

求解连续空间优化问题的量子蚁群算法

李盼池^{1,2}, 李士勇¹

(1. 哈尔滨工业大学 控制科学与工程系, 黑龙江 哈尔滨 150001; 2. 大庆石油学院 计算机科学系, 黑龙江 大庆 163318)

摘要: 针对蚁群算法只适用于离散优化问题的局限性和收敛速度慢的问题, 提出了求解连续空间优化问题的量子蚁群算法. 该算法每只蚂蚁携带一组表示蚂蚁当前位置信息的量子比特; 首先根据基于信息素强度和可见度构造的选择概率, 选择蚂蚁的前进目标; 然后采用量子旋转门更新蚂蚁携带的量子比特, 完成蚂蚁的移动; 采用量子非门实现蚂蚁所在位置的变异, 增加位置的多样性; 最后根据移动后的位置完成蚁群信息素强度和可见度的更新. 该算法将量子比特的两个概率幅都看作蚂蚁当前的位置信息, 在蚂蚁数目相同时, 可使搜索空间加倍. 以函数极值问题和神经网络权值优化问题为例, 验证了算法的有效性.

关键词: 量子计算; 蚁群算法; 连续空间优化

中图分类号: TP18 **文献标识码:** A

Quantum ant colony algorithm for continuous space optimization

LI Pan-chi^{1,2}, LI Shi-yong¹

(1. Department of control science and engineering, Harbin institute of technology, Harbin Heilongjiang 150001, China;

2. Department of computer science, Daqing petroleum institute, Daqing Heilongjiang 163318, China)

Abstract: To tackle the shortcoming of ant colony optimization which can only be applied to discrete problems and hold a slow convergence rate, a novel method for solving optimization problems in continuous space is presented. In this algorithm, each ant carries a group of quantum bits which represent the position of the ant. Firstly, the target where the ant is going to move is selected according to the selection probability based on pheromone information and heuristic information. Secondly, quantum bits of the ant are updated by quantum rotation gates so as to enable the ant to move. Some quantum bits are mutated by quantum non-gate so as to increase the variety of ant positions. Finally, pheromone information and the heuristic information are updated according to the new position of each ant arrived at. In this algorithm, both probability amplitudes of a quantum bit are regarded as position information belonging to an ant, a double searching space is acquired for ant colony which hold the same number of ants. At last, the availability of the algorithm is illustrated by two application examples of function optimization and weight optimization of neural networks.

Key words: quantum computing; ant colony algorithm; continuous space optimizing

1 引言(Introduction)

蚁群算法(ant colony algorithm, 简称ACA)是由意大利学者M.Dorigo等人^[1]于1991年首先提出的一种新型模拟进化算法. 该算法已成功地应用于一系列组合优化问题求解中^[2~5], 并取得了很好的结果, 显示出该算法对于求解离散空间的优化问题, 具有一定的潜力. 但对于蚁群算法如何处理连续空间的优化问题, 目前文献尚不多见. 目前主要有两种途径: 一是将连续空间离散化, 从而使连续问题转化为离散问题^[6], 但该方法能否适用于高维优化问题还有待研究; 二是与进化算法相结合^[7], 引入种群与进化机制, 但收敛速度较慢. 因此, 如何应用蚁群算法高

效率实现连续空间优化问题求解将是一个很有意义的研究课题.

20世纪80年代初Benioff和Feynman提出了量子计算的概念, 随后Shor于1994年提出大数质因子分解算法, Grover于1996年提出无序数据库的量子搜索算法, 从此量子计算以其独特的计算性能引起了广泛瞩目, 并迅速成为研究的热点^[8,9]. 本文将量子计算与蚁群算法相融合, 提出一种连续量子蚁群算法(continuous quantum ant colony algorithm, CQACA), 该算法与用于组合优化的蚁群算法不同之处在于: 在CQACA中: ① 蚂蚁释放的信息素不是撒在经过的全部路径上, 而是撒在蚂蚁当前驻留的

位置(点)上; ② 蚂蚁当前位置用一组量子比特的概率幅表示, 蚂蚁移动由量子旋转门实现; ③ 引入了对蚂蚁当前位置的量子变异操作. 实验表明, 该算法是有效和可行的.

