

## 不确定多时变时滞网络控制系统的时滞相关稳定性

严怀成, 黄心汉, 王 敏

(华中科技大学 控制科学与工程系, 湖北 武汉 430074)

**摘要:** 讨论了具有不确定性和多时变时滞的网络控制系统(NCSs)的时滞相关稳定性. 针对一类多输入多输出(MIMO)的NCSs, 在考虑网络时滞和不确定性的情况下, 建立了该系统的数学模型. 利用Lyapunov稳定性理论和线性矩阵不等式(LMI)方法, 提出了新的基于LMI形式的时滞相关稳定条件. 该方法克服了已有方法的保守性且结果更具有有一般性. 最后给出实例表明该方法与现有文献结果相比, 具有较小的保守性和更好的有效性.

**关键词:** 网络控制系统; 时滞相关稳定; 线性矩阵不等式; 时变时滞; 不确定性; 最大允许时滞

**中图分类号:** TP13 **文献标识码:** A

## Delay-dependent stability of networked control systems with uncertainties and multiple time-varying delays

YAN Huai-cheng, HUANG Xin-han, WANG Min

(Department of Control Science and Engineering, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan Hubei 430074, China)

**Abstract:** The delay-dependent stability of networked control systems (NCSs) with uncertainties and multiple time-varying delays is investigated in this paper. A class of multi-input and multi-output (MIMO) NCSs mathematical model with network-induced delays and uncertainties is proposed. Based on Lyapunov stability theory combining with linear matrix inequality (LMI) techniques, some new delay-dependent stability criteria in terms of LMI are derived. The proposed method overcomes the conservativeness of the existing methods and is more general. Finally, numerical examples are given to illustrate that the proposed method is much less conservative and more effective than the existing ones.

**Key words:** networked control systems(NCSs); delay-dependent stability; linear matrix inequality(LMI); time-varying delays; uncertainties; maximum allowable delay bound(MADB)

### 1 引言(Introduction)

网络控制系统是指通过一个实时网络构成的闭环反馈控制系统<sup>[1]</sup>. 由于控制回路中引入了网络, 给NCSs带来许多新问题, 其中最主要的问题之一是时滞问题, 它会降低系统的性能甚至导致系统不稳定. 近年来, 国内外学者对NCSs时滞和稳定性问题广泛关注并取得了一些成果<sup>[1,2]</sup>. 另一方面, 时滞系统的鲁棒稳定和镇定条件也引起了大量关注. 依据是否与时滞的大小相关, 可把这些条件分成两类: 时滞独立稳定条件和时滞相关稳定条件<sup>[3~10]</sup>.

本文建立了一类MIMO的NCSs模型, 并提出了LMI形式具有更小保守性的不确定NCSs的时滞相关稳定条件. 由于该模型形式上与多时滞系统模型一致, 因此, 本文结论对一般时滞系统同样适用.

### 2 系统描述与问题提出(System description and problem formulation)

考虑一类MIMO的NCSs, 该系统由被控对象、控制器和通讯网络组成, 其闭环结构图如图1所示.

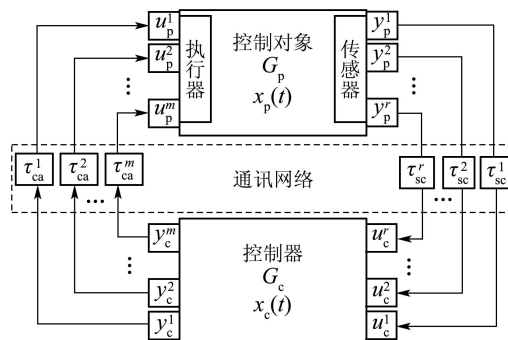


图 1 具有网络时滞的MIMO NCSs结构图

Fig. 1 MIMO NCSs setup with network-induced delays

连续线性时不变被控对象 $G_p$ 表示为

$$\begin{cases} \dot{x}_p(t) = A_p x_p(t) + B_p u_p(t), \\ y_p(t) = C_p x_p(t). \end{cases} \quad (1)$$

其中:  $x_p(t) \in \mathbb{R}^{n_p}$ ,  $u_p(t) \in \mathbb{R}^m$ ,  $y_p(t) \in \mathbb{R}^r$  分别表示被控对象的状态、输入和输出向量,  $A_p \in \mathbb{R}^{n_p \times n_p}$ ,  $B_p \in \mathbb{R}^{n_p \times m}$ ,  $C_p \in \mathbb{R}^{r \times n_p}$  是系统矩阵.

