\\-1&1&1\\1&1&0\end{bmatrix},B_1=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},$$

$$B_2=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},C_1=\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&0\end{bmatrix},C_2=\begin{bmatrix}1&1&0\end{bmatrix}.$$

容易验证此系统含有一个有限固定模$s=1$和一个脉冲固定模, 因此, 该系统不能通过方形补偿器镇定. 但是, 如果考虑矩形补偿器, 通过解不等式(9)与(18)得解为$m_1-n_1=1,m_2-n_2=-1$, 因而满足定理2条件, 即系统能被矩形分散动态补偿器镇定. 设计两个局部矩形补偿器维数分别为2×1与1×2维, 且闭环极点为$-3,-2,-1\pm \mathrm{j}$, 可求得补偿器如下:

$$(E_1,S_1,R_1,Q_1,K_1)=$$

$$(\begin{bmatrix}-5\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-3\\-6\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}5\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2&-2\end{bmatrix}),$$

$$(E_2,S_2,R_2,Q_2,K_2)=$$

$$(\begin{bmatrix}1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\end{bmatrix}).$$

因此, 对于广义系统, 如果考虑矩形补偿器, 传统意义上固定模的概念及其意义则发生了变化, 系统可镇定的条件不再是没有不稳定的有限固定模与脉冲固定模.

5　结论(Conclusion)

本文研究了基于分散动态补偿的矩形广义系统的正则性、无脉冲, 以及镇定问题, 给出了闭环系统正则无脉冲的充要条件及可镇定的充要条件. 这些条件将原来的方形系统与方形补偿器正则无脉冲且稳定的条件, 即系统不存在不稳定的有限固定模与脉冲固定模的条件进行了推广, 使原来条件转化为求一系列不等式与等式的正整数解问题. 利用矩形补偿器, 则固定模的概念将不再具有与系统镇定问题密切相关的意义. 大量例子说明本文结果的合理性. 本文结果说明，通过对矩形系统及其矩形动态补偿器的研究, 可以发现矩形系统的许多新的性质、新的控制器结构以及新的控制器设计方式.

参考文献(References):

[1] LEWIS F L. A survey of linear singular systems[J]. *Circuits System, Signal Processing*, 1986, 5(1): 3 – 36.

[2] DZIURLA S, NEWCOMB R W. Input-output pairing in LTV semistate systems[J]. *IEEE Transactions on Circuit and Systems*, 1989, 36(1): 139 – 141.

[3] DAI L. *Singular Control Systems–Lecture Notes in Control and Information Science*[M]. Berlin, Germany: Springer-Verlag, 1989.

[4] HODGE A M, NEWCOMB R W. Semistate theory and analogue VLSI design[J]. *IEEE Circuit and System Magazine*, 2002, 2(1): 30 – 51.

[5] VERGHESE G C, LEVY B C, KAILATH T. A generalized statespace for singular systems[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1981, 26(8): 811 – 831.

[6] OZCALDIRAN K, LEWIS F L. On the regularizability of singular systems[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1990, 35(10): 1156 – 1160.

[7] BUNSE-GERSTNER A, MEHRMANN V, NOCHOLS N K. Regularization of descriptor systems by output feedback[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1994, 39(8): 1734 – 1748.

[8] LOVASS-NAGY V, POWERS D L, SCHILING R J. On regularizing of descriptor systems by output feedback[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1994, 39(7): 1507 – 1509.

[9] CHU D L, HO D W C. Necessary and sufficient conditions for the output feedback regularization of descriptor systems[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1999, 44(2): 405 – 412.

[10] ISHIHARA J Y, TERRA M H. Impulse controllability and observability of rectangular descriptor systems[J]. *IEEE Transations on Automatic Control*, 2001, 46(6): 991 – 994.

[11] HOU M. Controllability and elimination of impulsive modes in descriptor systems[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2004, 49(10): 1723 – 1727.

[12] 张国山. 基于动态补偿的广义系统的正则化与极点配置[J]. 控制与决策, 2006, 21(1): 51 – 55.
(ZHANG Guoshan. Regularization and pole-placement of descriptor systems by dynamic compensation[J]. *Control and Decision*, 2006, 21(1): 51 – 55.)

[13] ZHANG Guoshan. Regularizability, controllability and observability of rectangular descriptor systems by dynamic compensation[C]// *Proceedings of American Control Conference*. Minneapolis, Minnesota, USA: IEEE Press, 2006, 12(6): 4393 – 4398.

[14] WANG S H, DAVISON E J. On the stabilization of decentralized control systems[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1973, 18(10): 473 – 478.

[15] CHANG T N, DAVISON E J. Decentralized control of descriptor type systems[C]//*Proceedings of Conference on Decision and Control*. Athens, Greece: IEEE Press, 1986: 1176 – 1181.

[16] DAVISON E J, CHANG T N. Decentralized stabilization and pole assignment for general improper systems[C]//*Proceedings of American Control Conference*. Minneapolis, Minnesota, USA: IEEE Press, 1987: 1669 – 1675.

[17] XIE Xukai. On fixed modes in singular systems[C]//*Proceedings of American Control Conference*. Atlanta, USA: [s.n.], 1988: 1550 – 1551.

[18] ZHANG Qingling. Algebraic characterizations of fixed modes in linear decentralized descriptor systems[C]//*Proceedings of Conference on Decision and Control*. Florida, USA: IEEE Press, 1989: 866 – 871.

[19] 谢绪恺, 王殿辉, 林崇, 等. 广义分散控制系统固定模的统一判定[J]. 自动化学报, 1995, 21(2): 145 – 153.
(XIE Xukai, WANG Dianhui, LIN Cong, et al. An Unified Approach to study fixed modes in singular systems[J]. *Acta Automatica Sinica*, 1995, 21(2): 145 – 153.)

[20] 张国山, 谢绪恺. 广义分散控制系统的DR-能控性[J]. 控制理论与应用, 1995, 12(6): 704 – 711.
(ZHANG Guoshan, XIE Xukai. DR-Controllability of descriptor decentralized control systems[J]. *Control Theory & Applications*, 1995, 12(6): 704 – 711.)

[21] GAO Zhiwei, WANG Xianlai, WANG Jiang, et al. Internal properness and stability in singular decentralized control systems[C]//*Proceedings of American Control Conference*. Albuquerque, New Mexico: IEEE Press, 1997: 2520 – 2521.

[22] WANG Dianhui, SOH C B. On regularizing singular systems by decentralized output feedback[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1999, 44(1): 148 – 152.

[23] YU R. Regularizability of linear time-invariant descriptor systems under decentralized control[J]. *Automatica*, 2005, 41(9): 1639 – 1644.

[24] CHANG T N, DAVISON E J. Decentralized control of descriptor systems[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2001, 46(10): 1589 – 1595.

[25] DAI L. Impulsive modes and causality in singular systems[J]. *International Journal of Control*, 1989, 50(4): 1267 – 1281.

[26] XIE Xukai. A new matrix identity in control theory[J]. *Proceedings of Conference on Decision and Control*. Fort Lauderdale Florida, USA: IEEE Press,1985.

[27] VIDYASAGAR M. *Control System Synthesis:A Factorization Approach*[M]. MA: MIT Press Cambridge, 1985.

[28] SYRMOS V L, ABDALLAH C T, DORATO P, et al. Static output feedback-A survey[J]. *Automatica*, 1997, 33(2): 125 – 137.

作者简介:

张国山 (1961—), 男, 教授, 目前研究方向为鲁棒控制、智能控制与广义系统理论, E-mail: zhanggs@tju.edu.cn.