2 连续量子蚁群算法(Continuous quantum ant colony algorithm)

2.1 连续优化问题一般描述(General description of continuous optimization)

若将 n 维连续空间优化问题的解看作 n 维空间 $\Omega = [a_i, b_i]^n$ 中的点或向量, 则连续优化问题可表述为

$$\begin{cases} \min f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ \text{s.t. } a_i \leq x_i \leq b_i, i = 1, 2, \dots, n. \end{cases} \quad (1)$$

若将 Ω 中每个点都看作优化问题的近似解, 可定义如下适应度函数来反映这些近似解的优劣程度:

$$fit(x) = C_{\max} - f(x). \quad (2)$$

其中 $C_{\max}$ 可以是一个合适的输入值, 或者是到目前为止优化过程中的最大值.

2.2 量子比特及量子门的概念(Concept of quantum bit and quantum gate)

在量子计算中, 一个量子比特的状态可表示为

$$|\phi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle. \quad (3)$$

其中 α 和 β 称为量子比特的概率幅, 满足下列归一化条件:

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1. \quad (4)$$

令 $\alpha = \cos \varphi$, $\beta = \sin \varphi$. 量子比特也可用概率幅表示为 $[\cos \varphi \quad \sin \varphi]^T$, φ 是量子比特的相位. 量子比特相位的改变可以由量子旋转门实现. 其定义见式(5):

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}. \quad (5)$$

变异操作为兑换两个概率幅, 可由量子非门实现:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta \\ \alpha \end{bmatrix}. \quad (6)$$

2.3 连续量子蚁群算法基本原理(General principle of CQACA)

设蚁群中共有 m 只蚂蚁, 随机分布在 n 维单位空间 $\tilde{\Omega} = [0, 1]^n$ 中, 每只蚂蚁携带一组(n 个)量子比特. 在CQACA中, 把量子比特的两个概率幅都视为代表蚂蚁当前位置的信息, 因此, 每只蚂蚁占据 $\tilde{\Omega}$ 中两个位置. 这样在蚁群规模不变时, 可使搜索到的空间加倍. 从而加快了收敛速度. 事实上, 令蚁群中最优蚂蚁携带的量子比特上体现其最优位置的概率幅为(不失一般性, 设为余弦项):

$(\cos \varphi_1, \cos \varphi_2, \dots, \cos \varphi_n)$, 则当某只蚂蚁携带的量子比特相位转至: $\pi/2 - \varphi_1, \pi/2 - \varphi_2, \dots, \pi/2 - \varphi_n$ 时, 该蚂蚁携带的量子比特的正弦项, 同样获得最优解. 因此, 优化效率得到一定程度的提高.

设 $\tau(x_r)$ 为第 k 只蚂蚁在位置 x_r 处的信息素强度, 初始时刻全部设为某个常数; $\eta(x_r)$ 为 x_r 处的可见度. CQACA的基本框架如下文所述.

1) 选择蚂蚁移动的目标位置.

蚂蚁 k 由位置 x_r 转移到 x_s 的移动规则为

$$\begin{cases} \arg \max_{x_s \in X} \{[\tau(x_s)]^\alpha [\eta(x_s)]^\beta\}, q \leq q_0, \\ \tilde{x}_s, q > q_0, \end{cases} \quad (7)$$

$$p(x_s) = \frac{[\tau(x_s)]^\alpha [\eta(x_s)]^\beta}{\sum_{x_u \in X} [\tau(x_u)]^\alpha [\eta(x_u)]^\beta}. \quad (8)$$

其中 q 为在 $[0, 1]$ 区间均匀分布的随机数; q_0 为一常数($0 \leq q_0 \leq 1$); X 为蚁群在单位空间 $\tilde{\Omega}$ 中占据的点的集合; $\tilde{x}_s$ 为按式(8)选择的目标位置.

2) 蚂蚁向目标位置的移动.

设蚂蚁 k 当前位置为 x_r , 目标位置为 x_s , 其量子比特分别为

$$x_r = \begin{bmatrix} \cos \varphi_{r1} & \cos \varphi_{r2} & \cdots & \cos \varphi_{rn} \\ \sin \varphi_{r1} & \sin \varphi_{r2} & \cdots & \sin \varphi_{rn} \end{bmatrix}, \quad (9)$$

$$x_s = \begin{bmatrix} \cos \varphi_{s1} & \cos \varphi_{s2} & \cdots & \cos \varphi_{sn} \\ \sin \varphi_{s1} & \sin \varphi_{s2} & \cdots & \sin \varphi_{sn} \end{bmatrix}. \quad (10)$$

为使 X_r 经量子门作用后逼近 X_s , (5)式中转角 θ 的选取至关重要. 其大小根据经验通常取为 $0.001\pi < \theta < 0.05\pi$; 而方向可按如下规则选取: 令 α_0 和 β_0 是目标量子位的概率幅, α_1 和 β_1 是当前量子位的概率幅, 记

$$A = \begin{vmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 \\ \beta_0 & \beta_1 \end{vmatrix}. \quad (11)$$

当 $A \neq 0$ 时, 方向为 $-\text{sgn } A$; 当 $A = 0$ 时, 方向取正负均可^[10]. 本文给出的转角策略是

$$\Delta\theta = -\text{sgn}(A)\theta_0 e^{-t}. \quad (12)$$

其中 θ_0 为迭代初值, t 为优化步数.