假设控制器 $G_c$ 可由下述状态方程描述

$$\begin{cases} \dot{x}_c(t) = A_c x_c(t) + B_c u_c(t), \\ y_c(t) = C_c x_c(t - \tau_c) + D_c u_c(t - \tau_c). \end{cases} \quad (2)$$

其中:  $x_c(t) \in \mathbb{R}^{n_c}$ ,  $u_c(t) \in \mathbb{R}^r$ ,  $y_c(t) \in \mathbb{R}^m$  分别是控制器的状态、输入和输出向量,  $A_c \in \mathbb{R}^{n_c \times n_c}$ ,  $B_c \in \mathbb{R}^{n_c \times r}$ ,  $C_c \in \mathbb{R}^{m \times n_c}$ ,  $D_c \in \mathbb{R}^{m \times r}$  分别是系统矩阵,  $\tau_c$  是控制器的计算时滞.

由图1可知:

$$u_c^j(t) = y_p^j(t - \tau_{sc}^j), \quad j = 1, 2, \dots, r, \quad (3)$$

$$u_p^i(t) = y_c^i(t - \tau_{ca}^i), \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (4)$$

其中 $\tau_{sc}^j$ 和 $\tau_{ca}^i$ 分别是传感器与控制器之间的网络时滞和控制器与执行器之间的网络时滞.

将 $u_p(t)$ ,  $u_c(t)$ ,  $C_p$ ,  $C_c$ ,  $D_c$ 分别表示为向量形式, 并且由式(1)~(4), 有

$$u_c(t) = \sum_{j=1}^r E_j x_p(t - \tau_{sc}^j), \quad (5)$$

$$u_p(t) = \sum_{i=1}^m F_i x_c(t - \tau_{ca}^i - \tau_c) + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^r G_{ij} x_p(t - \tau_{ca}^i - \tau_{sc}^j - \tau_c). \quad (6)$$

其中:  $E_j \in \mathbb{R}^{r \times n_p}$  的第 $j$ 行是 $C_p^j$ ,  $F_i \in \mathbb{R}^{m \times n_c}$  的第 $i$ 行是 $C_c^i$ , 而矩阵 $G_{ij} \in \mathbb{R}^{m \times n_p}$  的第 $i$ 行是 $D_c^i E_j$ , 这些矩阵其余行都为零向量.

由式(1)~(6), 且定义 $x(t) = [x_p^T(t), x_c^T(t)]^T \in \mathbb{R}^{n_p+n_c}$  为该NCSs的状态向量, 则有

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) = & Ax(t) + \sum_{j=1}^r A_j x(t - \tau_1^j) + \sum_{i=1}^m B_i x(t - \tau_2^i) + \\ & \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^r C_{ij} x(t - \tau_3^{i,j}), \end{aligned} \quad (7)$$

其中:

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} A_p & 0 \\ 0 & A_c \end{bmatrix}, A_j = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ B_c E_j & 0 \end{bmatrix}, \\ B_i &= \begin{bmatrix} 0 & B_p F_i \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, C_{ij} = \begin{bmatrix} B_p G_{ij} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ \tau_1^j &= \tau_{sc}^j, \tau_2^i = \tau_{ca}^i + \tau_c, \tau_3^{i,j} = \tau_{sc}^j + \tau_{ca}^i + \tau_c. \end{aligned}$$