3) 变异处理.

首先随机选择若干只(通常可取 $[0.1m]$)蚂蚁, 然后随机选择其携带的若干个量子位, 依变异概率对选中的量子位施加量子非门变换, 使该量子位的两个概率幅互换. 这样可使蚂蚁代表的两个空间位置同时得到变异. 令 $[\cos \varphi_{ki} \quad \sin \varphi_{ki}]^T$ 为蚂蚁 k 携带的第 i 个量子比特, 变异操作如下:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \varphi_{ki} \\ \sin \varphi_{ki} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\varphi_{ki} + \pi/2 - 2\varphi_{ki}) \\ \sin(\varphi_{ki} + \pi/2 - 2\varphi_{ki}) \end{bmatrix}. \quad (13)$$

4) 信息素强度及可见度更新规则.

在CQACA中, 信息素强度的更新思想是把反映蚂蚁当前位置优劣程度的适应度函数值融合到信息素中, 使越是优良的位置其上信息素强度越高; 把适应度函数的梯度信息融合到可见度中, 使梯度越大的位置, 可见度也越大.

每只蚂蚁完成一步搜索之后, 将当前位置由单位空间 $\tilde{\Omega}$ 映射到优化问题的解空间 Ω , 计算适应度函数值及梯度值, 按文献[11]给出的策略进行蚂蚁当前位置信息素强度和可见度的局部更新. 记蚂蚁前一位置为 x_q ; 当前位置为 x_r ; 移动后的位置为 x_s , 局部更新规则为($0 < \alpha < 1, 0 < \beta < 1$):

$$\tau(x_s) = \tau(x_r) + \text{sgn}(\Delta fit) \times |\Delta fit|^\alpha, \quad (14)$$

$$\Delta f = fit(x_s) - fit(x_r), \quad (15)$$

$$\eta(x_s) = \eta(x_r) + \text{sgn}(\Delta \partial fit) \times |\Delta \partial fit|^\beta, \quad (16)$$

$$\Delta \partial fit = \max_{1 \leq i \leq n} \left(\frac{\partial fit}{\partial x_{si}} \right) - \max_{1 \leq i \leq n} \left(\frac{\partial fit}{\partial x_{ri}} \right). \quad (17)$$

当 fit 不可微时, $\Delta \partial fit$ 可采用其一阶差分:

$$\Delta \partial fit = \max_{1 \leq i \leq n} \left(\frac{fit(x_s) - fit(x_r)}{x_{si} - x_{ri}} \right) - \max_{1 \leq i \leq n} \left(\frac{fit(x_r) - fit(x_q)}{x_{ri} - x_{qi}} \right). \quad (18)$$

所有蚂蚁完成一次循环后, 按式(19)进行信息素全局更新. 其中 $0 < \rho < 1$; $\tilde{x}$ 为当前最优解.

$$\tau(x_u) = \begin{cases} (1 - \rho)\tau(x_u) + \rho fit(x_u), & x_u = \tilde{x}, \\ (1 - \rho)\tau(x_u), & x_u \neq \tilde{x}. \end{cases} \quad (19)$$

3 对比实验分析(Analysis of comparison experiment)

3.1 函数极值优化(Optimization of the function extremum)

本文选择如下函数:

$$f(x, y) = 0.5 - \frac{\sin^2 \sqrt{x^2 + y^2} - 0.5}{(1 + 0.001(x^2 + y^2))^2}. \quad (20)$$

优化目标为求取极大值点. 此函数有无限个局部极大点, 其中只有一个(0,0)为全局最大, 最大值为1. 自变量的取值范围均为 $(-100, 100)$. 见图1.

算法参数: 蚁群规模 $m = 50$; 量子位数 $n = 2$; 概率参数 $q_0 = 0.5$; 挥发系数 $1 - \rho = 0.3$; 信息素更新指数 $\alpha = 0.5$; 可见度更新指数 $\beta = 0.5$; 转角步长初值 $\theta_0 = 0.05\pi$; 变异概率 $p_m = 0.05$; 限定步数 $\max = 500$. 适应度函数取目标函数本身.

分别用CQACA, ACA, GA 进行仿真, 优化结果对比见表1; 收敛曲线对比见图2. 对于CQACA, 以单位圆形式给出了收敛后最优蚂蚁携带的量子比特的位置(图3), 和整个优化过程中蚂蚁释放的信息素轨迹图(图4).

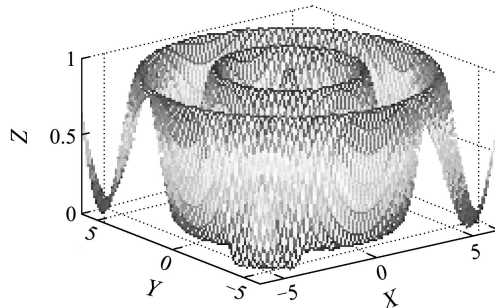


图1 目标函数

Fig. 1 The object function

表1 函数极值问题优化结果对比(20次平均值)

Table 1 Comparison of optimizing results on function extremum (The average of twenty experiments)

算法	优化步数	最优结果	平均结果	成功次数	运行时间/s
CQACA	500	1.000	0.9967	13	3.87
ACA	500	1.000	0.9918	3	4.13
GA	500	0.9903	0.9903	0	4.09

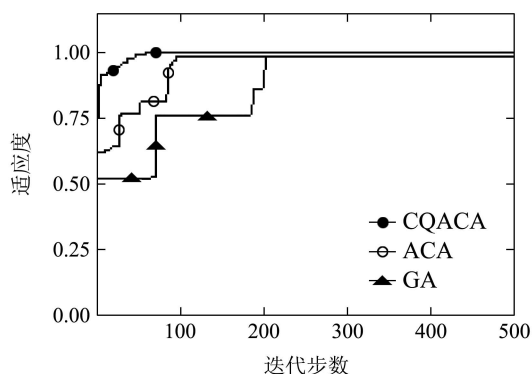


图2 收敛曲线对比

Fig. 2 Comparison of convergence curves

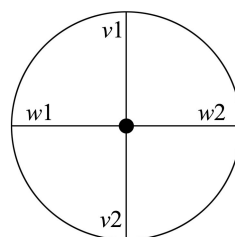


图3 最优解量子位在单位圆中分布

Fig. 3 The quantum bits distributions of the global optimum solution in a unit circle for CQACA

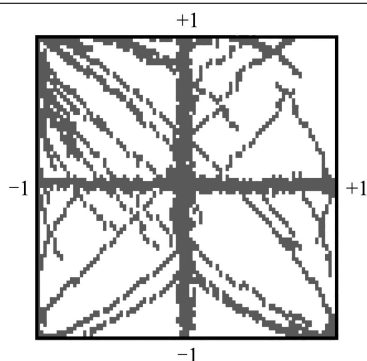


图4 信息素轨迹

Fig. 4 The pheromone trails for CQACA

由表1可知, CQACA的优化效率是最高的; 优化结果也是最好的, 成功率达到65%; 其次是ACA, 效率最低的是GA, 所有20次实验全部陷入了局部极大值. 由图3可以看出CQACA中搜索空间加倍的优越性. 图中 v_1, v_2 和 w_1, w_2 分别代表最优蚂蚁携带的两个量子比特, 其概率幅表示为

$$\left\{ \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{array} \right\} v_1, v_2, \left\{ \begin{array}{cc} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{array} \right\} w_1, w_2.$$

两种结果在实验中随机出现, 增加了收敛的概率. 在20次CQACA实验中, 5次收敛于 v_1, v_2 ; 8次收敛于 w_1, w_2 .

3.2 神经网络权值优化(Optimization of the neural network weights)

本实验用CQACA优化神经网络权值, 实现图5所示9点模式分类问题. 该问题可看作“异或”问题的推广, 经常作为检验算法分类能力的尺度. 用3层前馈神经网络作为分类器, 算法参数见表2.