方便起见, 可作如下假设:

$$\begin{cases} A_{r+i} = B_i, A_{m+ir+j} = C_{ij}, \\ \tau_j = \tau_1^j, \tau_{r+i} = \tau_2^i, \tau_{m+ir+j} = \tau_3^{i,j}, \\ N = m+r+mr, i=1, \dots, m, j=1, \dots, r. \end{cases} \quad (8)$$

由式(7)和(8), 易得到该NCSs可表示为

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + \sum_{j=1}^N A_j x(t - \tau_j). \quad (9)$$

实际NCSs中, 由于不可避免地存在各种不确定性因素, 而且, 时滞大多数情况都是时变的. 因此, 不失一般性, 考虑下述具有不确定性和多时变时滞的MIMO闭环NCSs模型:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (A + \Delta A(t))x(t) + \sum_{i=1}^N (A_i + \Delta A_i(t))x(t - \tau_i(t)), \\ x(t) = \phi(t), t \in [-\bar{\tau}, 0]. \end{cases} \quad (10)$$

不考虑确定性时, 系统(10)的标称系统即为

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + \sum_{i=1}^N A_i x(t - \tau_i(t)), \\ x(t) = \phi(t), t \in [-\bar{\tau}, 0]. \end{cases} \quad (11)$$

式(10)和(11)中:  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  表示系统状态向量,  $A, A_i$  是适当维数的系统矩阵.  $i = 1, 2, \dots, N$ , 下同.  $\tau_i(t)$  表示时变时滞, 且假定满足式(12)或(13):

$$0 \leq \tau_i(t) \leq \tau_i \leq \bar{\tau}, \dot{\tau}_i(t) \leq \mu_i \leq \mu, \quad (12)$$

$$0 \leq \tau_i(t) \leq \tau_i \leq \bar{\tau}, \quad (13)$$

$\tau_i$  和  $\mu_i$  是常数且  $\bar{\tau}$  和  $\mu$  分别为其上界.  $\phi(t)$  是  $-\bar{\tau} \leq t \leq 0$  上的初始向量函数.  $\Delta A(t)$  和  $\Delta A_i(t)$  为适当维数的时变矩阵且表示系统的不确定性, 可描述为

$$\Delta A(t) = DF(t)E, \Delta A_i(t) = D_i F_i(t)E_i.$$

其中  $D, E, D_i, E_i$  分别是具有适当维数的实常数矩阵.  $F(t), F_i(t)$  是未知实时变矩阵且满足

$$F^T(t)F(t) \leq I, F_i^T(t)F_i(t) \leq I.$$

### 3 主要结论(Main results)

**定理 1** 当式(12)成立时, 如果存在  $P > 0, Q_i > 0, Z_i > 0, i = 1, 2, \dots, N$ , 半正定对称矩阵

$$X = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} & \cdots & X_{1,N+1} \\ * & X_{22} & \cdots & X_{2,N+1} \\ * & * & \ddots & \vdots \\ * & * & * & X_{N+1,N+1} \end{bmatrix} \geq 0, \quad (14)$$

及适当维数的矩阵  $Y, T_i$ , 使下列LMI成立:

$$\Omega = \begin{bmatrix} \Omega_{11} & \Omega_{12} \\ * & \Omega_{22} \end{bmatrix} < 0, \quad (15)$$

$$\Pi = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} & \cdots & X_{1,N+1} & Y \\ * & X_{22} & \cdots & X_{2,N+1} & T_1 \\ * & * & \ddots & \vdots & \vdots \\ * & * & * & X_{N+1,N+1} & T_N \\ * & * & * & * & Z_i \end{bmatrix} \geq 0, \quad (16)$$