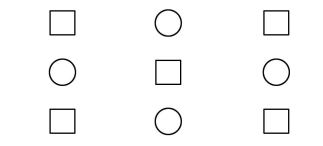


图5 9点模式识别问题

Fig. 5 Pattern recognition of nine-samples

表2 神经网络分类器算法参数

Table 2 Parameter of neural network for classification

C	L_1	L_2	L_3	n	m	ρ	α	β	θ	P_m	E	L
3	2	5	1	21	50	0.8	0.5	0.5	0.05π	0.05	0.5	500

表2中参数说明: C : 网络层数; L_1 : 输入节点; L_2 : 隐层节点; L_3 : 输出节点; n : 量子位数; m : 蚁群规模; $1 - \rho$: 挥发系数; α : 信息素更新指数; β : 可见度更新指数; θ : 转角步长; p_m : 变异概率; E : 限定误差; L : 限定步数.

分别用CQACA, ACA, GA优化网络权值, 适应度

函数取为 $\exp(-\text{Error})$, 其中Error为输出误差. 优化结果对比见表3; 收敛曲线见图6.

表3 9点模式分类优化结果对比(30次实验平均值)

Table 3 Comparison of optimizing results on nine-sample patterns (The average of thirty experiments)

算法	优化步数	分类误差	收敛次数	收敛率/%	运行时间/s
CQACA	253	0.4138	19	63	13.69
ACA	352	0.5083	8	27	17.86
GA	491	0.5261	5	17	21.38

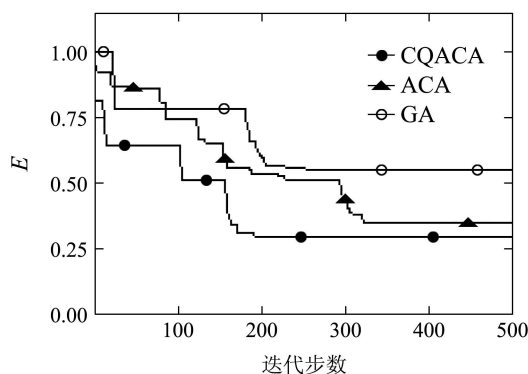


图6 收敛曲线对比

Fig. 6 Comparison of convergence curves

本实验需要同时优化21个变量. 由表3可知, 对于高维优化问题, CQACA的效率同样是最高的, 收敛率分别是ACA的2.3倍; GA的3.7倍, 而平均运行时间是3种算法中最少的.

4 结论(Conclusion)

提出了一种用于连续空间优化的量子蚁群算法. 该算法具有较强的搜索能力和效率, 尤其适用于连续空间的高维优化问题. 以含2个变量的函数极值优化和2-5-1结构的神经网络权值优化为例, 仿真结果表明, 该算法是有一定潜力值得推荐的优化算法.

参考文献(References):

- [1] DORIGO M, MANIEZZO V, COLONI A. Ant system: Optimization by a colony of cooperating agents[J]. *IEEE Transactions on System, Man, and Cybernetics*, 1996, 26(1): 29 – 41.
- [2] DORIGO M, GAMBARDELLA L M. Ant colony system: A cooperative learning approach to the traveling salesman problem[J]. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 1997, 1(1): 53 – 66.
- [3] COLONI A, DORIGO M, MANIEZZO V. Ant colony system for job-shop scheduling[J]. *Belgian Journal of Operations Research Statistics and Computer Science*, 1994, 34(1): 39 – 53.
- [4] MANIEZZO V. Exact and approximate nondeterministic tree search procedures for the quadratic assignment problem[J]. *Inform Journal of Computer*, 1999, 11(4): 358 – 369.
- [5] LEGUIZAMON G, MICHALEWICZ Z. A new version of ant system for subset problems[C]//*Proceedings of the 1999 Congress*

- on *Evolutionary Computation*. Washington, DC, USA: IEEE Press, 1999, 2: 1459 – 1464.
- [6] WANG Lei, WU Qidi. Ant system algorithm for optimization in continuous space[C]//*Proceedings of the 2001 IEEE International Conference on Control Applications*. Mexico City, Mexico: IEEE Press, 2001: 395 – 400.
- [7] JAYARAMAN V K, KULKARNI B D, SACHIN K, et al. Ant colony framework for optimal design and scheduling of batch plants[J]. *Computer and Chemical Engineering*, 2000, 24(8): 1901 – 1912.
- [8] GRIGORENKO I, GARCIA M E. Calculation of the partition function using quantum genetic algorithms[J]. *Physica A*, 2002, 313: 463 – 470.
- [9] RAMOS R V. Numerical algorithms for use in quantum information[J]. *Journal of Computational Physics*, 2003, 192(1): 95 – 104.
- [10] 李士勇, 李盼池. 基于实数编码和目标函数梯度的量子遗传算法[J]. 哈尔滨工业大学学报, 2006, 38(8): 1216 – 1218.
- (LI Shiyong, LI Panchi. A quantum genetic algorithm based on real encoding and gradient information of object function[J]. *Journal of Harbin Institute of Technology*, 2006, 38(8): 1216 – 1218.)
- [11] 程志刚, 陈德钊, 吴晓华. 连续蚁群优化算法的研究[J]. 浙江大学学报(工学版), 2005, 39(8): 1147 – 1151.
- (CHENG Zhigang, CHEN Dezhaoh, WU Xiaohua. Study of continuous ant colony optimization algorithm[J]. *Journal of Zhejiang University(Engineering Science)*, 2005, 39(8): 1147 – 1151.)

作者简介:

- 李盼池** (1969—), 男, 副教授, 博士研究生, 研究方向为量子优化算法, E-mail: lipanchi@vip.sina.com;
- 李士勇** (1943—), 男, 教授, 博士生导师, 研究领域为模糊控制、神经控制及智能控制理论, E-mail: lsy@hit.edu.cn.

(上接第232页)

参考文献(References):

- [1] IOANNOU P A. Decentralized adaptive control of interconnected systems[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1986, 31(2): 291 – 298.
- [2] WU Z J, XIE X J, ZHANG S Y. Robust decentralized adaptive stabilization for a class of interconnected systems with unmodeled dynamics[J]. *International Journal of Systems Science*, 2004, 35(7): 389 – 404.
- [3] 田洁, 解学军. 具有未建模动态的时变关联系统的鲁棒分散自适应镇定[J]. 控制理论与应用, 2006, 23(5): 706 – 710.
- (TIAN Jie, XIE Xuejun. Robust decentralized adaptive stabilization for time-varying interconnected systems with unmodeled dynamics[J]. *Control Theory & Applications*, 2006, 23(5): 706 – 710.)
- [4] MARINO R, TOMEI P. Adaptive control of linear time-varying systems[J]. *Automatica*, 2003, 39(4): 651 – 659.
- [5] KRASOWSKY N N. *Stability of Motion*[M]. Stanford: Stanford University Press, 1963.

作者简介:

- 田洁** (1979—), 女, 博士研究生, 研究方向是非线性系统的自适应控制理论, E-mail: tjie9801@163.com;
- 解学军** (1968—), 男, 教授, 博士生导师, 研究方向是复杂系统的自适应控制理论及应用, E-mail: xxj@mail.qfnu.edu.cn.
- 刘海宽** (1962—), 男, 教授, 研究方向是计算机控制系统研究与应用、鲁棒控制等, E-mail: liuhaikuan1962@163.com.

(上接第236页)

- [6] 赵艳丽, 刘剑, 罗鹏飞. 自适应转弯模型的机动目标跟踪算法[J]. 现代雷达, 2003, 25(11): 14 – 16.
- (ZHAO Yanli, LIU Jian, LUO Pengfei. Maneuvering target tracking algorithm for adaptive turn model[J]. *Modern Radar*, 2003, 25(11): 14 – 16.)
- [7] BEST R A, NORTON J P. A new model and efficient tracker for a target with curvilinear motion[J]. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 1997, 33(3): 1030 – 1037.
- [8] 李涛. 曲线模型的半自适应交互多模型跟踪方法[J]. 控制理论与应用, 2005, 22(4): 557 – 561.
- (LI Tao. Half adaptive interactive multiple model tracking algorithm of curvilinear model[J]. *Control Theory & Applications*, 2005, 22(4): 557 – 561.)
- [9] ZHOU Hongren. *Tracking of maneuvering targets*[D]. Minneapolis: University of Minnesota, 1984.
- [10] 周宏仁, 敬忠良, 王培德. 机动目标跟踪[M]. 北京: 国防工业出版社, 1991.
- (ZHOU Hongren, JING Zhongliang, WANG Peide. *Maneuvering Target Tracking*[M]. Beijing: National Defence Industry Press, 1991.)

作者简介:

- 孙福明** (1972—), 男, 博士研究生, 研究方向为空间目标识别与跟踪, E-mail: sunfm@mail.ustc.edu.cn;
- 吴秀清** (1944—), 女, 教授, 博士生导师, 研究方向为智能信息处理, E-mail: wuxq@ustc.edu.cn;
- 王鹏伟** (1978—), 男, 博士研究生, 研究方向为多尺度估计理论与应用, E-mail: wangpw@mail.ustc.edu.cn.