则系统(11)是时滞相关渐近稳定的. 其中:

$$\begin{aligned} \Omega_{11} &= \begin{bmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} & \cdots & \Phi_{1,N+1} \\ * & \Phi_{22} & \cdots & \Phi_{2,N+1} \\ * & * & \ddots & \vdots \\ * & * & * & \Phi_{N+1,N+1} \end{bmatrix}, \\ \Phi_{11} &= PA + A^T P + \sum_{i=1}^N \{Y + Y^T + Q_i + \tau_i X_{11}\}, \\ \Phi_{12} &= PA_1 - Y + NT_1^T + \sum_{i=1}^N \tau_i X_{12}, \\ \Phi_{1,N+1} &= PA_N - Y + NT_N^T + \sum_{i=1}^N \tau_i X_{1,N+1}, \\ \Phi_{22} &= -T_1 - T_1^T - (1 - \mu_1)Q_1 + \sum_{i=1}^N \tau_i X_{22}, \\ \Phi_{2,N+1} &= -T_1 - T_N^T + \sum_{i=1}^N \tau_i X_{2,N+1}, \\ \Phi_{N+1,N+1} &= -T_N - T_N^T - (1 - \mu_N)Q_N + \sum_{i=1}^N \tau_i X_{N+1,N+1}, \\ \Omega_{12} &= [A, A_1, \cdots, A_N]^T [\tau_1 Z_1, \tau_2 Z_2, \cdots, \tau_N Z_N], \\ \Omega_{22} &= -\text{diag}\{\tau_1 Z_1, \tau_2 Z_2, \cdots, \tau_N Z_N\}. \end{aligned}$$

证 选取Lyapunov-Krasovskii泛函

$$V(t) = V_1(t) + V_2(t) + V_3(t).$$

其中:

$$\begin{aligned} V_1(t) &= x^T(t)Px(t), \\ V_2(t) &= \sum_{i=1}^N \left\{ \int_{-\tau_i}^0 \int_{t+\beta}^t \dot{x}^T(\alpha) Z_i \dot{x}(\alpha) d\alpha d\beta \right\}, \\ V_3(t) &= \sum_{i=1}^N \left\{ \int_{t-\tau_i(t)}^t x^T(\alpha) Q_i x(\alpha) d\alpha \right\}. \end{aligned}$$

由牛顿-莱布尼兹公式, 对适当维数矩阵 $Y, T_i$ , 有

$$2[x^T(t)Y + \sum_{i=1}^N x^T(t - \tau_i(t))T_i] \times$$

$$\sum_{i=1}^N [x(t) - \int_{t-\tau_i(t)}^t \dot{x}(s)ds - x(t - \tau_i(t))] = 0. \quad (17)$$

对于式(14)定义的 $X \geq 0$ , 下式成立:

$$\sum_{i=1}^N [\tau_i \xi^T(t) X \xi(t) - \int_{t-\tau_i(t)}^t \xi^T(s) X \xi(s) ds] \geq 0. \quad (18)$$

其中

$$\xi(t) = [x^T(t), x^T(t - \tau_1(t)), \cdots, x^T(t - \tau_N(t))]^T.$$

因此, 将 $V(t)$ 分别对时间求导, 将式(17)和(18)加入其中并考虑到式(12), 可知 $V(t)$ 沿(11)的导数满足

$$\dot{V}(t) \leq$$

$$\xi^T(t) \Delta \xi(t) - \sum_{i=1}^N \left\{ \int_{t-\tau_i(t)}^t \xi^T(t, s) \Pi \xi(t, s) ds \right\}.$$

其中 $\Pi, \xi(t)$ 定义于式(16)和式(18), 且

$$\xi(t, s) :=$$

$$[x^T(t), x^T(t - \tau_1(t)), \cdots, x^T(t - \tau_N(t)), \dot{x}^T(s)]^T,$$

$$\Delta =$$

$$\Omega_{11} + \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N \tau_i A^T Z_i A & \sum_{i=1}^N \tau_i A^T Z_i A_1 & \cdots & \sum_{i=1}^N \tau_i A^T Z_i A_N \\ * & \sum_{i=1}^N \tau_i A_1^T Z_i A_1 & \cdots & \sum_{i=1}^N \tau_i A_1^T Z_i A_N \\ * & * & \ddots & \vdots \\ * & * & * & \sum_{i=1}^N \tau_i A_N^T Z_i A_N \end{bmatrix}.$$

由Schur补<sup>[11]</sup>, 若 $\Delta < 0$ 且 $\Pi \geq 0$ 成立, 则对任意 $\xi(t) \neq 0$ 有 $\dot{V}(t) < 0$ , 故系统(11)渐近稳定.

证毕.

**定理2** 当式(12)成立时, 若存在 $P > 0, Q_i > 0, Z_i > 0$ , 正标量 $e_j > 0, j = 1, 2, \cdots, N+1, X \geq 0$ 及适当维数的矩阵 $Y, T_i$ 使式(16)和下列LMI成立:

$$\begin{bmatrix} \Theta_{11} & \Theta_{12} & \Theta_{13} \\ * & \Theta_{22} & \Theta_{23} \\ * & * & \Theta_{33} \end{bmatrix} < 0, \quad (19)$$

则不确定系统(10)是时滞相关渐近稳定的. 其中:

$$\Theta_{11} =$$

$$\Omega_{11} + \text{diag}\{e_1 E^T E, e_2 E_1^T E_1, \cdots, e_{N+1} E_N^T E_N\},$$

$$\Theta_{13} = [P^T, 0, \cdots, 0]^T [D, D_1, \cdots, D_N],$$

$$\Theta_{12} = \Omega_{12}, \quad \Theta_{22} = \Omega_{22},$$

$$\Theta_{23} = [\tau_1 Z_1, \tau_2 Z_2, \cdots, \tau_N Z_N]^T [D, D_1, \cdots, D_N],$$

$$\Theta_{33} = -\text{diag}\{e_1 I, e_2 I, \cdots, e_N I\}.$$

证 采用文[10]中定理3的类似证明方法, 将定理1推广到不确定情形, 应用S-过程<sup>[11]</sup>, 可得到定理2.

**注1** 若选取 $V(t) = V_1(t) + V_2(t)$ , 则易得到当式(13)成立时与时滞导数无关与定理1,2相应的稳定条件.

## 4 实例仿真(Examples and simulation)

**例1** 考虑如下标称时滞系统, 其参数为<sup>[5]</sup>

$$A = \begin{bmatrix} -2.0 & 0 \\ 0 & -0.9 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} -1.0 & 0 \\ -1.0 & -1.0 \end{bmatrix}.$$

由定理1并用MATLAB LMI工具箱求解, 可求得保证系统稳定的MADB与其他文献结果的比较如表1所示. 可以看出, 本文的方法能给出一个具有更小保守性的MADB, 是现有结果上的改善和提高.

表1 不同时滞导数上限对应的MADB

Table 1 MADB for different upper bound of the derivative of delay

| 方法    | $\mu$ 未知 | $\mu = 0.1$ | $\mu = 2$ | $\mu = 0$ |
|-------|----------|-------------|-----------|-----------|
| 文献[3] | —        | 0.9447      | 无定义       | 1         |
| 文献[4] | —        | 0.9723      | 无定义       | 1         |
| 文献[5] | —        | —           | —         | 4.3588    |
| 文献[6] | —        | —           | —         | 4.4700    |
| 本文定理1 | 0.9999   | 3.6040      | 0.9999    | 4.4721    |

例2 考虑不确定时变时滞系统, 其参数为<sup>[8]</sup>:

$$A = \begin{bmatrix} -2.0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, A_1 = \begin{bmatrix} -1.0 & 0 \\ -1.0 & -1.0 \end{bmatrix}.$$

$$D = E = \begin{bmatrix} \sqrt{0.3} & 0 \\ 0 & \sqrt{0.2} \end{bmatrix}, D_1 = E_1 = \begin{bmatrix} \sqrt{0.2} & 0 \\ 0 & \sqrt{0.3} \end{bmatrix}.$$

根据本文结论并用MATLAB LMI工具箱求解, 可得MADB与其他文献比较如表2所示. 显然, 本文得到的结果保守性较小. 当 $\tau = 0.6358$ 时, 系统响应曲线如图2所示, 可见, 该时滞下系统是渐近稳定的.

表2 不同方法得到MADB的比较

Table 2 MADB in comparison with other methods

| 方法           | 文献[7]  | 文献[8]  | 文献[9]  | 本文     |
|--------------|--------|--------|--------|--------|
| $\bar{\tau}$ | 0.1575 | 0.2558 | 0.3916 | 0.6358 |

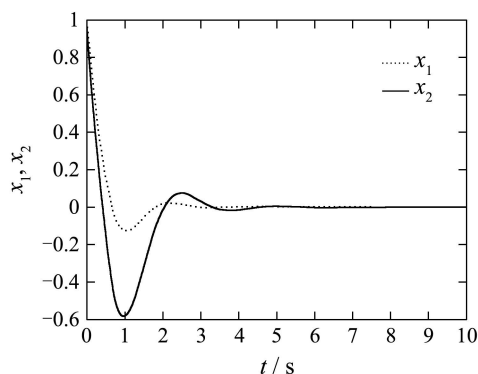


图2 时变时延的不确定NCSs的状态响应

Fig. 2 State response of uncertain NCSs with time-varying delay

## 5 结论(Conclusions)

针对实际NCSs中普遍存在不确定性和时变时滞特征, 本文建立了一类MIMO的NCSs模型. 利用

Lyapunov稳定性理论和LMI方法, 得出了基于LMI形式新的NCSs时滞相关稳定性条件. 实例和仿真结果表明本文方法所得结论较以往文献具有更小的保守性. 这些结果对研究网络环境下的稳定性和鲁棒控制问题具有一定的理论和实际意义.

## 参考文献(References):

- [1] WALSH G C, YE H, BUSHNELL L G. Stability analysis of networked control systems[J]. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2002, 10 (3): 438 – 446.
- [2] ZHANG W, BRANICKY M S, PHILLIPS S M. Stability of networked control systems[J]. *IEEE Control Systems Magazine*, 2001, 21 (1): 84 – 99.
- [3] KIM J H. Delay and its time-derivative dependent robust stability of time-delayed linear systems with uncertainty [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2001, 46 (5): 789 – 792.
- [4] YUE D, WON S. An improvement on 'Delay and its time-derivative dependent robust stability of time-delayed linear systems with uncertainty' [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2002, 47(2): 407 – 408.
- [5] PARK P. A delay dependent stability criterion for systems with uncertain time-invariant delays[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1999, 44 (4): 876 – 877.
- [6] FRIDMAN E, SHAKED U. New bounded real lemma representations for time-delay systems and their applications[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2001, 46 (12): 1973 – 1979.
- [7] SU T J, HUANG C G. Robust stability of delay dependence for linear uncertain systems[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1992, 37(10): 1656 – 1659.
- [8] CAO Y Y, SUN Y X, CHENG C W. Delay-dependent robust stabilization of uncertain systems with multiple state delays[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1998, 43 (11): 1608 – 1612.
- [9] 景兴建. 网络遥操作机器人系统稳定性分析和规划方法研究[D]. 沈阳: 中国科学院沈阳自动化所, 2004: 69 – 70. (JING Xingjian. *Stability and planning of internet-based tele-robotic systems*[D]. Shenyang: Shenyang Institute of Automation, Chinese Academy of Sciences, 2004: 69 – 70.)
- [10] MOON Y S, PARK P G, KWON W H, et al. Delay-dependent robust stabilization of uncertain state-delayed systems[J]. *International Journal of Control*, 2001, 74 (14): 1447 – 1455.
- [11] BODY S, EL GHAOU L, ERON E, et al. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*[M]. Philadelphia, PA: SIAM, 1994.

## 作者简介:

严怀成 (1977—), 男, 博士, 主要研究方向为网络控制系统、时滞系统的分析与综合, E-mail: huaicheng2000@163.com;

黄心汉 (1946—), 男, 教授, 博士生导师, 主要研究方向为机器人原理及应用、多传感器集成与数据融合、图象处理与模式识别技术等, E-mail: xhhuang@mail.hust.edu.cn;

王敏 (1954—), 女, 教授, 硕士生导师, 主要研究方向为智能控制、图象处理与模式识别技术等, E-mail: wm526@163.com.